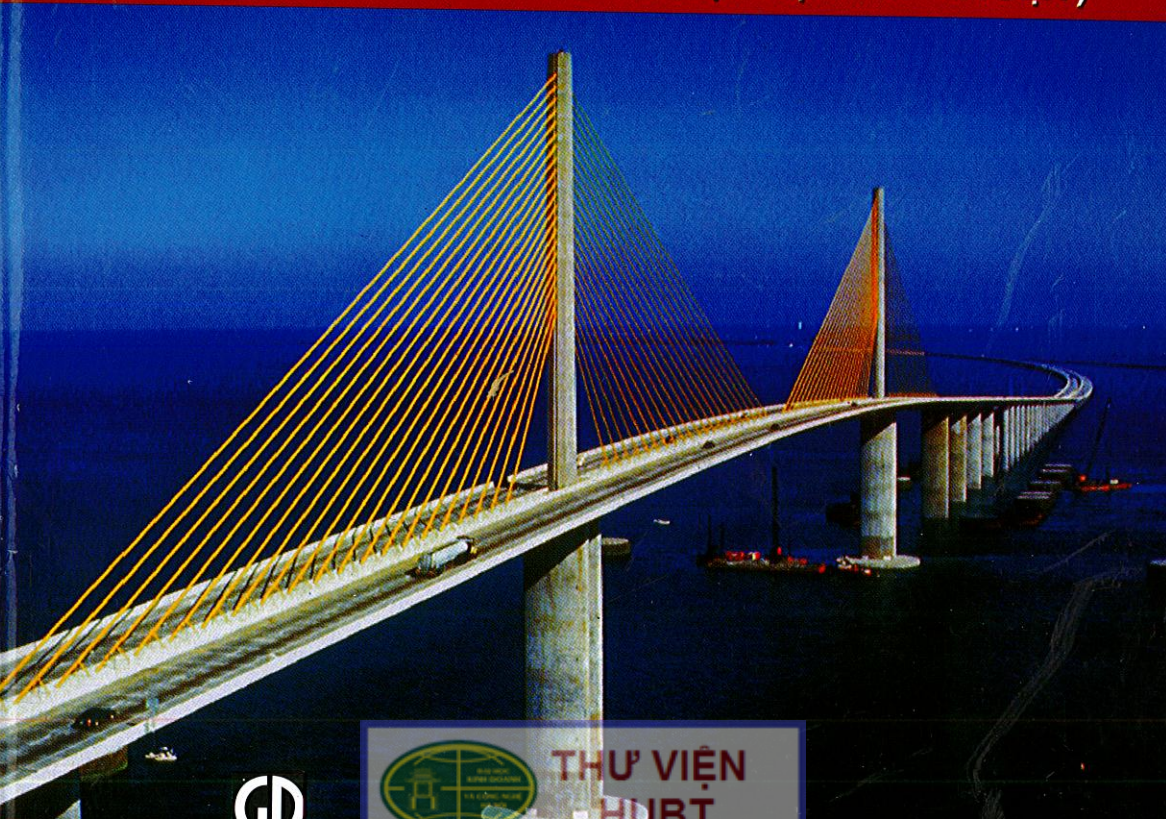


2.156

PGS. TS. NHỮ PHƯƠNG MAI

SỨC BỀN VẬT LIỆU

LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP
(DÙNG TRONG CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT)



THƯ VIỆN
HUBT

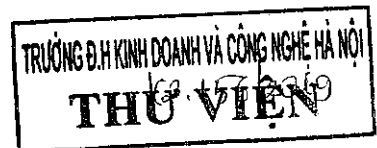
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

PGS. TS. NHỮ PHƯƠNG MAI

SỨC BỀN VẬT LIỆU

LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP

(Dùng trong các trường Đại học Kỹ thuật)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



Công ty Cổ phần sách Đại học - Dạy nghề -- Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm.

15 - 2010/CXB/44 - 21.79/GD



**THƯ VIỆN
HUBT**

Mã số : 7B774Y0 - DAI

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

LỜI NÓI ĐẦU

“**Sức bền vật liệu**” là môn học cơ sở chuyên ngành trong chương trình đào tạo ở các trường Đại học Kỹ thuật. Môn học này được mang các tên gọi khác nhau trong các giáo trình ở nước ngoài như: “Strength of Materials” hoặc “Mechanics of Materials”. Mục đích chính của môn học là :

– Trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản về liên hệ giữa lực tác động lên vật thể làm từ vật liệu nhất định và biến dạng của vật thể đó.

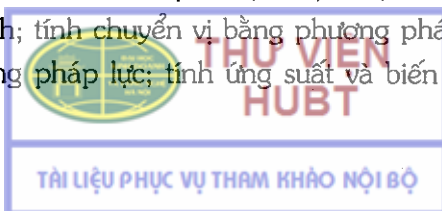
– Phân tích mối quan hệ giữa các dạng ngoại lực tác động và ứng suất phát sinh trong vật thể đó.

– Đưa ra quy trình tính toán để lựa chọn hình dáng, kích thước và vật liệu hợp lý của các chi tiết đó khi chịu các dạng tải trọng khác nhau, nhằm đảm bảo độ bền, độ cứng, độ ổn định của vật thể mà vẫn tiết kiệm được vật liệu.

Cuốn “**Sức bền vật liệu**” được biên soạn dựa trên các giáo trình về môn học này của các trường Đại học ở Mỹ: Stanford University, Massachusetts University of Technology, Virginia Polytechnic Institute and State University, Michigan University, Iowa State University, California State University, University of Connecticut,... với mong muốn cập nhật và mở rộng những kiến thức truyền thống trong các giáo trình hiện nay, nhằm đáp ứng nhu cầu phát triển và hội nhập Quốc tế, tiến tới chuẩn hóa chương trình đào tạo Đại học.

Nội dung cuốn sách được biên soạn theo chương trình khung của Bộ Giáo dục và Đào tạo dành cho sinh viên các ngành Cơ điện tử, Cơ học Kỹ thuật, Cơ khí chế tạo máy, với thời lượng 3 - 6 tín chỉ. Những vấn đề trình bày trong cuốn sách này đồng thời cũng là kiến thức cốt lõi tối thiểu đối với các ngành khác như : Xây dựng, Giao thông vận tải, Mỏ - Địa chất, Hàng không vũ trụ, Kỹ thuật tàu thủy,... Tùy theo đặc thù của từng ngành đào tạo, có thể sử dụng toàn bộ hoặc một phần nội dung các chương mục.

Cuốn sách bao gồm 11 chương (mỗi chương đều có phần lý thuyết và bài tập), nêu các kiến thức cơ bản về nội lực, ứng suất, biến dạng, chuyển vị; các hình thức chịu cơ bản: thanh chịu kéo, nén, uốn, xoắn, thanh chịu lực phức tạp; tính toán ổn định; tính chuyển vị bằng phương pháp năng lượng; giải hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực; tính ứng suất và biến dạng của kết cấu khi



chịu tải trọng động. Các ví dụ, bài tập nêu trong sách đều có dạng hoàn toàn mới so với các giáo trình trong nước và là những vấn đề có tính ứng dụng trong thực tế, nhiều điểm mới được bổ sung (mục 2.8; 4.6; 4.7; 5.5; 6.3.2; 6.3.3; 6.4; 7.4.4; 7.6; 8.3; 8.5; 8.6; 9.4; 9.5; 10.1.1.÷ 10.1.4; 10.2.3; 11.4.4 và phần phụ lục). Một số hình ảnh, đồ thị được đưa vào nhằm minh họa sinh động hơn nội dung đề cập.

Tác giả mong muốn cuốn sách sẽ góp phần đem lại niềm hứng thú, say mê cho các sinh viên trong việc học môn “Sức bền vật liệu” nói riêng, và các môn Cơ học nói chung, cũng như giúp các em hiểu sâu hơn, rộng hơn những kiến thức vốn rất “trừu tượng” của môn học này và áp dụng vào công việc của mình để đem lại nhiều kết quả có giá trị thực tiễn. Cuốn sách cũng có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho các học viên cao học, các kỹ sư trong lĩnh vực Cơ học vật rắn biến dạng, Chế tạo máy....

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, các em sinh viên đã động viên và giúp đỡ trong việc biên soạn, hiệu chỉnh bản thảo. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã tạo điều kiện thuận lợi để cuốn sách được ra mắt bạn đọc.

Trong quá trình biên soạn không tránh khỏi thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp, bạn đọc gần xa và các em sinh viên, để có điều kiện chỉnh lý, hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau. Các ý kiến đóng góp xin gửi về : Công ty cổ phần Sách Đại học - Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt nam, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội, hoặc theo địa chỉ: Bộ môn Sức bền vật liệu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 đường Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Hà nội, tháng 4 năm 2010

PGS.TS. NHỮ PHƯƠNG MAI



Chương 1

KHÁI NIỆM VỀ ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

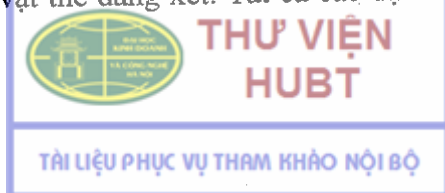
1.1. MỞ ĐẦU

1.1.1. Mục đích, đối tượng nghiên cứu của môn Sức bền vật liệu

Mục đích chính của việc nghiên cứu Sức bền vật liệu là cung cấp cho các kỹ sư tương lai phương tiện để phân tích và thiết kế các chi tiết máy hoặc thành phần kết cấu chịu lực. Các kỹ năng để phân tích và thiết kế gồm : xác định *Ứng suất* và *Biến dạng*. Trong chương này đề cập đến khái niệm về ứng suất.

Đối tượng nghiên cứu của Sức bền vật liệu là các chi tiết máy hoặc thành phần kết cấu (dầm cầu, cột chống, thanh giằng, trục truyền ...) được làm từ những vật liệu có thực (thép, gỗ, bê tông,...). Để hiểu rõ ứng xử cơ học của các thành phần chịu tải trọng khác nhau, điều quan trọng là phải biết được các đặc trưng cơ học của vật liệu, được xác định từ thực nghiệm. Ta chấp nhận các giả thuyết cơ bản về vật liệu là : *liên tục, đồng nhất và đẳng hướng*. Tính liên tục có nghĩa là không có nơi nào rỗng trong lòng vật thể, vật liệu là đồng nhất nếu tính chất cơ học tại mọi điểm là như nhau, đẳng hướng nếu các tính chất đó trên mọi phương đều như nhau. Ngoài ra, biến dạng của vật liệu được coi là vô cùng bé so với kích thước của vật thể.

Khi hệ chịu tác động từ môi trường bên ngoài (còn gọi là "*Ngoại lực*", ví dụ : trọng lượng bản thân, phản lực liên kết, nhiệt độ, áp suất...), giữa các thành phần của vật thể xuất hiện lực tương tác chống lại sự biến dạng và giữ cho hệ được cân bằng, hệ lực đó gọi là "*Nội lực*". Sự phân bố nội lực đó trên mặt phẳng bất kỳ trong lòng vật thể bao gồm *ứng suất pháp* và *ứng suất tiếp*. Thí nghiệm các mẫu chịu kéo - nén xác định được *ứng suất nguy hiểm* của vật liệu đã cho, từ đó sử dụng *hệ số an toàn* để tính toán *ứng suất cho phép* của vật thể đang xét. Tất cả các đặc trưng cơ học đó sẽ giúp



người kỹ sư thiết kế các loại chi tiết khác nhau thỏa mãn yêu cầu về độ bền và điều kiện làm việc của kết cấu.

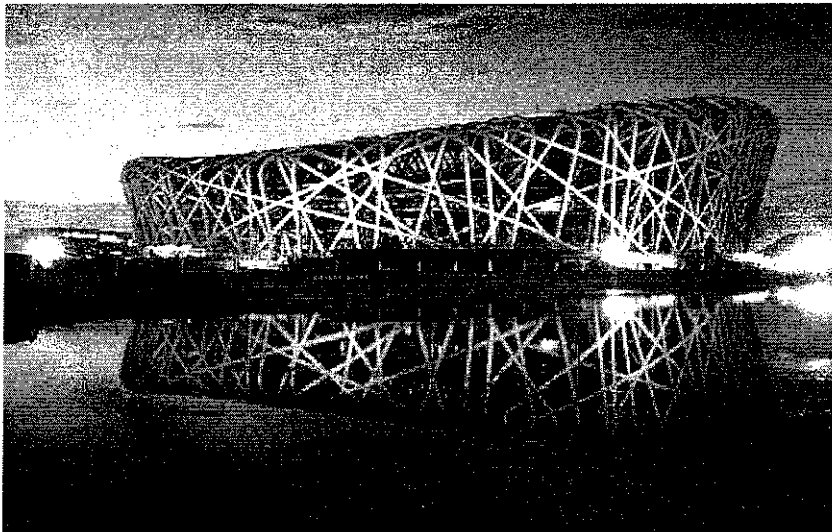
1.2. MÔ HÌNH HÓA KẾT CẤU

Phụ thuộc vào hình dạng và kích thước, kết cấu được mô hình hóa thành ba dạng chủ yếu: *thanh hoặc dầm* (mô hình một chiều); *tấm & vỏ* (mô hình hai chiều); và *khối* (mô hình ba chiều).

– Thanh là kết cấu có một kích thước (chiều dài) lớn hơn rất nhiều so với kích thước mặt cắt ngang. Hình 1.1 biểu diễn hệ khung bao gồm rất nhiều thanh tạo nên kiến trúc độc đáo của sân vận động “Tổ chim” ở Bắc Kinh – Trung quốc. Cầu “Cổng vàng” (hình 1.2) là ví dụ về mô hình dầm chịu uốn, trong khi các cáp treo là thanh chịu kéo.

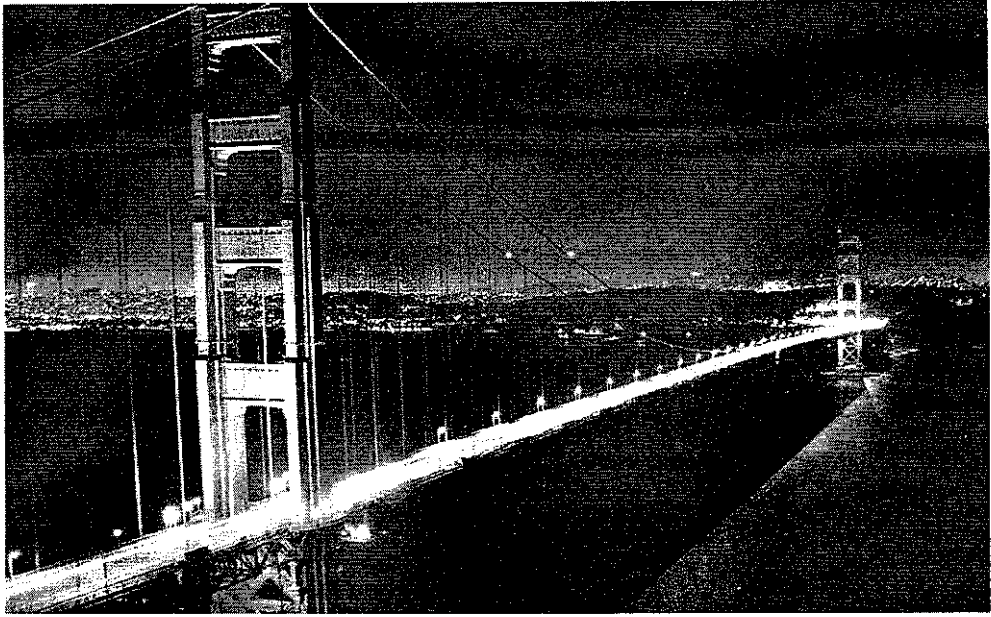
– Tấm hoặc vỏ có một kích thước (chiều dày) nhỏ hơn rất nhiều so với các kích thước còn lại. Trên hình 1.3 ta thấy cánh máy bay Boeing là mô hình tấm mỏng, còn mái vòm của Nhà hát lớn nổi tiếng ở Sydney – Úc (hình 1.4) là mô hình vỏ.

– Khối là vật thể có cả 3 kích thước chính đều lớn đáng kể. Ví dụ như móng của các tòa nhà, bộ máy, hay như đập thủy điện “Glen Canyon Dam” (hình 1.5) ở Arizona – Hoa kỳ.

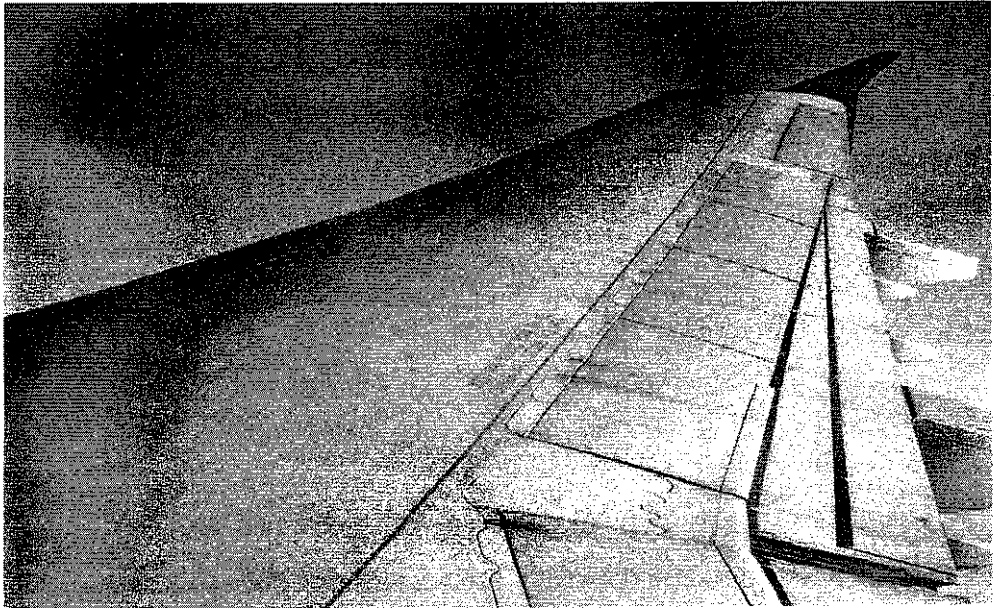


Hình 1.1. Sân vận động “Tổ chim” – Bắc Kinh – Trung quốc

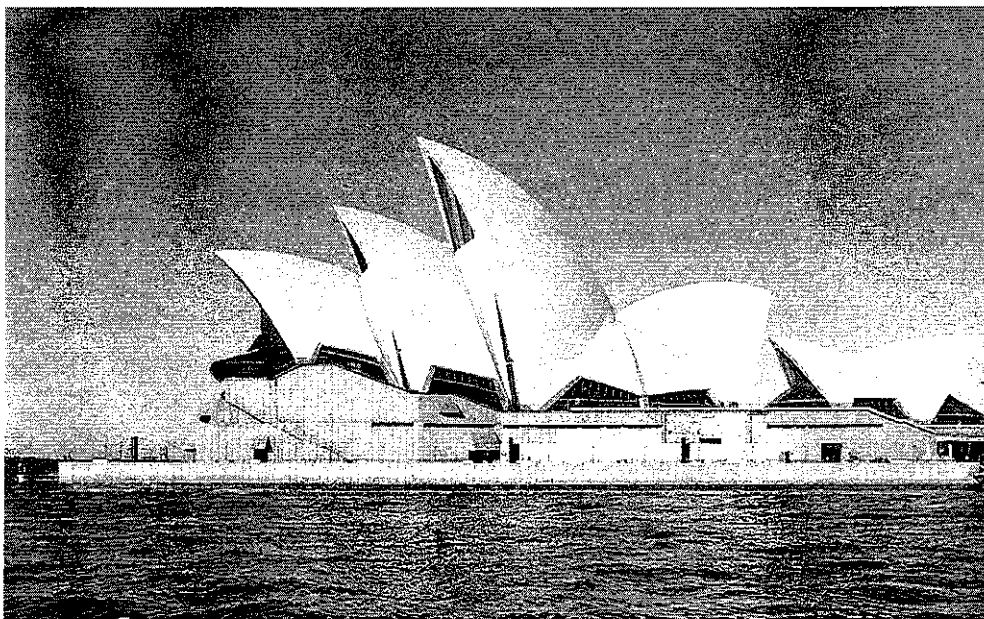




Hình 1.2. Cầu " Cổng vàng" tại San-Francisco – California – Hoa kỳ



Hình 1.3. Cánh máy bay Boeing



Hình 1.4. Nhà hát lớn ở Sidney – Úc



Hình 1.5. Đập thủy điện "Glen Canyon" tại Arizona – USA

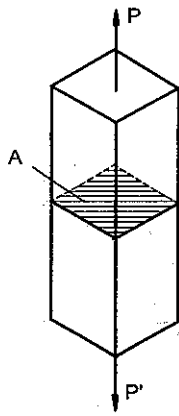
1.3. KHÁI NIỆM VỀ ỨNG SUẤT

1.3.1. Ứng suất pháp

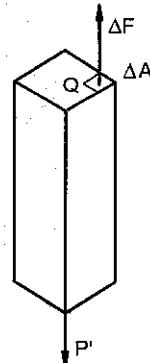
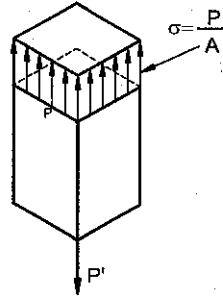
Hình 1.6 biểu diễn thanh chịu tác dụng của lực dọc trục P, ứng suất pháp trên mặt cắt ngang diện tích A xác định bởi công thức:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.1}$$

Trong đó P là nội lực tác dụng trên mặt cắt ngang A. Ta thấy sự phân bố ứng suất là đều trên toàn bộ mặt cắt.



Hình 1.6



Hình 1.7

Định nghĩa về ứng suất pháp tại điểm Q bất kỳ trên phân tố diện tích ΔA , chịu tác dụng của nội lực ΔF (hình 1.7) biểu diễn như sau:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.2}$$

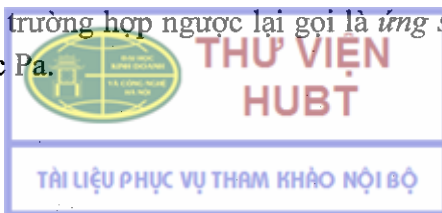
Độ lớn của hợp lực nội lực phân bố là:

$$\int_A dF = \int_A \sigma dA \tag{1.3}$$

Hợp lực đó phải cân bằng với ngoại lực tác dụng lên mặt cắt ngang, ta có :

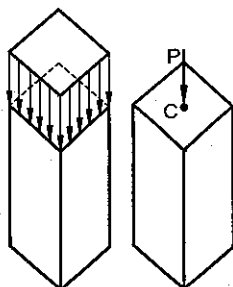
$$P = \int_A dF = \int_A \sigma dA \tag{1.4}$$

Ứng suất pháp có dấu dương nếu chiều của nó hướng từ mặt cắt ra ngoài (*ứng suất kéo*), trường hợp ngược lại gọi là *ứng suất nén*. Đơn vị của ứng suất là N/m^2 hoặc Pa.

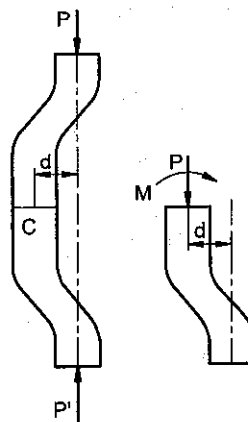


Từ (1.1), ta thấy việc thiết kế các thành phần chịu lực dọc trục bao gồm xác định tải trọng cho phép mà kết cấu có thể chịu được, hoặc lựa chọn diện tích mặt cắt ngang sao cho thỏa mãn điều kiện cả về độ bền và về mặt kinh tế.

Sự phân bố ứng suất là đều trên mặt cắt ngang chỉ xảy ra nếu như đường tác dụng của lực tập trung đi qua trọng tâm (hình 1.8). Trong trường hợp lực tác dụng lệch tâm một khoảng cách d (hình 1.9), ta có nội lực trên mặt cắt ngang bao gồm lực dọc trục P và mômen uốn $M = P.d$. Khi đó sự phân bố của ứng suất sẽ không phải là đều. Ta sẽ xét trong chương 5.



Hình 1.8

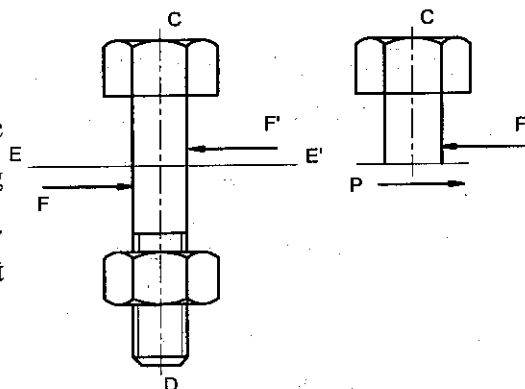


Hình 1.9

1.3.2. Ứng suất tiếp

Hình 1.10 biểu diễn đỉnh ốc chịu tác dụng của hai lực bằng nhau nhưng ngược chiều F và F' . Ứng suất tiếp trung bình trên mặt cắt ngang xác định bởi công thức:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.5)$$



Hình 1.10

Công thức (1.1) và (1.5) được sử dụng để tính ứng suất tới hạn của các mối nối.

1.4. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT NGHIÊNG BẤT KỲ CỦA THANH CHỊU LỰC DỌC TRỰC

Xét một thanh chịu lực dọc trục P, P' (hình 1.11). Trên mặt phẳng nghiêng một góc θ với mặt cắt ngang (hình 1.11a), ta có thể tìm các thành phần lực pháp tuyến F và tiếp tuyến V với mặt đang xét A (hình 1.11b) :

$$F = P \cdot \cos\theta ; V = P \cdot \sin\theta \quad (1.6)$$

Lực F biểu diễn hợp lực của ứng suất pháp, còn V là hợp lực của ứng suất tiếp (hình 1.11c):

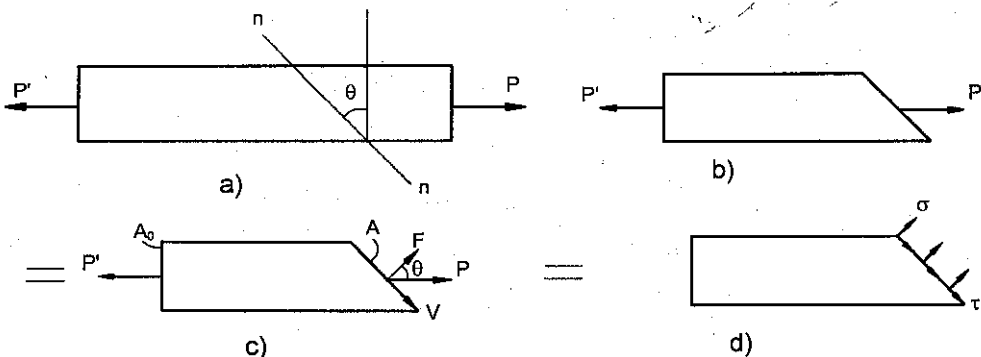
$$\sigma = \frac{F}{A_a} ; \tau = \frac{V}{A_a} \quad (1.7)$$

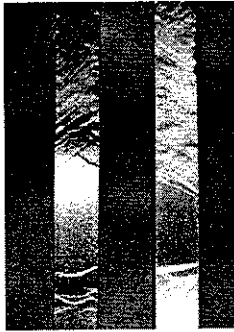
Ký hiệu A_0 là diện tích của mặt cắt ngang thanh, còn A_a là diện tích của mặt nghiêng, ta có: $A_0 = A_a \cos\theta$, thay vào (1.7) ta được (hình 1.11d):

$$\sigma = \frac{P \cdot \cos^2\theta}{A_0} ; \tau = \frac{P \sin\theta \cos\theta}{A_0} \quad (1.8)$$

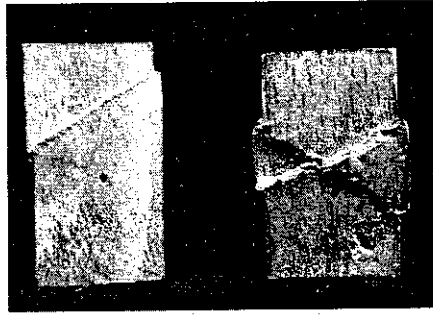
Từ (1.8) ta thấy ứng suất pháp đạt giá trị lớn nhất khi $\theta = 0^\circ$ (có nghĩa là khi mặt phẳng vuông góc với trục thanh) khi đó: $\sigma_{\max} = \frac{P}{A_0}$. Khi $\theta = 90^\circ$, ứng suất pháp và tiếp đều bằng 0, tức là trên mặt phẳng song song với trục thanh không có ứng suất. Còn khi $\theta = 45^\circ$, ta có ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{2A_0} \quad (1.9)$$





a)



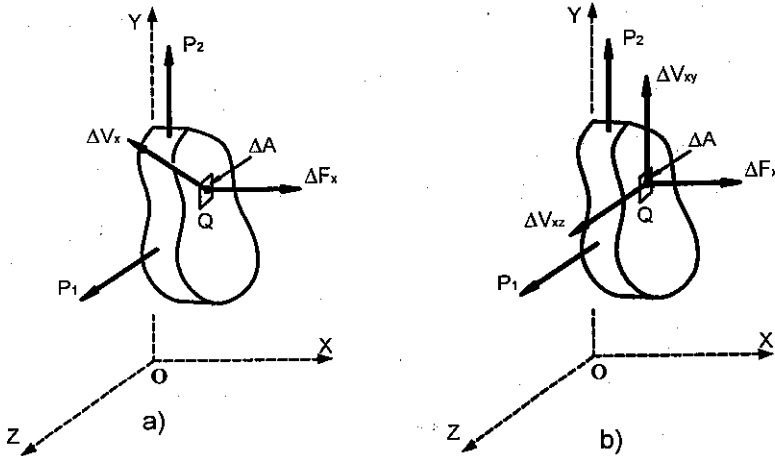
b)

Hình 1.12

Thí nghiệm kéo mẫu thép 1.12a và nén mẫu gỗ 1.12b cho thấy sự trượt gây nên bởi ứng suất tiếp làm thành góc 45° với trục của thanh.

1.5. ỨNG SUẤT TRONG TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

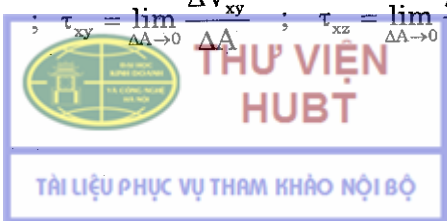
Xét vật thể chịu tác dụng của hệ lực P_1, P_2, \dots . Ta cắt một mặt cắt đi qua điểm Q bất kỳ, song song với mặt phẳng yz (hình 1.13a).



Hình 1.13

Ký hiệu ΔF_x và ΔV_y (hình 1.13b) là các thành phần nội lực pháp tuyến và tiếp tuyến trên phần tử diện tích ΔA bao quanh điểm Q, ta có các thành phần ứng suất trên mặt cắt đang xét xác định bởi công thức:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} ; \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xy}}{\Delta A} ; \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xz}}{\Delta A} \quad (1.10)$$



Ứng suất pháp σ_x trên mặt phẳng vuông góc với trục x , *chiều của nó được coi là dương nếu trùng với chiều dương của trục x* . Ứng suất tiếp τ_{xy} , τ_{xz} có hai chỉ số: chỉ số thứ 1 chỉ phương của pháp tuyến mặt cắt, chỉ số thứ 2 chỉ phương của ứng suất tiếp đó. Chiều ứng suất tiếp được coi là dương nếu trùng với chiều dương của trục tọa độ.

Tương tự, ta có thể xác định các thành phần ứng suất khác của phân tố bất kỳ trong vật thể chịu ngoại lực: các ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ theo phương x, y, z tương ứng, và các ứng suất tiếp bằng nhau về độ lớn từng đôi một :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.11)$$

Biểu thức (1.11) có thể chứng minh từ điều kiện cân bằng của mômen nội lực đối với các trục tọa độ.

1.6. CÁC TIÊU CHUẨN THIẾT KẾ

Việc xác định được ứng suất giúp cho người kỹ sư có thể hoàn thành nhiệm vụ thiết kế chi tiết máy hoặc kết cấu đảm bảo độ bền một cách kinh tế và thực hiện tốt chức năng hoạt động theo yêu cầu đặt ra. Để nhằm mục đích đó, ta xác định một số tiêu chuẩn cơ bản sau về thiết kế:

1.6.1. Tính toán ứng suất nguy hiểm của vật liệu

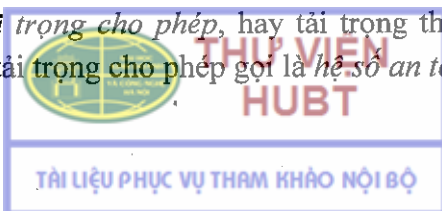
Đối với mẫu thử kéo (nén) làm từ vật liệu nhất định, thí nghiệm thực hiện trên các máy thử cho phép xác định lực tối đa P_U mà mẫu có thể chịu được. Lực tối đa đó gọi là lực tới hạn. Ứng suất nguy hiểm hay *ứng suất bền* khi kéo (nén) của vật liệu xác định bởi:

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \quad (1.12)$$

Tương tự, các thí nghiệm khác (xoắn) có thể thực hiện để xác định ứng suất tiếp tới hạn, hay độ bền tới hạn khi xoắn của vật liệu.

1.6.2. Tải trọng cho phép hay ứng suất cho phép. Hệ số an toàn

Tải trọng tối đa mà các thành phần kết cấu có thể chịu được trong điều kiện sử dụng bình thường phải luôn nhỏ hơn tải trọng nguy hiểm. Giá trị lực bé hơn đó gọi là *tải trọng cho phép*, hay tải trọng thực tế. Tỷ số giữa tải trọng nguy hiểm và tải trọng cho phép gọi là *hệ số an toàn (factor of safety)*:



$$\text{Hệ số an toàn} = F.S = \frac{P_U}{P_{\text{all}}} \quad (1.13)$$

$$\text{hay } F.S = \frac{\sigma_U}{\sigma_{\text{all}}} \quad (1.14)$$

Trong thực tế, hệ số an toàn luôn >1 và thay đổi phụ thuộc vào từng yêu cầu thiết kế của kết cấu.

Ví dụ:

Hai lực 50 kN và 15 kN tác dụng lên giá BCD như hình 1.14a. Biết rằng dây điều khiển AB được làm từ thép có ứng suất nguy hiểm bằng 600MPa, hãy xác định đường kính của dây với hệ số an toàn bằng 3,3. Chốt C cũng được làm từ thép với ứng suất tiếp nguy hiểm là 350MPa. Xác định đường kính của chốt C với hệ số an toàn cũng bằng 3,3, tính bề dày của ổ đỡ tại C, biết ứng suất cho phép của thép là 300MPa.

Giải :

Giải phóng liên kết (hình 1.14b) :

Phản lực liên kết tại C gồm các thành phần C_x và C_y , lực P kéo dây AB xác định từ hệ phương trình cân bằng tĩnh học:

$$\sum M_C = 0; P.(0,6m) - (50 \text{ kN})(0,3m) - (15 \text{ kN})(0,6m) = 0 \Rightarrow P = 40 \text{ kN};$$

$$\sum F_x = 0; C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0; C_y = 65 \text{ kN}; C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76,3 \text{ kN}$$

Xét dây AB :

Ứng suất cho phép bằng:

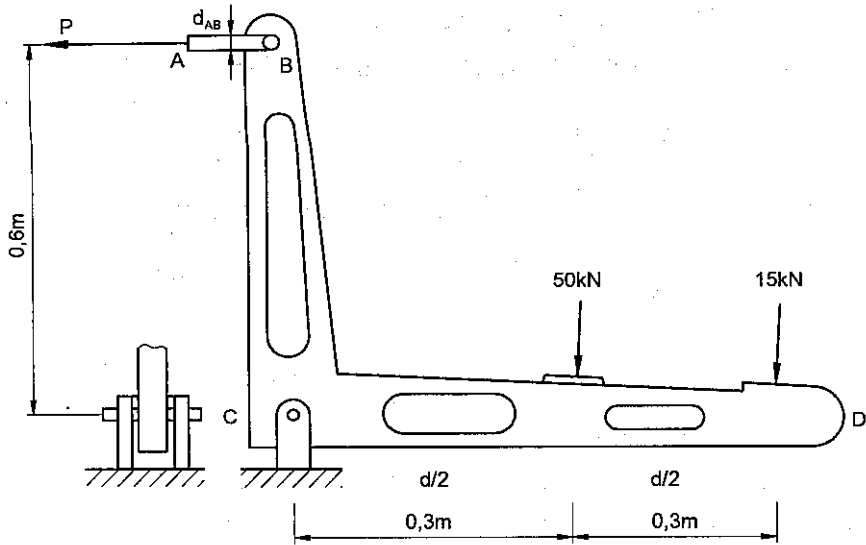
$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_U}{F.S} = \frac{600 \text{ MPa}}{3,3} = 181,8 \text{ MPa};$$

Thay $P = 40 \text{ kN}$, diện tích cho phép của mặt cắt ngang dây là:

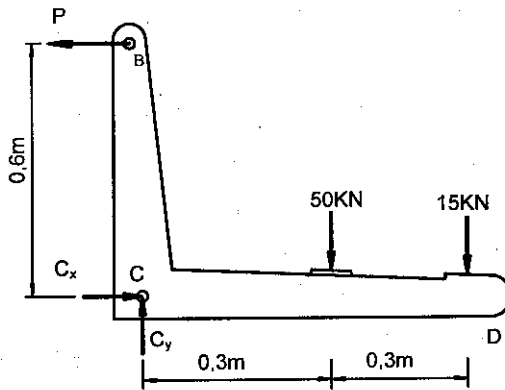
$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{40 \text{ kN}}{181,8 \text{ MPa}} = 220. 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\text{Hay } \frac{\pi}{4} d^2 = 220. 10^{-6} \text{ m}^2; d_{AB} = 16,74 \text{ mm}$$

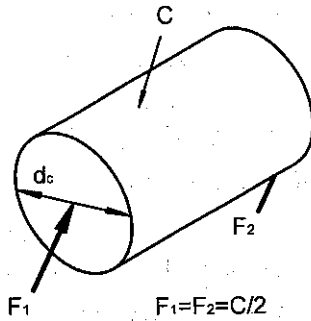
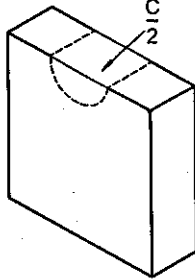
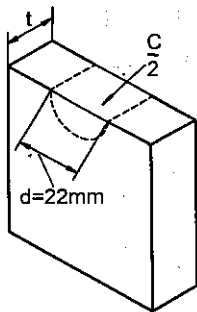




a)



b)



d)

c)

Hình 1.14

THƯ VIỆN HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Ứng suất tiếp tại chốt C (hình 1.14c):

Với hệ số an toàn bằng 3,3, ta có ứng suất tiếp cho phép:

$$\tau_{\text{all}} = \frac{\tau_U}{F.S} = \frac{350\text{MPa}}{3,3} = 106,1 \text{ MPa};$$

Do chốt C gắn với ổ đỡ đôi (hình 1.14c,d) nên ta có :

$$A = \frac{C}{2\tau_{\text{all}}} = 76,3\text{kN} / 2.106,1\text{MPa} = 360\text{mm}^2;$$

Do đó : $\frac{\pi}{4}d^2 = 360\text{mm}^2$; $d_C = 21,4\text{mm}$ (chọn $d_C = 22\text{mm}$).

Ổ đỡ C (hình 1.14d) :

Sử dụng $d_C = 22\text{mm}$, diện tích mặt cắt ngang của ổ đỡ là 22t. Do lực tác động lên mỗi ổ là C/2 và ứng suất cho phép của ổ là 300MPa, ta có :

$$A = \frac{C}{2\sigma_{\text{all}}} = 76,3\text{kN} / 2.300\text{MPa} = 127,2\text{mm}^2.$$

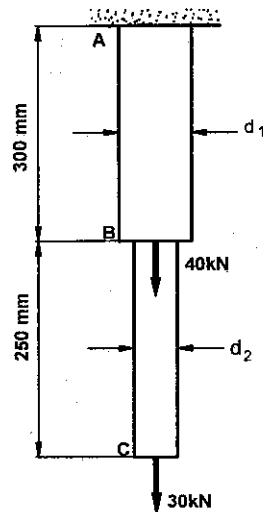
Vậy : $22t = 127,2\text{mm}^2$; $t = 5,78\text{mm}$ (chọn $t = 6\text{mm}$).

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Hai thanh hình trụ AB và BC được hàn tại B và chịu lực như hình BT1.1. Biết đường kính $d_1 = 50\text{mm}$; $d_2 = 30\text{mm}$, tìm ứng suất pháp tại mặt cắt ở giữa thanh AB, BC. Tính độ dẫn dài tại mặt cắt B, C, cho biết môđun đàn hồi $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

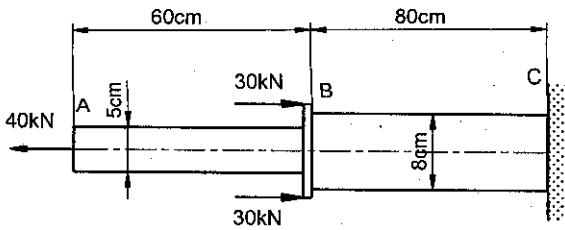
1.2. Hai thanh hình trụ AB và BC được hàn tại B và chịu lực như hình BT1.2. Tìm ứng suất pháp tại mặt cắt ở giữa thanh AB, BC. Tính độ dẫn dài tại mặt cắt B, A, cho biết môđun đàn hồi $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

1.3. Thanh BD có diện tích mặt cắt ngang 800mm^2 liên kết khớp với thanh gấp khúc ABC (hình BT1.3). Xác định giá trị của lực P sao cho ứng suất pháp trên mặt cắt của BD là 50MPa.

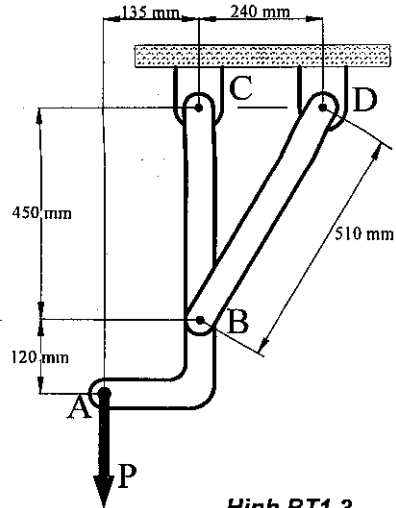


Hình BT1.1



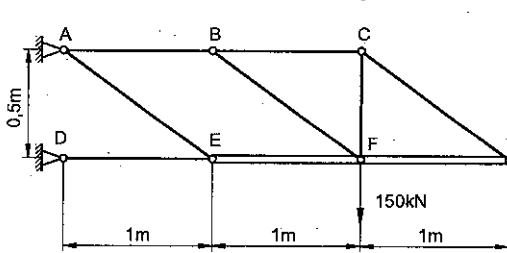


Hình BT1.2

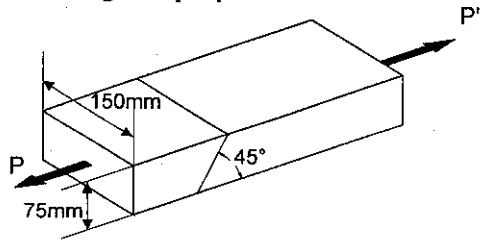


Hình BT1.3

1.4. Thanh tuyệt đối cứng EFG được đỡ bởi hệ dầm như hình BT1.4. Biết thanh CG có mặt cắt ngang tròn đường kính 2cm, xác định ứng suất pháp trên thanh CG .



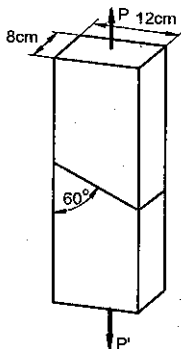
Hình BT1.4



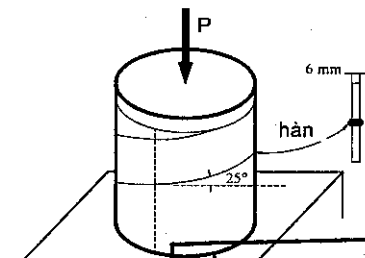
Hình BT1.5

1.5. Hai đoạn thanh bằng gỗ có mặt cắt ngang chữ nhật được ghép dán bằng keo theo mặt nghiêng như hình BT1.5. Biết $P = P' = 11\text{ kN}$, xác định ứng suất pháp và tiếp trên bề mặt nối ghép.

1.6. Lực $P = 140\text{ kN}$ tác dụng lên thanh được nối ghép bởi hai đoạn gỗ theo mặt nghiêng như hình BT1.6. Xác định ứng suất pháp và tiếp trên bề mặt nối ghép.



Hình BT 1.6



Hình BT 1.7

THƯ VIỆN HUBT

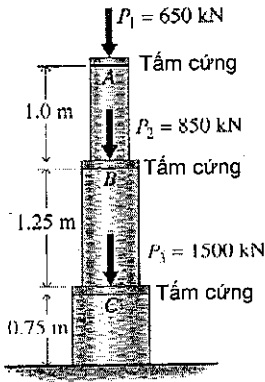
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH DOANH VÀ CÔNG NGHỆ HÀ NỘI

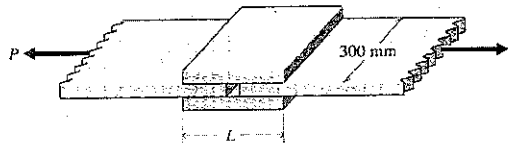
THƯ VIỆN

1.7. Ống trụ bằng thép có đường kính 300mm được làm từ tấm mỏng có bề dày 6 mm, và hàn theo đường nghiêng một góc 25° với mặt phẳng vuông góc với trục của ống (hình BT1.7). Biết lực $P = 250\text{kN}$ tác dụng dọc trục ống, xác định ứng suất pháp và tiếp theo các phương pháp tuyến và tiếp tuyến với chỗ hàn.

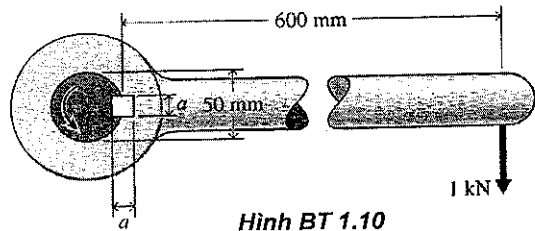
1.8. Hệ ống thép chịu liên kết và ngoại lực như hình BT1.8. Nếu ứng suất pháp trên mỗi ống không được vượt quá 150MPa, xác định diện tích mặt cắt ngang của mỗi ống?



Hình BT 1.8



Hình BT 1.9



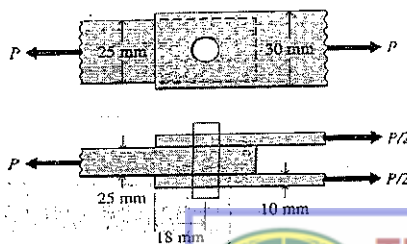
Hình BT 1.10

1.9. Hai đoạn thanh bằng nhựa được gắn vào nhau như hình BT1.9. Ứng suất tiếp của keo dán không được vượt quá 950MPa. Hỏi chiều dài L của mỗi ghép phải bằng bao nhiêu để chịu được lực bằng 50kN?

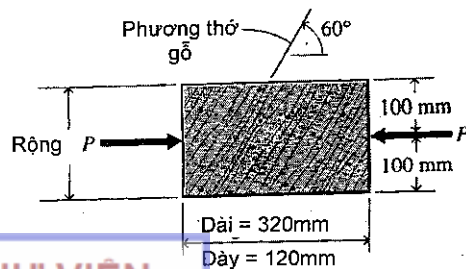
1.10. Tay quay được gắn với trục truyền của một cửa quay bằng thép bởi ổ khóa hình vuông như hình BT1.10. Nếu ứng suất tiếp của khóa không được vượt quá 125MPa, xác định kích thước nhỏ nhất a có thể sử dụng, nếu chiều dài của ổ khóa là 20mm.

1.11. Ba tấm mỏng được ghép bởi chốt có đường kính 12mm như hình BT1.11. Xác định giá trị lớn nhất của lực kéo P, nếu:

- Ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt chỗ ghép không vượt quá 350MPa
- Ứng suất giữa tấm và chốt không vượt quá 650MPa
- Ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt chốt không vượt quá 240MPa
- Độ bền cắt khi khoét lỗ của vật liệu tại tấm trên và tấm đáy là 300Mpa.



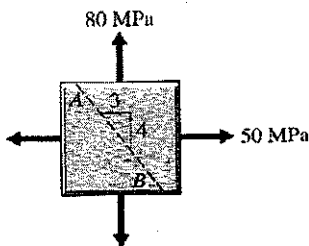
Hình 1.11



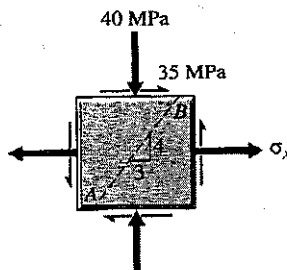
Hình 1.12

1.12. Xác định lực dọc trục P lớn nhất có thể tác dụng lên khối gỗ chịu nén như hình BT1.12, nếu đòi hỏi ứng suất tiếp song song với thớ gỗ không vượt quá $13,60\text{MPa}$, và ứng suất tiếp lớn nhất của khối gỗ không vượt quá $8,75\text{MPa}$.

1.13. Các ứng suất tác dụng lên phần tử tại một điểm của vật thể như hình BT1.13. Xác định ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng AB .



Hình BT 1.13



Hình BT 1.14

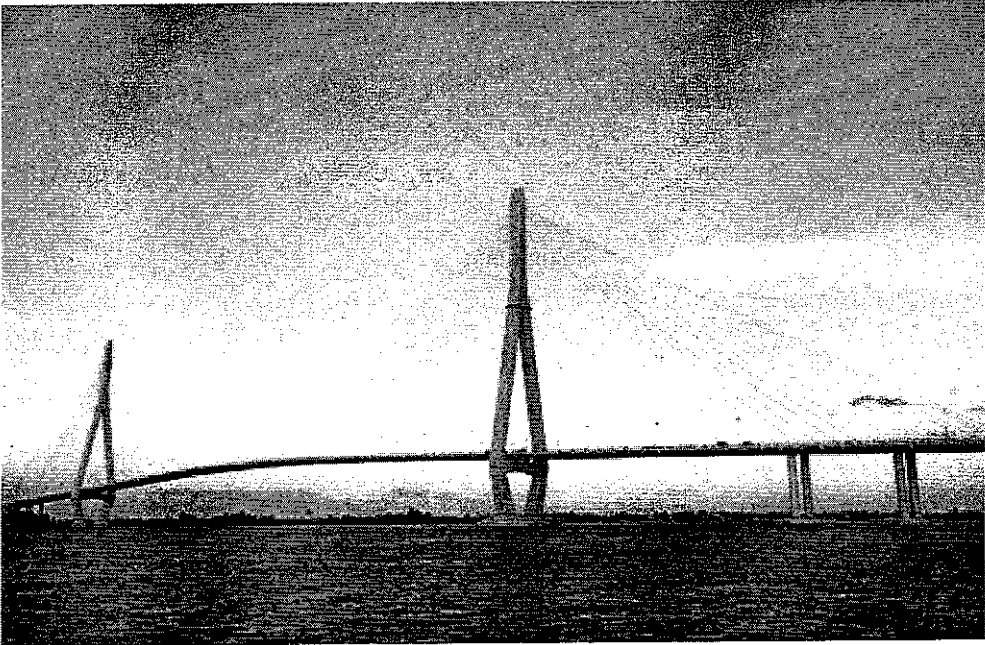
1.14. Tại một điểm của kết cấu chịu lực, ứng suất pháp và tiếp trên mặt phẳng ngang và thẳng đứng như hình BT1.14, biết ứng suất pháp trên mặt nghiêng AB là 25MPa (kéo). Xác định :

- Ứng suất pháp σ_x trên mặt phẳng đứng.
- Độ lớn và chiều của ứng suất tiếp trên mặt nghiêng AB .

Chương 2

ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG HỆ CHỊU TẢI TRỌNG ĐỌC TRỰC

2.1. KHÁI NIỆM



Hình 2.1. Cầu dây văng Cần Thơ có nhịp chính dài nhất Đông Nam Á (550m)

Trong chương 1 ta đã phân tích ứng suất trên các thành phần chịu lực của kết cấu và liên kết giữa chúng. Ta cũng đã tìm hiểu thiết kế chúng sao cho không bị phá hủy dưới tác dụng của tải trọng cho trước. Nhiệm vụ này còn được gọi là *kiểm tra điều kiện bền*. Một vấn đề khác rất quan trọng là cần xác định *biến dạng* của vật thể dưới tác dụng của ngoại lực. Trong chương này ta sẽ đề cập tới biến dạng của kết cấu chịu tác dụng của lực dọc trục (ví dụ: dây cáp của cầu dây văng (hình 2.1) chịu tác dụng của lực dọc trục, bỏ qua ảnh hưởng của tải trọng gió). Rõ ràng ta cần tránh không cho

vật thể chịu biến dạng lớn, để bảo đảm kết cấu có thể thực hiện tốt chức năng hoạt động và sử dụng. Ta sẽ chấp nhận giả thuyết về vật liệu có *tính đàn hồi*, có nghĩa là biến dạng là vô cùng bé so với kích thước của vật thể. Từ biến dạng, ta có thể xác định được ứng suất trong vật thể chịu tác dụng của ngoại lực.

Biến dạng dài tỷ đối ϵ là tỷ số giữa biến dạng dài tương đối và độ dài ban đầu. Vẽ đồ thị liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng ϵ khi chịu tác dụng của ngoại lực, ta thu được *biểu đồ ứng suất – biến dạng*. Dựa vào biểu đồ đó, ta có thể xác định các đặc trưng cơ học khác nhau của vật liệu như : *môđun đàn hồi*, và ứng suất phá hủy của *vật liệu dẻo và giòn*.

2.2. BIẾN DẠNG DÀI TRONG THANH CHỊU LỰC DỌC TRỰC

Xét một thanh có chiều dài L chịu kéo bởi lực P . Ký hiệu biến dạng dài tỷ đối là ϵ , ta có :

$$\epsilon = \frac{\delta}{x} \quad (2.1)$$

Trong đó : δ là biến dạng dài tương đối của đoạn thanh có chiều dài là x (hình 2.2).

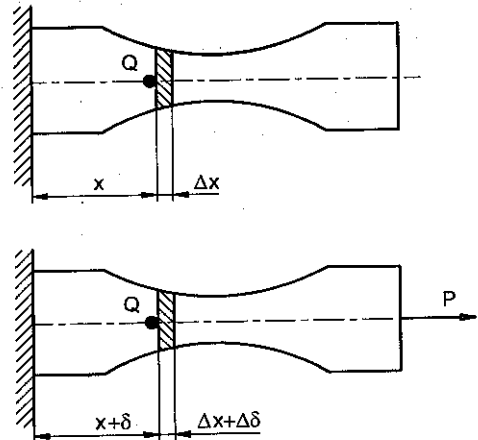
Gọi $\Delta\delta$ là biến dạng dài của phần tử có chiều dài Δx , ta có biến dạng dài tại điểm Q xác định bởi công thức:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (2.2)$$

Giả sử thanh có chiều dài ban đầu $L = 0,6 \text{ m}$ và mặt cắt ngang không đổi, độ giãn dài $\Delta L = 150 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, khi đó ta có biến dạng dài tỷ đối là:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = 150 \cdot 10^{-6} \text{ m} / 0,6 \text{ m} = 250 \cdot 10^{-6}$$

Trên thực tế, biến dạng dài tỷ đối thường được biểu diễn bằng %. Trong ví dụ trên, thanh có sự thay đổi chiều dài bằng : $250 \cdot 10^{-6} \cdot 100\% = 0,025\%$.

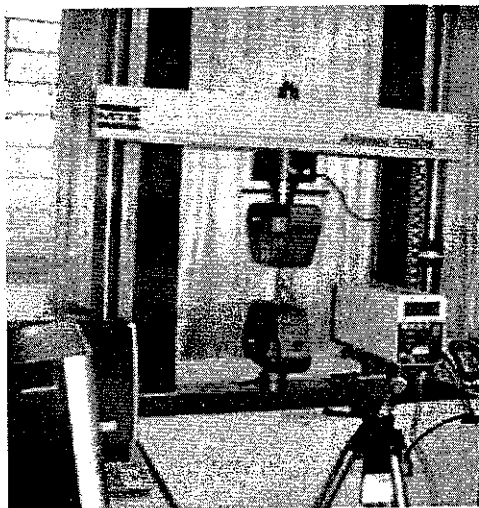


Hình 2.2

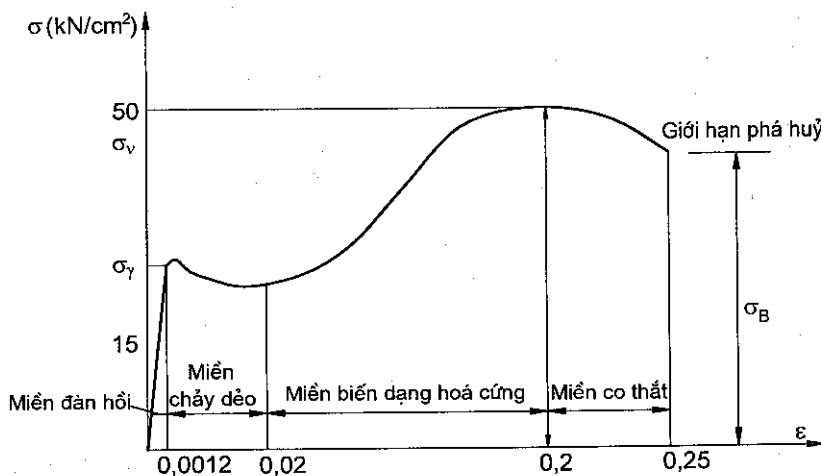
2.3. BIỂU ĐỒ ỨNG SUẤT – BIẾN DẠNG

Để thu được biểu đồ ứng suất - biến dạng, người ta thường thực hiện thí nghiệm kéo trên mẫu thử bằng máy kéo - nén vạn năng (hình 2.3). Kích thước của mẫu thử phải theo tiêu chuẩn của A.S.T.M (American Standard for Testing Materials).

Trên hình 2.4, biểu đồ ứng suất - biến dạng đối với vật liệu thép (còn được gọi là *vật liệu dẻo*, như: đồng, nhôm, dũa-ra...), ta thấy ứng suất hầu như không đổi trong khi biến dạng thay đổi khá lớn sau khi vượt qua *giới hạn chảy* của vật liệu. Tiếp theo đó ứng suất tăng lên, làm cho mẫu tiếp tục dài ra cho đến khi đạt được giá trị tới hạn của ứng suất (trương ứng khi mẫu bị đứt). Ta có thể chia quá trình biến dạng thành 4 giai đoạn (hoặc 4 miền): *đàn hồi*, *chảy*, *biến dạng hóa cứng*, và *co thắt*.



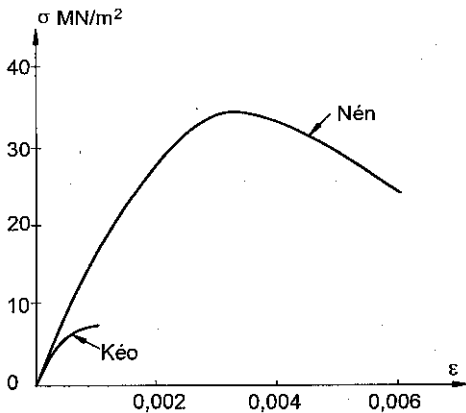
Hình 2.3. Máy kéo nén vạn năng MTS-300



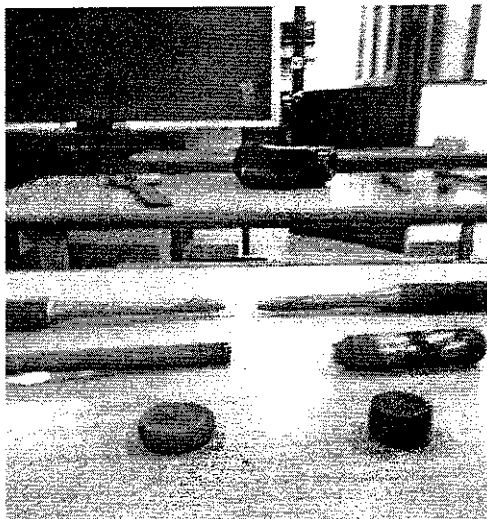
Thép cacbon thấp

Hình 2.4. Biểu đồ ứng suất - biến dạng của vật liệu dẻo

Đối với vật liệu giòn, ví dụ như : gang, gốm, thủy tinh, đá, bê tông,... biểu đồ ứng suất – biến dạng khi kéo khác với khi nén (hình 2.5). Ta thấy không có sự phân biệt giữa độ bền lớn nhất và độ bền khi phá hủy (không thấy sự co thắt rõ ràng của mặt cắt ngang đối với vật liệu giòn). Đồng thời sự phá hủy của vật liệu giòn nhanh hơn so với vật liệu dẻo. Mặt khác, ứng suất phá hủy khi nén của vật liệu giòn lớn hơn so với khi kéo (khoảng 3–4 lần). Trên hình 2.6 có thể quan sát thấy các mẫu thử bằng thép và gang khi chịu kéo và nén sau biến dạng.



Hình 2.5



Hình 2.6

2.4. ĐỊNH LUẬT HÚC, MÔĐUN ĐÀN HỒI, HỆ SỐ POẮT-XÔNG

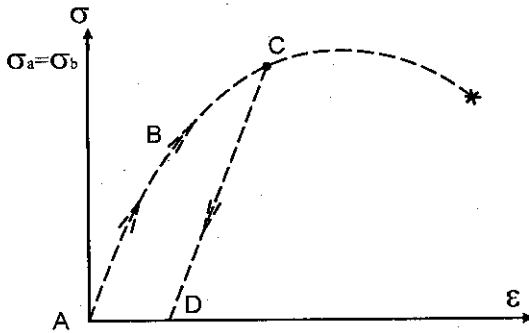
Từ hình 2.4, trên đoạn thứ nhất của biểu đồ, ta thấy ứng suất σ tỷ lệ bậc nhất theo biến dạng ϵ , do đó :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.3)$$

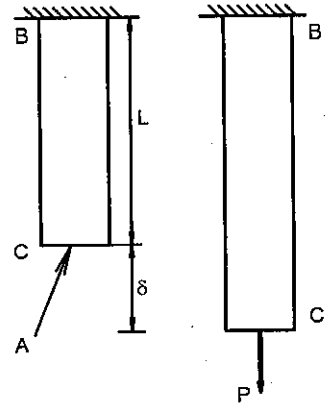
Biểu thức liên hệ đó gọi là *định luật Húc* (Robert Hooke, 1635–1703). hệ số E gọi là *môđun đàn hồi* của vật liệu (Thomas Young, 1773–1829). Đơn vị của E giống như đơn vị của ứng suất (Pa, hoặc N/m^2). Giá trị lớn nhất của ứng suất khi sử dụng định luật Húc gọi là *giới hạn tỷ lệ* của vật liệu.

Đối với vật liệu dẻo, khi lực tác dụng vượt quá giới hạn tỷ lệ, vật liệu làm việc trong miền chảy dẻo, khi ta hạ tải trọng tác dụng lên vật liệu, sẽ xuất hiện *biến dạng dư, hay biến dạng dẻo* (đoạn AD trên hình 2.7).



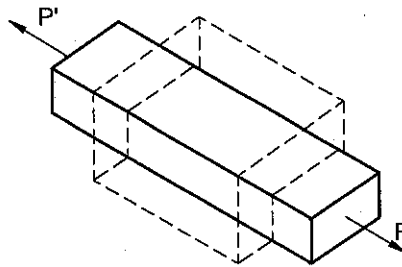


Hình 2.7



Hình 2.8

Khi thanh mảnh chịu tác dụng của lực dọc trục (hình 2.8), ứng suất toàn phần tuân theo định luật Húc khi chưa đạt đến giới hạn tỷ lệ. Ta còn quan sát thấy sự co thắt của mặt cắt ngang (hình 2.9).



Hình 2.9

Do vật liệu là đồng nhất đẳng hướng, độc lập theo vị trí cũng như theo các phương, ta có : $\epsilon_y = \epsilon_z$. Thành phần trên gọi là *biến dạng ngang*, và phụ thuộc vào hệ số Poát-xông ν (Denis Poisson 1781–1840):

$$\nu = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (2.4)$$

Dấu (-) trong công thức trên chỉ sự trái dấu của biến dạng dài và biến dạng ngang. Hệ số Poát-xông là đại lượng không thứ nguyên và luôn nhỏ hơn 1/2 trong miền đàn hồi. Từ (2.3) ta có thể viết phương trình của biến dạng dưới tác dụng của tải trọng dọc theo trục x:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon_y = \epsilon_z = \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5)$$

Nhắc lại rằng biến dạng dài tỷ đối xác định theo (2.1), ta có thể xác định độ dẫn dài của thanh L chịu lực dọc trục P theo công thức:

$$\Delta L = \varepsilon L = \frac{PL}{AE} \quad (2.6)$$

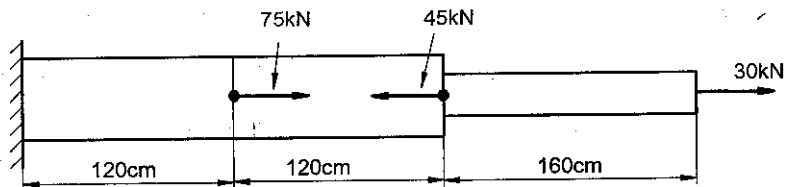
Nếu thanh gồm nhiều đoạn có mặt cắt ngang và vật liệu khác nhau (nội lực, mặt cắt ngang và vật liệu như nhau trên mỗi đoạn), ta có độ giãn dài toàn phần xác định bởi:

$$\Delta L = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (2.7)$$

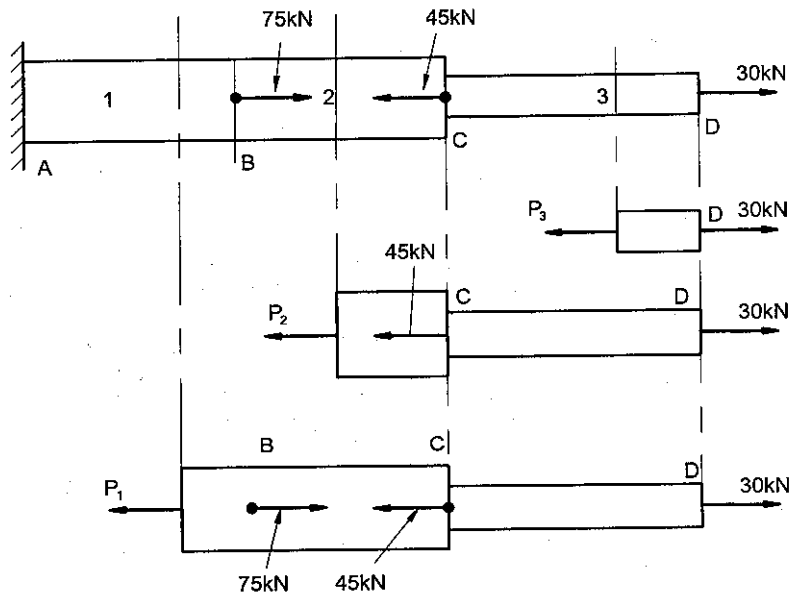
Khi thanh có mặt cắt ngang thay đổi theo chiều dài, ta có:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{P dx}{AE} = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{P_i dx}{A_i E_i} \quad (2.8)$$

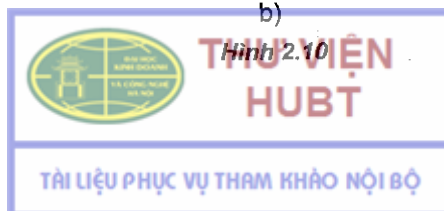
Ví dụ 2.1. Xác định độ giãn dài của thanh bằng thép chịu lực như hình 2.10a, cho $E = 2.10^4 \text{kN/cm}^2$; $L_1 = L_2 = 120\text{cm}$; $L_3 = 160\text{cm}$; $A_1 = A_2 = 9\text{cm}^2$; $A_3 = 3\text{cm}^2$.



a)



b)



Giải : Sử dụng các mặt cắt chia thanh làm 3 đoạn (hình 2.10b), xét sự cân bằng của từng đoạn ta có:

$$P_1 = 60\text{kN}; P_2 = -15\text{ kN}; P_3 = 30\text{kN}$$

Thay các giá trị tìm được vào (2.7), ta có:

$$\Delta L = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}}{E} = 11 \cdot 10^{-2} \text{cm}.$$

2.5. TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC PHỨC TẠP. ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

Bây giờ ta xét một phân tử của hệ chịu tải trọng tác dụng *theo phương của các trục tọa độ*, gây nên các ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, khác không. Trường hợp này gọi là tải trọng tác dụng *đa chiều*, chú ý rằng đây không phải là trường hợp tổng quát của ứng suất, do không có các thành phần ứng suất tiếp.

Theo *nguyên lý cộng tác dụng*, ta có thể xác định biến dạng tương ứng với trường hợp tải trọng theo 3 phương là:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \end{aligned} \quad (2.9)$$

Các biểu thức trong (2.9) được gọi là *Định luật Húc tổng quát* đối với tải trọng đa chiều, áp dụng cho vật liệu đồng nhất và đẳng hướng.

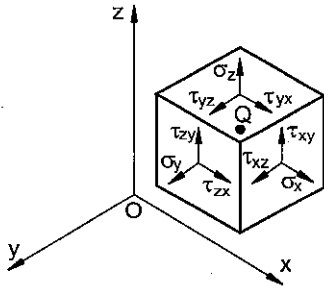
$$\text{Hệ số } e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} \quad (2.10)$$

Hệ số e được gọi là *biến đổi thể tích tỷ đối*, còn hệ số:

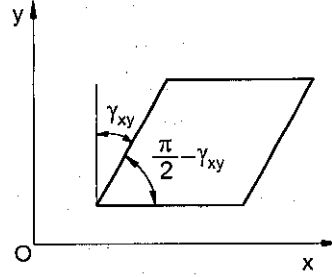
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.11)$$

gọi là *môđun nén khối* của vật liệu.





Hình 2.11



Hình 2.12

Ta xét trạng thái chịu lực tổng quát của phân tử (hình 2.11). Trong trường hợp này, ứng suất tiếp sẽ làm cho phân tử hình lập phương bị thay đổi hình dạng và trở thành hình hộp nghiêng. Trong mặt phẳng xoy, ta thấy trên hình 2.12, hình vuông ban đầu trở thành hình thoi, và góc tạo thành sau biến dạng sẽ bằng $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$. Đại lượng γ_{xy} gọi là *biến dạng góc tương đối* (biến dạng trượt). Đối với vật liệu đồng nhất, định luật Húc áp dụng cho ứng suất tiếp và biến dạng trượt biểu diễn theo công thức :

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}; \tau_{yz} = G \gamma_{yz}; \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (2.12)$$

Hệ số G gọi là môđun trượt, đơn vị giống như của ứng suất và phụ thuộc vào vật liệu. Môđun trượt liên hệ với môđun đàn hồi E và hệ số Poát-xông ν bởi công thức :

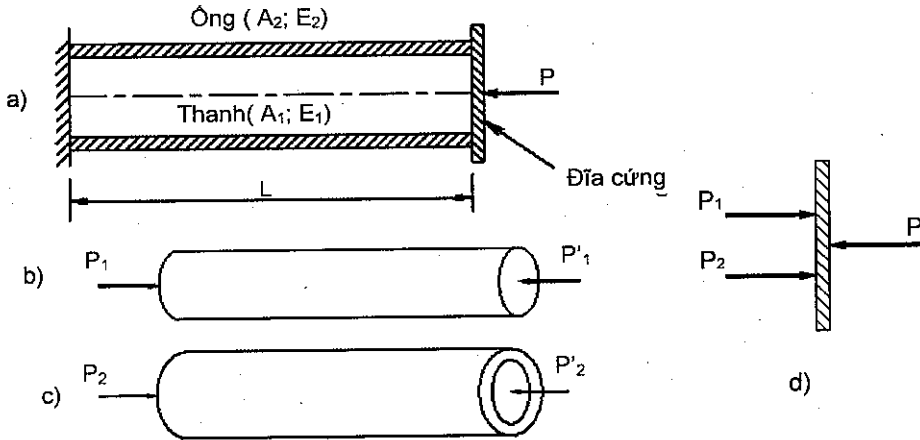
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.13)$$

Tập hợp (2.9) và (2.12), ta thu được các biểu thức của định luật Húc tổng quát cho trường hợp ứng suất phức tạp.

2.6. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Trong nhiều bài toán, nội lực không thể xác định được từ riêng các phương trình cân bằng tĩnh học. Thực tế, các phản lực liên kết (hay ẩn số) không thể xác định được từ việc giải phóng liên kết và xét sự cân bằng của một phần hệ. Bài toán đó gọi là *bài toán siêu tĩnh* và cần bổ sung thêm các phương trình biểu diễn điều kiện *tương thích biến dạng*, phụ thuộc vào hình học của hệ.

Ví dụ 2.2: Một thanh có chiều dài L , mặt cắt ngang A_1 , môđun đàn hồi của vật liệu E_1 đặt vào trong một ống có cùng chiều dài, mặt cắt ngang A_2 , môđun đàn hồi E_2 (hình 2.13a). Tìm biến dạng dài của ống và của thanh khi chịu lực P tác dụng lên đĩa cứng tuyệt đối ở đầu thanh?



Hình 2.13

Giải: Gọi P_1 và P_2 là nội lực tương ứng trong thanh và trong ống, ta có thể tách hệ thành 3 thành phần (hình 2.13b, c, d). Từ sơ đồ cuối (hình 2.13d), ta có phương trình cân bằng: $P_1 + P_2 = P$ (2.13)

Rõ ràng một phương trình cân bằng không đủ để xác định P_1 và P_2 . Từ điều kiện thanh và ống được liên kết cứng tại đĩa, do đó các biến dạng dài của chúng phải bằng nhau: $\Delta L_1 = \Delta L_2$, áp dụng công thức (2.6) ta có:

$$\Delta L_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} ; \Delta L_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2} \quad (2.14)$$

$$\text{Hay : } \frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2} \quad (2.14')$$

Giải hệ (2.13) và (2.14') ta thu được:

$$P_1 = \frac{P A_1 E_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} ; P_2 = \frac{P A_2 E_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (2.15)$$

Từ đó ta có thể tính biến dạng dài của thanh và ống bằng cách thế (2.15) vào (2.14): $\Delta L = \frac{P L}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$



2.7. BIẾN DẠNG DO ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Nếu nhiệt độ của thanh có chiều dài L thay đổi một lượng là ΔT , thanh sẽ giãn dài (co lại) một lượng bằng:

$$\Delta L^{(T)} = \alpha \cdot (\Delta T) \cdot L \quad (2.16)$$

Trong đó α là hệ số giãn nở vì nhiệt, đơn vị là $1/C^0$

Thay thế $\Delta L^{(T)}$ vào biểu thức (2.1) (với $x = L$; $\delta = \Delta L$), ta rút ra biến dạng dài tỷ đối của thanh do nhiệt độ là:

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot (\Delta T) \quad (2.17)$$

Từ (2.17), ta thấy không có ứng suất gây nên do biến dạng bởi nhiệt độ (nếu thanh có hai đầu tự do).

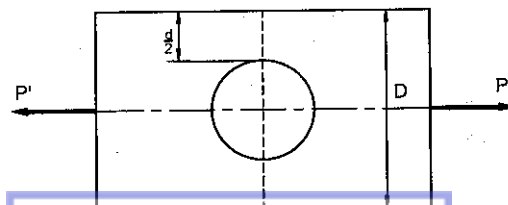
2.8. HIỆN TƯỢNG TẬP TRUNG ỨNG SUẤT

Trong trường hợp thành phần chịu lực của kết cấu có sự gián đoạn về kích thước, như bị khoét lỗ hoặc mặt cắt ngang thay đổi đột ngột, ứng suất có thể tập trung cao gần chỗ bị gián đoạn. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng *tập trung ứng suất*, đóng một vai trò quan trọng trong quá trình thiết kế.

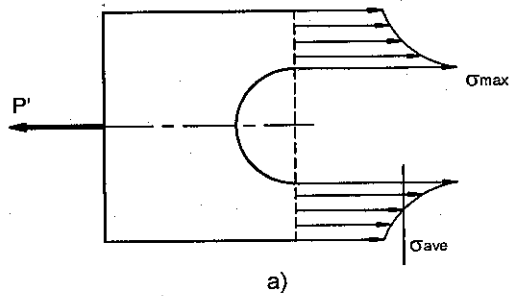
Hình 2.14 biểu diễn một tấm mỏng với lỗ tròn tại giữa tấm, ta thấy ứng suất phân bố gần mép lỗ cao hơn đáng kể so với nơi khác. Kết quả này có thể rút ra từ thực nghiệm hoặc từ Lý thuyết đàn hồi (S.P Timoshenko & Goudier, *Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill Book Com., N.Y 1953):

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{tb}} \quad (2.18)$$

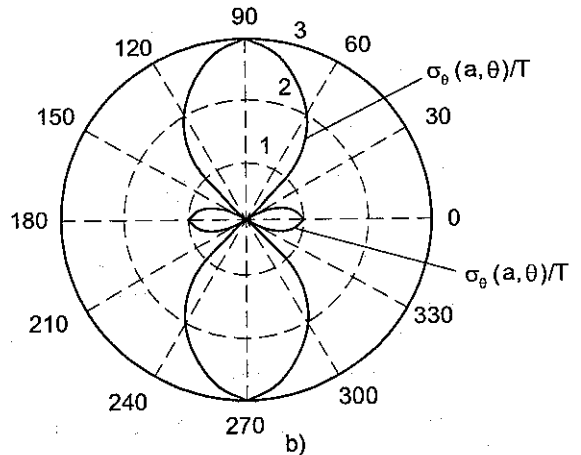
Trong đó: σ_{\max} là ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang; σ_{ave} là ứng suất trung bình tại chỗ hẹp nhất của mặt cắt; K gọi là hệ số tập trung ứng suất. Hệ số này phụ thuộc vào tỷ số r/d , với r là bán kính lỗ, d là hai lần khoảng cách từ đường bao của lỗ đến chiều dài tấm, tỷ số đó càng tăng thì K càng giảm.



Đối với tấm ghép từ nhiều mảnh có bề rộng khác nhau, K phụ thuộc vào D/d , trong đó D là bề rộng lớn nhất, d là bề rộng nhỏ nhất. Khi D/d càng tăng, hệ số K càng lớn. Do đó sự chênh lệch về chiều rộng của tấm càng làm tăng hiện tượng tập trung ứng suất.



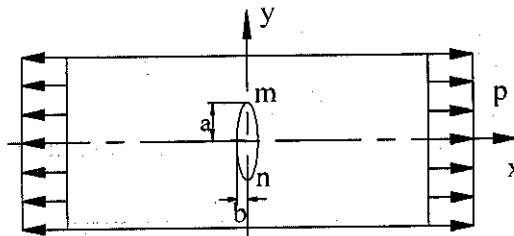
Trên hình 2.15a biểu diễn sự phân bố ứng suất theo chiều rộng của tấm chịu kéo theo chiều dài. Hình 2.15b cho thấy sự phân bố ứng suất pháp σ_θ theo góc cực θ trên mép lỗ tròn bán kính a của tấm chịu kéo bởi lực P theo phương x . Ta thấy rõ tại mép trên và dưới của lỗ, ứng suất đạt giá trị gấp 3 lần so với tại mép lỗ theo phương ngang. Do đó hệ số $K=3$ đối với trường hợp lỗ tròn.



Hình 2.15

Nếu lỗ có hình elíp với bán trục lớn a , bán trục nhỏ b , chịu lực theo phương song song với bán trục nhỏ (hình 2.16), ta có công thức:

$$\sigma_{\max} = p \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2.20)$$



Hình 2.16

Từ (2.20) ta thấy lỗ càng hẹp ($a \gg b$), hiện tượng tập trung ứng suất càng lớn, dễ gây nên sự phá hủy kết cấu. Hiện tượng đó cần đặc biệt chú ý trong các kết cấu vỏ ô tô, tàu thủy, máy bay,... khi yêu cầu thiết kế đòi hỏi phải khoét lỗ trên các tấm vì mục đích lắp ráp hay sử dụng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Dây thép có chiều dài 60m chịu lực kéo 6kN. Biết môđun đàn hồi của vật liệu $E = 200\text{GPa}$ và chiều dài dây thay đổi một đoạn 48mm, xác định :

- Đường kính nhỏ nhất của dây;
- Ứng suất tương ứng của dây.

2.2. Một ống bằng gang chịu tải trọng nén. Biết môđun đàn hồi $E = 69\text{GPa}$ và biến dạng dài lớn nhất là 0,025%, xác định :

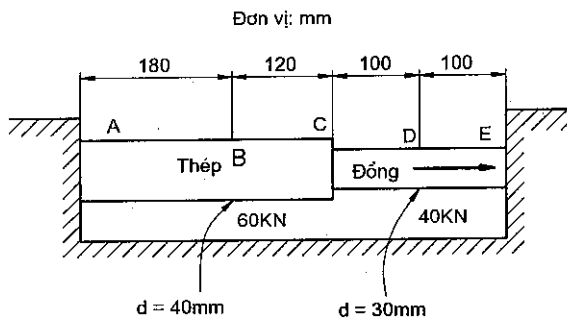
- Ứng suất pháp lớn nhất trong ống;
- Bề dày nhỏ nhất của thành ống, nếu lực nén bằng 7,2kN và đường kính ngoài của ống là 50mm.

2.3. Một thanh nhôm mặt cắt ngang hình vuông có độ dẫn dài không được vượt quá 1,4mm khi chịu kéo. Biết $E = 70\text{GPa}$ và ứng suất cho phép khi kéo là 120MPa, xác định:

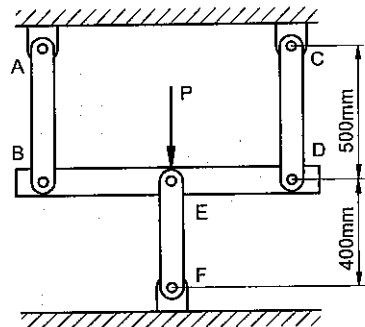
- Chiều dài lớn nhất cho phép của thanh;
- Kích thước cho phép của mặt cắt ngang, nếu lực kéo bằng 28kN.

2.4. Hai ống hình trụ, một ống bằng thép, ống kia bằng đồng được ghép vào nhau tại C và bị hạn chế bởi hai đầu liên kết cứng tuyệt đối tại A và B (hình BT2.4). Biết $E_s = 200\text{GPa}$; $E_d = 105\text{GPa}$, xác định:

- Phản lực liên kết tại A và B;
- Biến dạng dài tại C.



Hình BT2.4

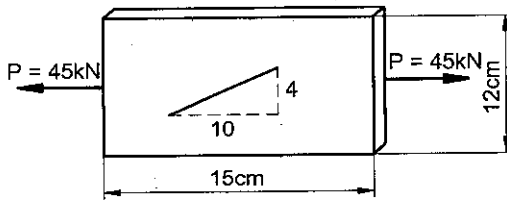


Hình BT2.5

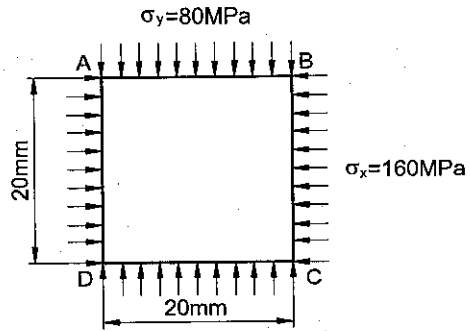
2.5. Ba thanh thép ($E = 200\text{GPa}$) chịu lực $P = 36\text{kN}$ (hình BT2.5). Các thanh AB và CD có diện tích mặt cắt ngang 200mm^2 , còn thanh EF có diện tích 625mm^2 . Xác định:

- Sự thay đổi độ dài của thanh EF;
- Ứng suất pháp trong mỗi thanh.

2.6. Tấm đồng được cán nguội có kích thước như hình BT2.6, bề dày tấm 0,5cm. Xác định hệ số góc sau biến dạng của mặt nghiêng biết hệ số góc trước biến dạng là : 4:10, khi tấm chịu tác dụng của lực dọc trục $P = 45\text{kN}$. Cho $E_d = 105\text{GPa}$, $\nu = 0,33$.



Hình BT2.6

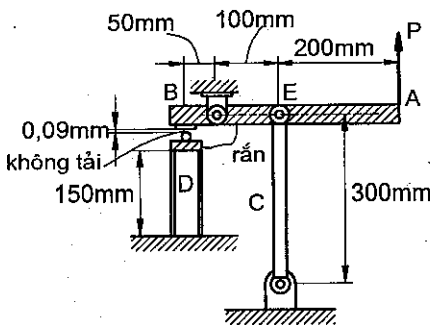


Hình BT2.7

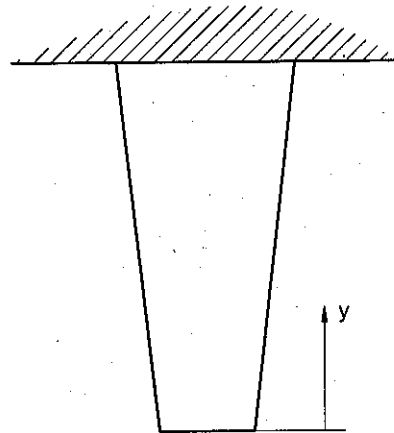
2.7. Một phân tử hình vuông kích thước mỗi cạnh 20 mm được vẽ trên thành của ống thép chịu áp suất bên trong. Sau khi chịu lực, ứng suất trên các cạnh của phân tử như trên hình BT2.7. Xác định sự thay đổi góc (theo %) của đường chéo DB của hình vuông do áp suất gây nên? Cho $E_{th} = 200\text{GPa}$, $\nu = 0,3$.

2.8. Lực P gây nên biến dạng dài của cột thép D là 0,0075mm (hình BT2.8). Xác định:

- Biến dạng dài của thanh nhôm C;
- Biến dạng dài của thanh hợp kim nhôm C nếu có khe hở bằng 0,09mm tại chỗ ghép nối giữa B và D trước khi lực P tác dụng.



Hình BT2.8



Hình BT2.9

2.9. Biến dạng dài của thanh treo có mặt cắt ngang thay đổi theo chiều dài (hình BT2.9), chịu tác dụng của trọng lượng bản thân theo quy luật $\frac{\gamma y}{3E}$, trong đó γ là trọng lượng riêng của vật liệu, y là khoảng cách từ đầu tự do của thanh, và E là môđun đàn hồi của vật liệu, xác định:

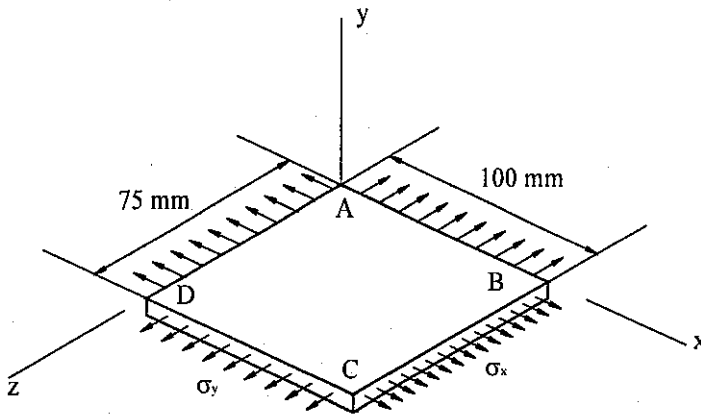
- Sự thay đổi chiều dài của thanh do trọng lượng bản thân.
- Biến dạng dài trung bình của thanh so với chiều dài ban đầu L.
- Biến dạng dài lớn nhất của thanh.

2.10. Một thanh bằng thép chịu nhiệt độ phân bố không đều, gây nên biến dạng dài tỷ lệ với bình phương khoảng cách tới đầu thanh không bị nhiệt độ tác động ($\epsilon = kx^2$). Nếu biến dạng là $1250\mu\text{m/m}$ tại điểm giữa của thanh có chiều dài 3,00m, xác định:

- a) Sự thay đổi chiều dài của thanh do nhiệt độ gây nên;
- b) Biến dạng dài trung bình của thanh so với chiều dài ban đầu L ;
- c) Biến dạng dài lớn nhất của thanh.

2.11. Một tấm vải sử dụng trong kết cấu được bơm căng (dù) chịu tác dụng của các ứng suất theo hai phương như hình BT2.11: $\sigma_x = 120\text{MPa}$; $\sigma_y = 160\text{MPa}$. Biết các đặc trưng của vật liệu vải là: $E = 87\text{GPa}$; $\nu = 0,34$, xác định sự thay đổi chiều dài của:

- a) Cạnh AB; b) Cạnh BC; c) Đường chéo AC.



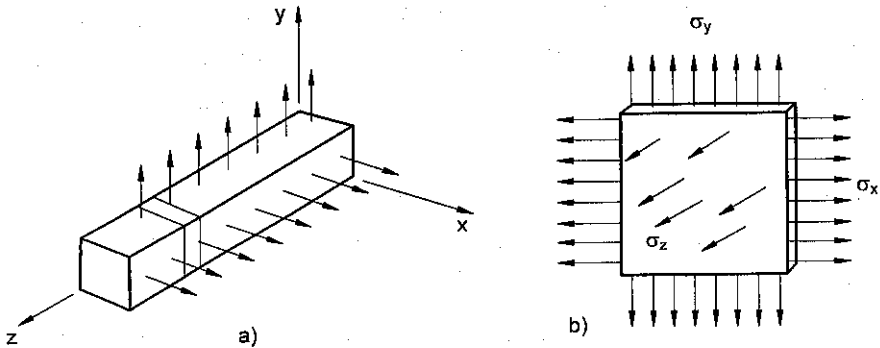
Hình 2.11

2.12. Trong nhiều trường hợp, các liên kết vật lý hạn chế biến dạng xảy ra theo một phương nào đó, ví dụ $\epsilon_z = 0$ khi ống dài chịu tải trọng như hình BT2.12, khi đó không có chuyển vị theo chiều dài tại mọi điểm của ống. Mặt cắt ngang ban đầu phẳng vẫn giữ nguyên là phẳng sau khi chịu lực và cách nhau khoảng cách không đổi. Hãy chỉ ra rằng trong trường hợp đó, được gọi là *trạng thái biến dạng phẳng*, ta có thể biểu diễn σ_z , ϵ_x , và ϵ_y như sau :

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) ; \epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] ;$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

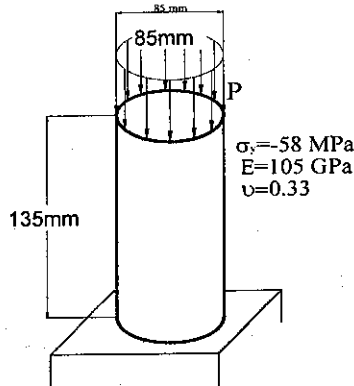




Hình BT2.12

2.13. a) Đối với thanh chịu tải trọng như hình BT2.13, xác định sự thay đổi về chiều cao và thể tích của ống trụ bằng đồng;

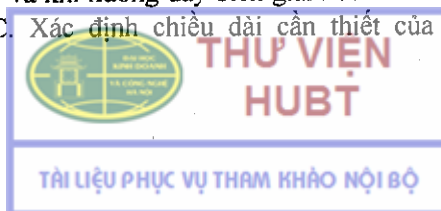
b) Giải phần a) giả thiết rằng tải trọng là áp suất chất lỏng với $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70\text{MPa}$.



Hình BT2.13

2.14. Năm 1989, *Jason* - một thiết bị thăm dò dưới đáy biển có trang bị điều khiển bằng TV, có trọng lượng 35200N được thả xuống độ sâu 644m để chụp và gửi hình ảnh của tàu bị đắm ở ngoài khơi Italia lên tàu chỉ huy trên mặt biển. Thiết bị được treo trên dây cáp bằng thép rỗng có diện tích mặt cắt ngang $452 \cdot 10^{-6}\text{m}^2$, mô đun đàn hồi $E = 200\text{GPa}$. Phần giữa lõi dây chứa dây cáp quang để truyền tín hiệu lên trên mặt biển. Xác định độ giãn dài của dây. Biết rằng sự nổi của dây cáp được bỏ qua, và không kể đến ảnh hưởng của biến dạng sợi cáp quang. (*Jason* chính là thiết bị đã chụp được lần đầu tiên hình ảnh tàu *Titanic* bị đắm năm 1986).

2.15. Năm 1989, hệ thống cáp quang trang bị cho ngành bưu chính viễn thông có thể cung cấp 40.000 cuộc điện thoại cùng một lúc được đặt dưới đáy Thái Bình Dương từ bờ biển California đến Nhật Bản với khoảng cách 13300km. Biết nhiệt độ trung bình trên mặt biển là 22°C và khi xuống đáy biển giảm còn 5°C . Hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu là $75 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Xác định chiều dài cần thiết của dây để đủ khoảng cách 13300km.



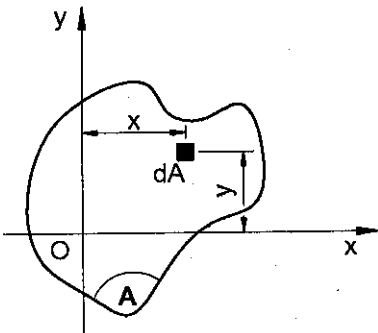
Chương 3

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

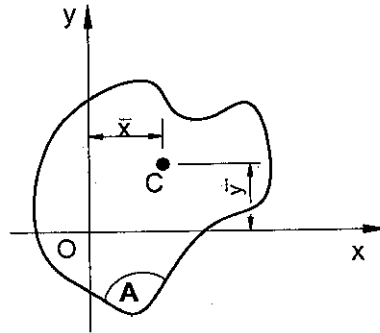
3.1. KHÁI NIỆM

Trong chương 2, ta thấy ứng suất và biến dạng của thanh chịu kéo–nén đúng tâm không phụ thuộc vào hình dạng của mặt cắt mà chỉ phụ thuộc diện tích mặt cắt ngang. Tuy nhiên, đối với thanh chịu các dạng tải trọng khác (uốn, xoắn,...), ứng suất và biến dạng lại phụ thuộc vào hình dạng và cách bố trí mặt cắt ngang. Việc chọn hình dạng cũng như bố trí sắp xếp hợp lý mặt cắt giúp tăng cường độ cứng của thanh, và do đó nâng cao tính chịu lực của kết cấu. Trong chương này ta sẽ xét đến các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang ảnh hưởng đến độ cứng của thanh.

3.2. MÔMEN TĨNH, TRỌNG TÂM CỦA HÌNH PHẪNG



Hình 3.1



Hình 3.2

Xét một hình phẳng diện tích A trong mặt phẳng xy (hình 3.1). Ký hiệu x và y là tọa độ của phần tử diện tích dA , ta định nghĩa mômen tĩnh (hay mômen cấp một) của diện tích A đối với trục x, y tương ứng như sau:

$$Q_x = \int y dA ; \quad Q_y = \int x dA \quad (3.1)$$



Các đại lượng đó có thể có dấu (+), (-) hay bằng 0 phụ thuộc vào vị trí của trục tọa độ, đơn vị của mômen tĩnh là m^3 hay mm^3 .

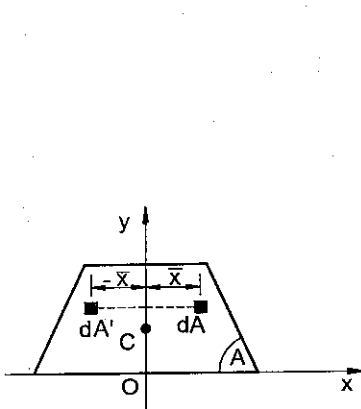
Trọng tâm C của diện tích A có tọa độ \bar{x} và \bar{y} (hình 3.2), xác định bởi công thức:

$$\int_A x dA = A\bar{x} ; \int_A y dA = A\bar{y} \quad (3.2)$$

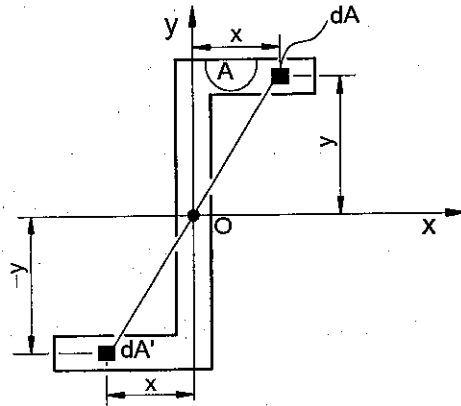
So sánh (3.1) và (3.2) ta thấy sự liên hệ giữa mômen tĩnh và tọa độ trọng tâm:

$$Q_x = A\bar{y} ; Q_y = A\bar{x} \quad (3.3)$$

Nếu hệ trục xy đi qua trọng tâm mặt cắt, ta có $Q_x = Q_y = 0$. Ta gọi hệ trục đó là *hệ trục trung tâm* của mặt cắt ngang.



Hình 3.3



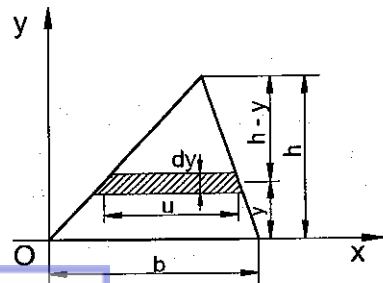
Hình 3.4

Nếu hình phẳng có trục đối xứng (hình 3.3), ta có mômen tĩnh đối với trục đó bằng 0, nếu hình phẳng có tâm đối xứng (hình 3.5), mômen tĩnh đối với trục bất kỳ đi qua tâm đối xứng đều bằng 0. Thật vậy, do mỗi phần tử dA tương ứng với phần tử dA' đối xứng, do tọa độ của chúng là đối nhau nên các tích phân (3.1) bằng 0. Do đó trọng tâm hình phẳng nằm trên trục đối xứng, hoặc trùng với tâm đối xứng.

Ví dụ 3.1:

Cho hình tam giác có đáy b, chiều cao h (hình 3.5). Xác định:

- a) Mômen tĩnh Q_x đối với trục x.
- b) Tung độ trọng tâm \bar{y} của trọng tâm mặt cắt.



Hình 3.5

Giải :

a) *Mômen tĩnh Q_x*

Ta chọn phân tố diện tích là dải hẹp có chiều dài u , chiều dày dy tại điểm cách đáy một khoảng bằng y . Từ quan hệ tam giác đồng dạng ta có:

$$\frac{u}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow u = b \frac{h-y}{h}$$

Hay: $dA = udy = b \frac{h-y}{h} dy$

Mômen tĩnh của hình phẳng đối với trục x bằng:

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^h yb \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy = \frac{b}{h} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$Q_x = \frac{1}{6} bh^2 \quad (3.4)$$

b) *Tung độ trọng tâm.*

Từ (3.3), với $A = \frac{1}{2} bh$, ta có: $Q_x = A\bar{y}$; $\frac{1}{6} bh^2 = \left(\frac{1}{2} bh\right) \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{3} h$

3.3. MÔMEN TĨNH VÀ TRỌNG TÂM CỦA HÌNH GHÉP BỞI NHIỀU HÌNH ĐƠN GIẢN

Xét hình thang có diện tích A , ta có thể phân tích thành các hình đơn giản (hình 3.6). Ta có mômen tĩnh của diện tích A được xác định từ:

$$Q_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \int_{A_2} y dA + \int_{A_3} y dA$$

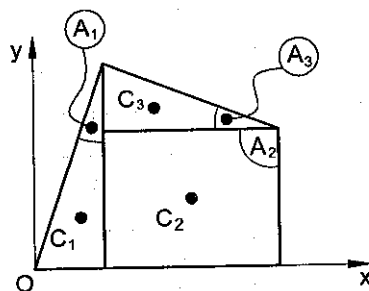
Hay: $Q_x = \sum A_i \bar{y}_i \quad (3.5)$

Trong đó \bar{y}_1 , \bar{y}_2 và \bar{y}_3 là tung độ trọng tâm của các diện tích thành phần A_1 , A_2 , A_3 . Trường hợp tổng quát, ta có:

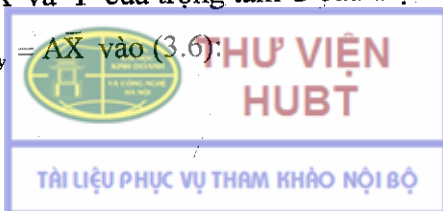
$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i \quad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i \quad (3.6)$$

Để tìm tọa độ \bar{X} và \bar{Y} của trọng tâm C của diện tích A , ta thay

$Q_x = A\bar{Y}$ và $Q_y = A\bar{X}$ vào (3.6):



Hình 3.6

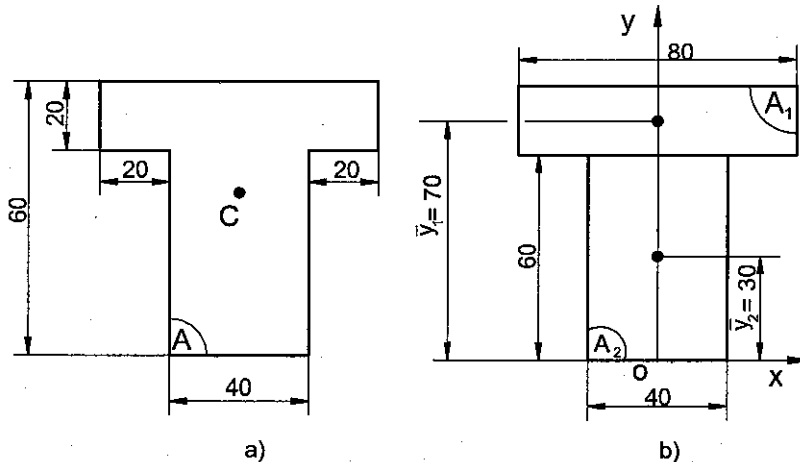


$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i; \quad A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i \quad (3.7)$$

Từ đó có thể xác định được \bar{X} , \bar{Y} :

$$\bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i}; \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \quad (3.8)$$

Ví dụ 3.2: Xác định trọng tâm C của diện tích A (hình 3.7a)



Hình 3.7

Giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình 3.7b và chia hình thành hai hình chữ nhật có diện tích A_1 , A_2 . Do tính đối xứng nên C nằm trên trục Y , hay $\bar{X} = 0$. Ta lập bảng các giá trị của diện tích và trọng tâm của các hình thành phần:

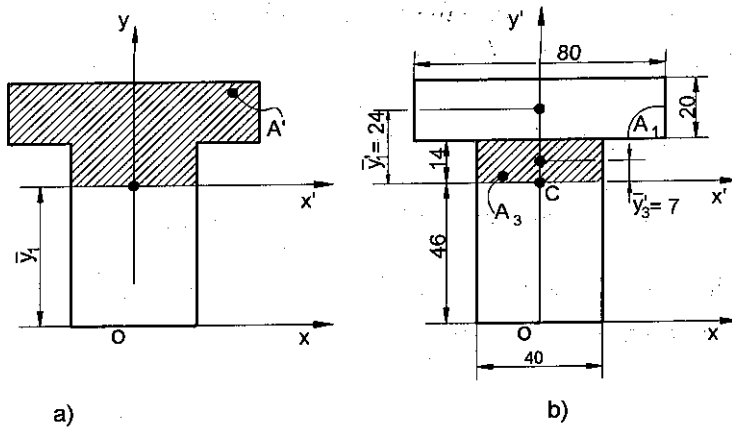
Diện tích, mm ²		\bar{y}_i , mm	$A_i \bar{y}_i$, mm ³
A_1	$(20)(80) = 1600$	70	112×10^3
A_2	$(40)(60) = 2400$	30	072×10^3
	$\sum_i A_i = 4000$		$\sum_i A_i \bar{y}_i = 184 \times 10^3$

Từ đó áp dụng công thức (3.8) ta có:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$



Ví dụ 3.3: Xác định mômen tĩnh của phần diện tích A' phía trên trục x' đi qua trọng tâm C của hình trong ví dụ 3.2 (hình 3.8a)



Hình 3.8

Giải : Ta chia hình A' thành A_1 và A_3 (hình 3.8b). Ta xác định tung độ \bar{y}'_1 và \bar{y}'_3 của A_1 và A_3 rồi biểu diễn mômen tĩnh Q'_x của diện tích A' đối với trục x' dưới dạng:

$$Q'_x = A_1 \bar{y}'_1 + A_3 \bar{y}'_3$$

Vậy ta có: $Q'_x = (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

Chú ý : Ta cũng có thể rút ra Q'_x từ biểu thức mômen tĩnh đối với trục trung tâm của diện tích A phải bằng 0:

$$Q_x = A_1 \bar{y}' = A(0) = 0$$

Hay : $Q_x = Q'_x + Q''_x = 0$; Trong đó Q''_x là mômen tĩnh của phần diện tích mặt cắt bên dưới trục x' .

Từ đó: $Q'_x = -Q''_x$ (3.9)

Vậy $Q'_x = -Q''_x = +42,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

3.4. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MẶT CẮT NGANG

3.4.1. Mômen quán tính đối với một trục

Từ hình vẽ 3.1, xét phân tố diện tích dA với tọa độ x, y , ta định nghĩa mômen quán tính (hay mômen bậc hai) của diện tích A đối với trục x , và y như sau:



$$I_x = \int_A y^2 dA; I_y = \int_A x^2 dA; I_{xy} = \int_A xy dA \quad (3.10)$$

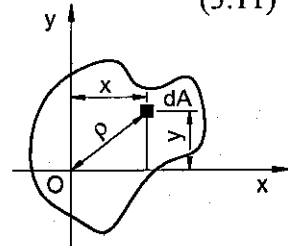
Biểu thức cuối cùng còn được gọi là *mômen quán tính ly tâm*. Nó có thể có giá trị (+), (-) hoặc bằng 0 tùy theo vị trí của trục tọa độ. Khi $J_{xy} = 0$, ta gọi hệ trục xy là hệ trục *quán tính chính*. Nếu $Q_x = Q_y = J_{xy} = 0$, ta gọi hệ trục đó là *hệ trục quán tính chính trung tâm*.

3.4.2. Mômen quán tính đối với một điểm

Ta định nghĩa mômen quán tính của diện tích đối với một điểm (hay *mômen quán tính độc cực*) như sau:

$$J_O = \int_A \rho^2 dA \quad (3.11)$$

Trong đó ρ là khoảng cách từ điểm O đến phần tử diện tích dA (hình 3.9). Mômen quán tính luôn không âm, đơn vị của nó là m^4 hoặc mm^4 .



Hình 3.9

Ta có sự liên hệ sau:

Do $\rho^2 = x^2 + y^2$, nên :

$$J_O = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA$$

$$\text{Hay : } J_O = J_x + J_y \quad (3.12)$$

Bán kính quán tính của diện tích A đối với trục x , ký hiệu là r_x xác định bởi:

$$I_x = Ar_x^2 ; r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (3.13)$$

Tương tự, kính quán tính đối với trục y và bán kính quán tính độc cực :

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} ; r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} \quad (3.14)$$

Giữa các bán kính quán tính cũng có sự liên hệ tương tự như trên:

$$r_o^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (3.15)$$



Ví dụ 3.4:

Xác định mômen quán tính đối với trục x và bán kính quán tính tương ứng của hình chữ nhật (hình 3.10).

a) Mômen quán tính I_x

Ta xét phân tố diện tích là dải chữ nhật có bề dày dy , chiều rộng b . Ta có:

$$dI_x = y^2 dA = y^2 (b dy)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 (b dy) = \frac{1}{3} b [y^3]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{1}{3} b \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right)$$

$$\text{Vậy: } I_x = \frac{1}{12} bh^3$$

b) Bán kính quán tính r_x

$$\text{Từ (3.13) ta có: } I_x = r_x^2 A; \frac{1}{12} bh^3 = r_x^2 (bh)$$

$$\text{Hay: } r_x = h / \sqrt{12}$$

Ví dụ 3.5:

Xác định các mômen quán tính của hình tròn bán kính c .

a) Mômen quán tính độc cực: Xét phân tố diện tích hình vành khăn có bán kính ρ và bề dày $d\rho$ (hình 3.11). Ta có:

$$dJ_0 = \rho^2 dA = \rho^2 (2\pi\rho d\rho)$$

$$J_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho$$

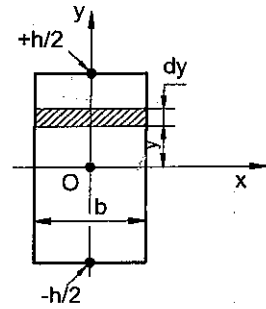
$$\text{Vậy: } J_0 = \frac{1}{2} \pi c^4$$

b) Mômen quán tính đối với một trục: Do đối xứng nên $I_x = I_y$.

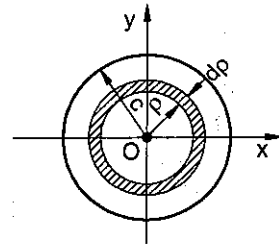
$$\text{Vậy: } J_0 = I_x + I_y = 2I_x$$

$$\text{Hay: } I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi c^4$$

Bảng 3.1 biểu diễn đặc trưng hình học của một số hình đơn giản



Hình 3.10



Hình 3.11

Bảng 3.1. Đặc trưng hình học của một số mặt cắt thông thường

	$Y_C = h/3$	$J_X = \frac{bh^3}{12}$ $J_x = \frac{bh^3}{36}$	$W_X = \frac{bh^2}{12}$ $W_x = \frac{bh^2}{24}$	
	$Y_C = \frac{4R}{3\pi}$ $\approx 0,424R$	$J_X = J_Y = \frac{\pi D^4}{128}$ $J_x = \frac{\pi D^4}{1152}$ $J_o = \frac{\pi D^4}{64}$	$W_o = \frac{\pi D^3}{32}$ $W_X = W_Y = \frac{\pi D^3}{64}$	$Q_X = \frac{2R^3}{3}$
		$J_X = J_Y = \frac{\pi D^4}{64}$ $J_o = \frac{\pi D^4}{32}$	$W_X = W_Y = \frac{\pi D^3}{32}$ $W_o = \frac{\pi D^3}{16}$	
		$J_X = J_Y$ $= \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$ $J_o = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$	$W_X = W_Y$ $= \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$ $W_o = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$	
		$J_X = \frac{bh^3}{12}$ $J_Y = \frac{hb^3}{12}$	$W_X = \frac{bh^2}{6}$ $W_Y = \frac{hb^2}{6}$	

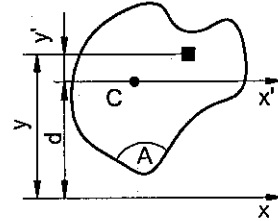


**THƯ VIỆN
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

3.5. CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG

Giả sử ta có trục tọa độ x' đi qua trọng tâm C của diện tích A và mômen quán tính đối với trục đó là $I_{x'}$. Bây giờ ta xét trục x bất kỳ song song với x' (hình 3.12). Gọi y là khoảng cách từ phần tử diện tích dA đến trục x, ta có: $J_x = \int_A y^2 dA$



Hình 3.12

Gọi y' là khoảng cách từ dA đến trục x' , ta có:

$y = y' + d$, với d là khoảng cách giữa hai trục, thay vào công thức trên ta được:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA; J_x = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + d^2 \int_A dA \quad (3.16)$$

Tích phân đầu của (3.16) là mômen quán tính $I_{x'}$ đối với trục trung tâm x' . Tích phân thứ hai bằng 0 do trục x' là trục trung tâm. Cuối cùng ta được :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 \quad (3.17)$$

Tương tự như vậy ta thu được các công thức chuyển trục song song :

$$\begin{aligned} I_y &= \bar{I}_{y'} + Ac^2 \\ I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A.cd \\ J_o &= \bar{J}_c + Ad^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Trong đó c là khoảng cách giữa trục y và y' , hoặc giữa điểm C và điểm O.

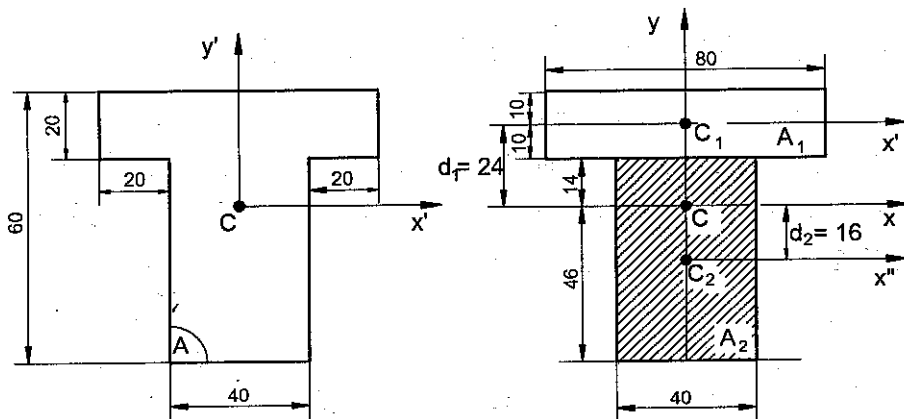
3.6. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT SỐ HÌNH GHÉP

Ta có thể áp dụng công thức chuyển trục song song ở trên để tính mômen quán tính của một số hình ghép từ những hình đơn giản.

Ví dụ 3.6:

Xác định mômen quán tính \bar{I}_x của vật (hình 3.13) đối với trục trung tâm x' .





Hình 3.13

Giải:

Từ ví dụ 3.2, ta có trọng tâm C ở khoảng cách bằng 46mm từ mép dưới của diện tích A.

Chia A thành hai chữ nhật A_1 và A_2 , ta có:

Hình chữ nhật A_1 :

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (80 \text{ mm})(20 \text{ mm})^3 = 53,3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Áp dụng công thức (3.17) ta có:

$$\begin{aligned} (I_x)_1 &= (\bar{I}_{x'})_1 + A_1 d_1^2 = 53,3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2 \\ &= 975 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Hình chữ nhật A_2 :

$$\text{Tương tự: } (\bar{I}_{x''})_2 = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (40)(60)^3 = 720 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned} (I_x)_2 &= (\bar{I}_{x''})_2 + A_2 d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2 \\ &= 1334 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

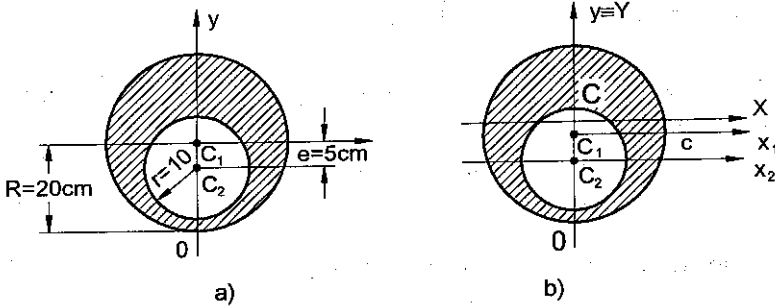
Toàn bộ diện tích A. Cộng các mômen quán tính của hai hình thành phần, ta được mômen quán tính \bar{I}_x của toàn bộ diện tích:

$$\bar{I}_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 \text{ mm}^4 + 1334 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_x = 2,31 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ví dụ 3.7: Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy của hình tròn bị khoét rỗng (hình 3.14).





Hình 3.14

Giải:

Ký hiệu hình 1 là hình tròn to bán kính R, hình 2 là hình tròn nhỏ bán kính r. Chọn hệ trục $C_1x_1y_1$ với C_1 là trọng tâm của hình 1 làm hệ trục quy chiếu. Do trục y là trục đối xứng nên ta có $x_C = 0$, tung độ y_C được xác định

bởi công thức: $y_C = \frac{Q_x}{A}$

Trong đó:

$$Q_{x_1} = Q_{x_1}^{(1)} - Q_{x_1}^{(2)} = y_{C_1} \cdot A_1 - y_{C_2} \cdot A_2 = 0 - (-5\pi r^2) \approx 1570,8\text{cm}^3$$

$$A = A_1 - A_2 = \pi(R^2 - r^2) \approx 942,5\text{cm}^2$$

Do đó ta có : $y_C = \frac{1570,8}{942,5} \approx 1,67\text{cm}$

Trọng tâm C nằm phía trên trục x_1 khoảng cách 1,67cm.

Từ đó hệ trục CXY, với trục $CY \equiv C_1y_1$ là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang.

Các mômen quán tính chính trung tâm là:

$$I_X = I_X^{(1)} - I_X^{(2)} ; I_Y = I_Y^{(1)} - I_Y^{(2)}$$

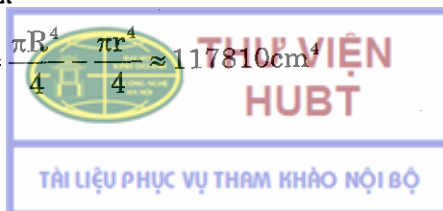
Áp dụng công thức chuyển trục song song, ta có:

$$I_X^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + y_C^2 \cdot A_1 = \frac{\pi R^4}{4} + 1,67^2 \cdot \pi R^2$$

$$I_X^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + (y_C + e)^2 \cdot A_2 = \frac{\pi r^4}{4} + (1,67 + 5)^2 \cdot \pi r^2$$

$$I_X \approx 107400\text{cm}^4$$

Tương tự : $I_Y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} \approx 117810\text{cm}^4$



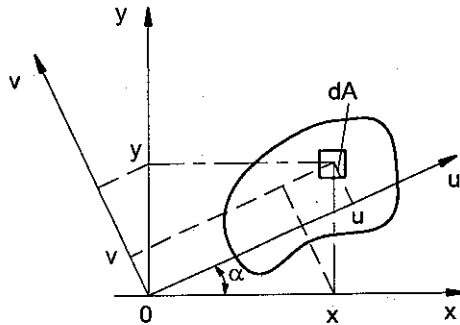
3.7. CÔNG THỨC XOAY TRỤC

Nếu xoay hệ trục xy đi một góc α (hình 3.15) ta có liên hệ giữa các tọa độ cũ và mới như sau:

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} \quad (3.19)$$

Thay các tọa độ u, v vào công thức tính mômen quán tính đối với hệ trục mới: $I_u = \int v^2 dA$; $I_v = \int u^2 dA$; $I_{uv} = \int uv dA$; ta có:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (3.20)$$



Hình 3.15

Từ (3.20) ta rút ra tính chất: $I_x + I_y = I_u + I_v = \text{const}$ (3.21)

Nếu hệ trục uv là hệ trục quán tính chính ($I_{uv} = 0$), ta có từ biểu thức cuối của (3.20):

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (3.22)$$

Thay các giá trị của góc α thỏa mãn phương trình (3.22) vào biểu thức của I_u, I_v trong (3.21), ta thu được các *mômen quán tính chính* của mặt cắt ngang:



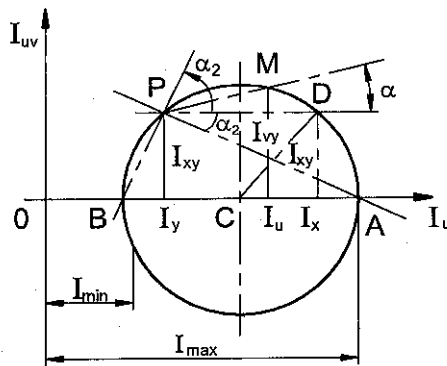
$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$
(3.23)

Vòng tròn tâm C nằm trên trục I_u , thỏa mãn :

$$x_C = \frac{I_x + I_y}{2}; R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$
(3.24)

gọi là vòng tròn Mo quán tính (hình 3.16).



Hình 3.16

Ví dụ 3.8:

Xác định trọng tâm và mômen quán tính chính trung tâm của hình thang (hình 3.17a).

Giải :

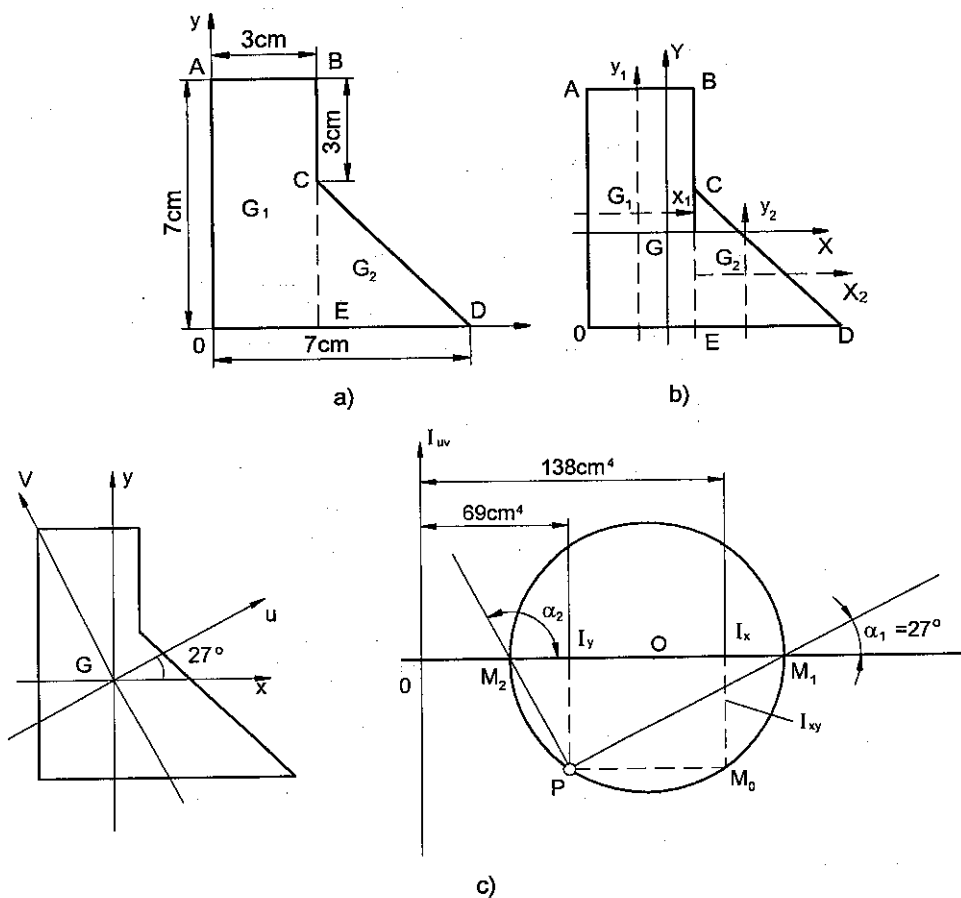
Chọn hệ trục Oxy ban đầu như hình 3.17a . Chia hình thang thành hình chữ nhật ABE0 và tam giác CED, các trọng tâm của chúng $G_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và $G_2\left(3 + \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ đã biết.

Mômen tĩnh của hình đã cho đối với trục Ox và Oy xác định như sau :

$$Q_x = 3.7 \cdot \frac{7}{2} + \frac{4.4}{2} \cdot \frac{4}{3} \approx 84,16 \text{ cm}^3; Q_y = 3.7 \cdot \frac{3}{2} + \frac{4.4}{2} \left(3 + \frac{4}{3}\right) \approx 66,16 \text{ cm}^3$$

Do đó tọa độ của trọng tâm G là: $y_G = \frac{Q_y}{A} \approx 2,9 \text{ cm}; x_G = \frac{Q_x}{A} \approx 2,28 \text{ cm}$



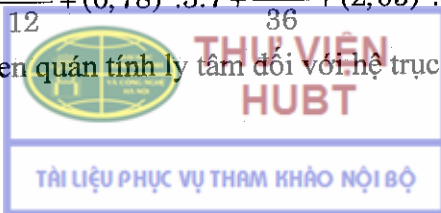


Hình 3.17

Ta kẻ hệ trục GXY và hệ trục $G_1 x_1 y_1$, $G_2 x_2 y_2$ đi qua trọng tâm của các hình thành phần, song song với hệ trục cũ (hình 3.17b), ta có: $G_1(-0,78; 0,6)$; $G_2(2,05; -2,17)$. Mômen quán tính của hình ghép đối với hệ trục trung tâm GXY là:

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_{x_1} + Y_{G_1}^2 A_1 + I_{x_2} + Y_{G_2}^2 A_2 \\
 &= \frac{3,7^3}{12} + (0,6)^2 \cdot 3,7 + \frac{4,4^3}{36} + (2,17)^2 \cdot 8 \approx 138,09 \text{cm}^4 \\
 I_y &= I_{y_1} + X_{G_1}^2 A_1 + I_{y_2} + X_{G_2}^2 A_2 \\
 &= \frac{7,3^3}{12} + (0,78)^2 \cdot 3,7 + \frac{4,4^3}{36} + (2,05)^2 \cdot 8 \approx 69,25 \text{cm}^4
 \end{aligned}$$

Tương tự, mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục GXY là:



$$I_{XY} = \bar{I}_{x_1y_1} + X_{G_1} Y_{G_1} \cdot A_1 + \bar{I}_{x_2y_2} + X_{G_2} Y_{G_2} \cdot A_2$$

$$= 0 + (-0,78) \cdot (0,6) \cdot (3,7) + \frac{4^2 \cdot 4^2}{72} + 2,05 \cdot (-2,17) \cdot 8 \approx -48,97 \text{ cm}^4$$

Chú ý rằng trong biểu thức trên ta sử dụng công thức tính mômen quán tính ly tâm của hình tam giác vuông kích thước b và h đối với hệ trục trung tâm song song với các cạnh (bạn đọc có thể tự chứng minh) :

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}$$

Từ kết quả trên ta tính các phương của hệ trục quán tính chính trung tâm:

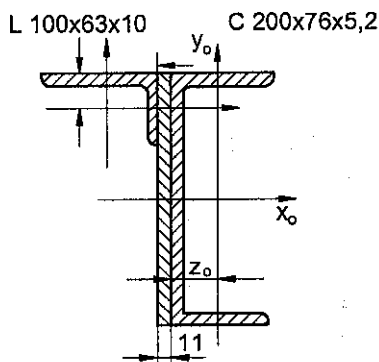
$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 48,97}{138,09 - 69,25} \approx 1,42$$

$$2\alpha_1 \approx 55^\circ; \alpha_1 \approx 27^\circ;$$

$$2\alpha_2 \approx 55^\circ + 180^\circ; \alpha_2 \approx 117^\circ$$

Hình 3.17c biểu diễn vòng tròn Mo quán tính của mặt cắt ngang

Ví dụ 3.9. Xác định trọng tâm và mômen quán tính chính trung tâm của hình ghép (hình 3.18a).



Hình 3.18 a)

Các thông số hình học của thanh chữ C và L như sau:

C200×76×5,2: $I_x = 1520 \text{ cm}^4$; $I_y = 113 \text{ cm}^4$; $A = 23,4 \text{ cm}^2$; $z_0 = 2,07 \text{ cm}$;
 $h = 20 \text{ cm}$.

L100×63×10: $I_x = 47,1 \text{ cm}^4$; $I_y = 154 \text{ cm}^4$; $A = 15,5 \text{ cm}^2$; $x_0 = 3,4 \text{ cm}$;
 $y_0 = 1,58 \text{ cm}$; $I_u = I_{\min} = 28,3 \text{ cm}^4$

– Trọng tâm mặt cắt :



$$y_0 = \frac{Q_{x_1}}{A} = \frac{8,42 \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} = 2,15(\text{cm})$$

$$x_0 = \frac{Q_{y_1}}{A} = \frac{2,62 \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} \approx 0(\text{cm})$$

- Mômen quán tính của thép góc:

$$\begin{aligned} \text{Thép chữ L (hình 3.18b)} : I_v = I_{\max} &= I_x + I_y - I_{\min} \\ &= 47,1 + 154 - 28,3 = 172,8 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_{\max}}; \tan \alpha_2 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_{\min}}$$

$$(\tan \alpha_1) \cdot (\tan \alpha_2) = -1 = \frac{I_{xy}^2}{(I_y - I_{\max})(I_y - I_{\min})};$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -\sqrt{(I_y - I_{\max})(I_y - I_{\min})} \\ &= -\sqrt{(154 - 172,8)(154 - 28,3)} = -48,7(\text{cm}^4) \end{aligned}$$

Ta lấy dấu trừ cho I_{xy} vì trục quán tính chính nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

- Mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm :

$$\begin{aligned} I_x = \sum I_{x_i} &= \frac{20^3 \cdot 1,1}{12} + 2,15^2 \cdot 1,1 \cdot 10 + 1520 + 2,15^2 \cdot 23,4 + \\ &+ 47,1 + 6,27^2 \cdot 15,5 \approx 3055(\text{cm}^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y = \sum I_{y_i} &= \frac{20 \cdot 1,1^3}{12} + 113 + 2,62^2 \cdot 23,4 + 154 + 3,95^2 \cdot 15,5 \\ &\approx 670(\text{cm}^4); \end{aligned}$$

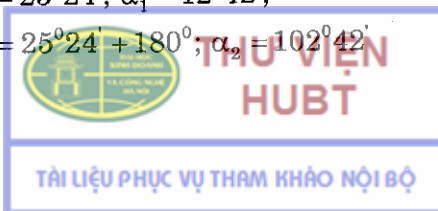
$$\begin{aligned} I_{xy} = \sum I_{x_i y_i} &= 0 + 2,62 \cdot (-2,15) \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 6,27 \cdot 15,5 - 48,7 \\ &\approx -566(\text{cm}^4); \end{aligned}$$

- Phương của hệ trục quán tính chính:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 566}{3055 - 670} \approx 0,475$$

$$2\alpha_1 = 25^\circ 24'; \alpha_1 = 12^\circ 42';$$

$$2\alpha_2 = 25^\circ 24' + 180^\circ; \alpha_2 = 102^\circ 42'$$

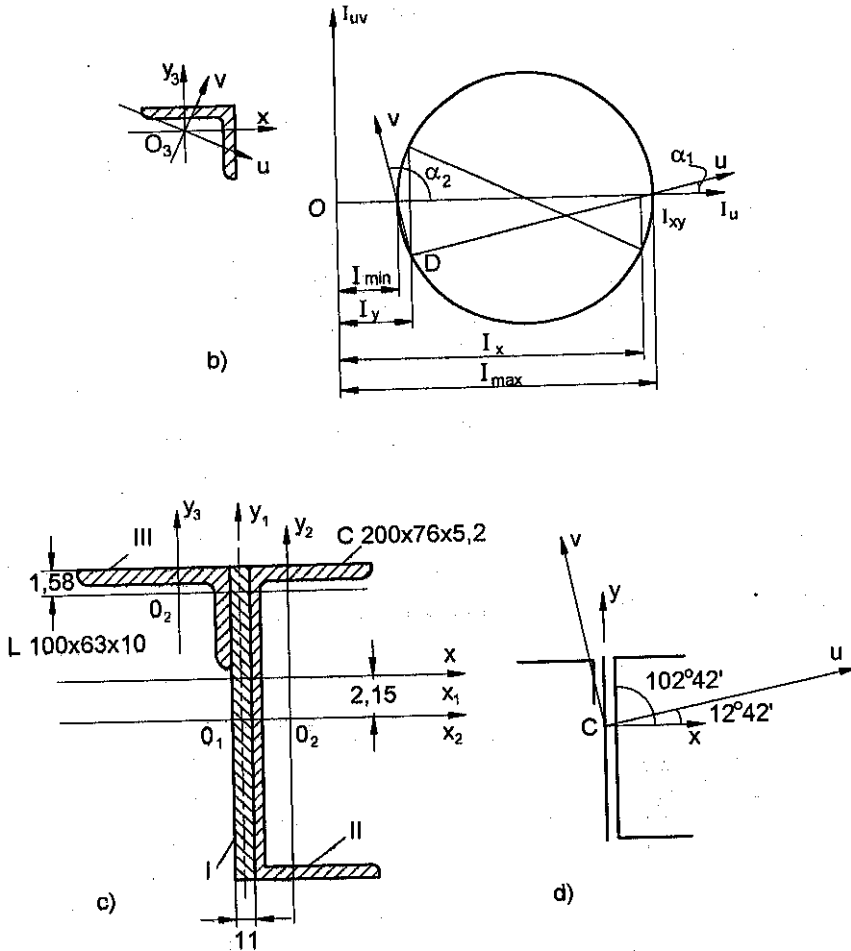


Trên hình 3.18d biểu diễn hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

– Mômen quán tính chính:

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{3055 + 670}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3055 - 670}{2}\right)^2 + (-566)^2}$$

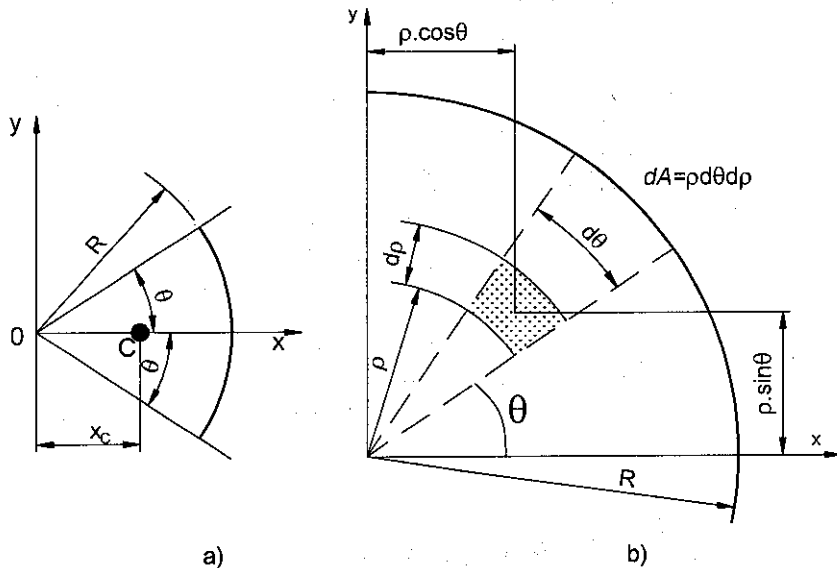
$$I_{\max} \approx 3183(\text{cm}^4); I_{\min} \approx 543(\text{cm}^4)$$



Hình 3.18

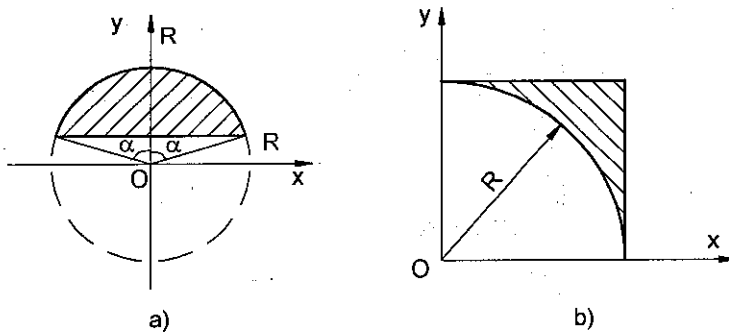
BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục x, y (hình BT3.1a), mômen quán tính ly tâm (hình BT3.1b).



Hình BT 3.1

3.2. Xác định trọng tâm và mômen tĩnh của các hình BT3.2a, b:

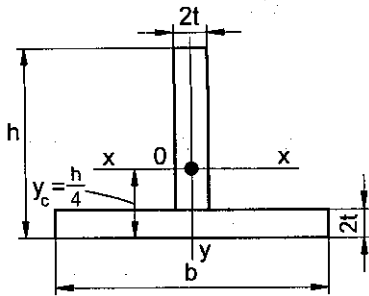


Hình BT 3.2

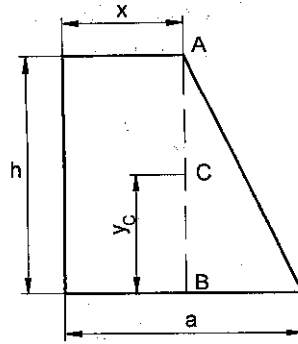
3.3. Xác định chiều cao h của mặt cắt ngang chữ T (hình BT3.3) sao cho trục trung tâm xx cách đáy một khoảng bằng $h/4$, biết $b = 20\text{cm}$ và $t = 1\text{cm}$.

3.4. Xác định đáy nhỏ x của hình thang sao cho trọng tâm C của hình nằm trên đường thẳng AB (hình BT 3.4). Xác định tung độ y_c của trọng tâm?



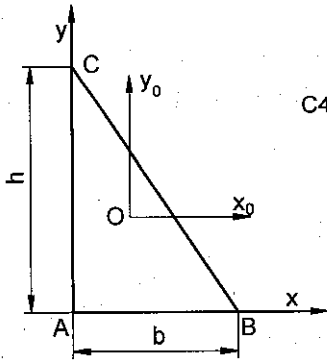


Hình BT 3.3

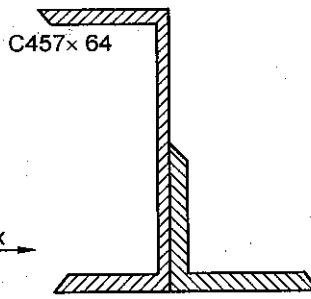


Hình BT 3.4

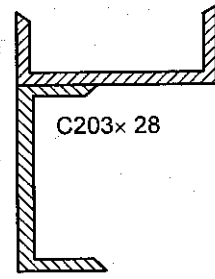
3.5. Tính mômen quán tính ly tâm J_{xy} và $J_{x_0y_0}$ của hình tam giác vuông ABC. Điểm O trùng với trọng tâm của tam giác (hình BT 3.5).



Hình BT 3.5



L102x102x15,9 a)

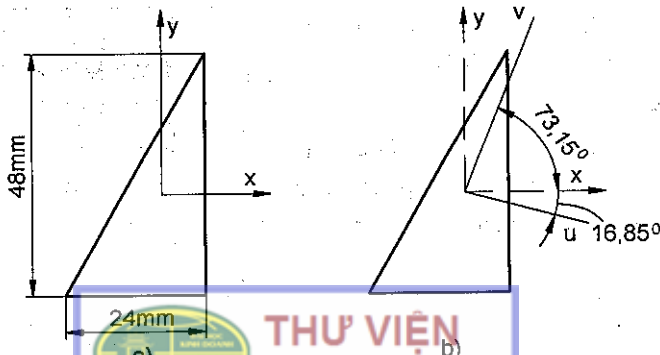


b)

Hình BT 3.6

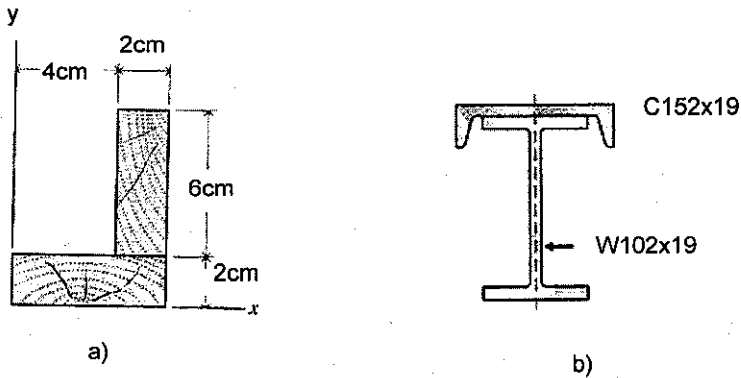
3.6. Một thanh ghép gồm hai thanh định hình có mặt cắt ngang và kích thước như hình BT3.6. Xác định các mômen quán tính chính trung tâm và hệ trục quán tính chính trung tâm.

3.7. Xác định mômen quán tính chính trung tâm và hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt hình tam giác kích thước như hình BT3.7.



Hình BT 3.7

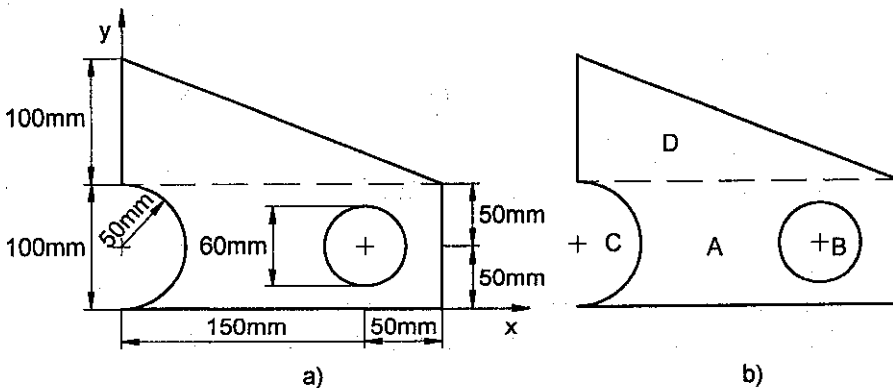
3.8. Xác định mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm (hình BT3.8a) của mặt cắt ghép bởi hai thanh có kích thước như hình BT3.8b.



Hình BT 3.8

3.9. Xác định mômen quán tính của mặt cắt như hình BT3.9 đối với:

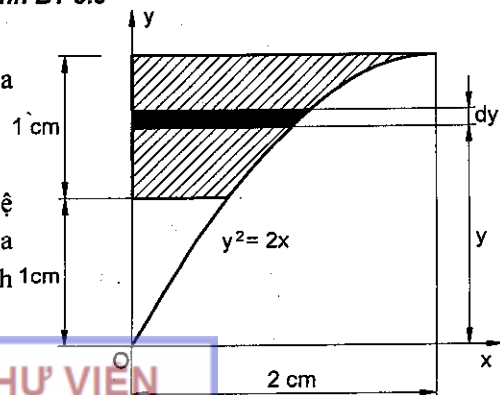
a) Trục x; b) Trục y; c) Trục z đi qua gốc tọa độ O của hệ trục xy và vuông góc với mặt phẳng của mặt cắt ngang.



Hình BT 3.9

3.10. Xác định mômen quán tính của mặt cắt ngang như hình BT3.10 đối với:

a) Trục x
b) Trục z đi qua gốc tọa độ O của hệ trục xy và vuông góc với mặt phẳng của mặt cắt ngang (phần gạch chéo như hình 1 cm BT3.10).



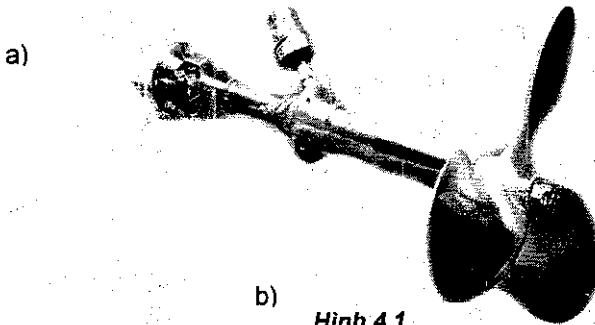
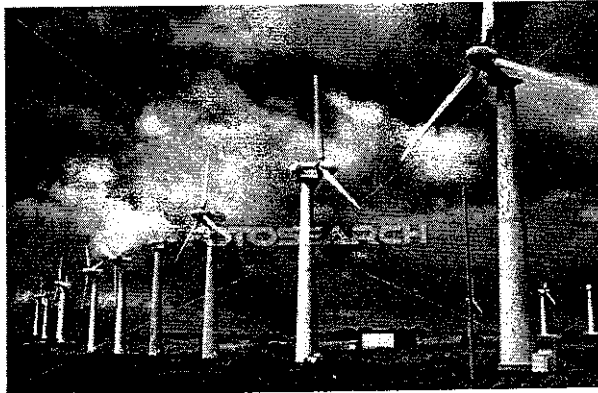
Hình BT 3.10

Chương 4

XOẮN THUẦN TÚY

4.1. KHÁI NIỆM

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu về thanh chịu xoắn và xác định ứng suất, biến dạng dưới tác dụng của tải trọng. Thanh gọi là chịu *xoắn thuần túy* nếu như trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn. Ví dụ trong các nhà máy thủy điện, tuốcbin quay gây nên mômen xoắn đối với trục và truyền chuyển động tới mô tơ của máy phát điện hoặc trục của máy phát điện bằng sức gió, hay chân vịt của tàu thủy (hình 4.1).



Hình 4.1.

a) Máy phát điện bằng sức gió ; b) Chân vịt tàu thủy

Khi trục tròn chịu tác dụng của mômen xoắn, ta chấp nhận giả thuyết về mặt cắt ngang luôn luôn phẳng và có kích thước không thay đổi. Ta cũng

coi biến dạng nằm trong miền đàn hồi và tuân theo định luật Húc. Việc nghiên cứu sự phân bố của ứng suất trên mặt cắt ngang, cũng như biến dạng của trục sẽ giúp ta thiết kế trục truyền thỏa mãn điều kiện bền và điều kiện cứng.

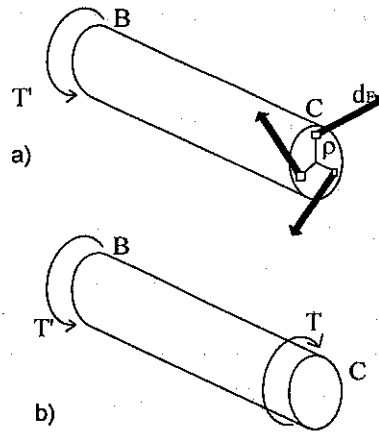
Xét trục tròn chịu tác dụng của cặp mômen xoắn bằng nhau nhưng ngược chiều ở hai đầu T và T'. Trên mặt cắt ngang bất kỳ, ta có thể xác định mômen xoắn nội lực bằng T. Ký hiệu ρ là khoảng cách từ trục đến trục của thanh (hình 4.2), ta có:

$$\int_A \rho dF = T \quad (4.1)$$

Mặt khác $dF = \tau dA$, trong đó τ là ứng suất tiếp trên phân tố diện tích dA , ta được:

$$\int_A \rho \tau dA = T \quad (4.2)$$

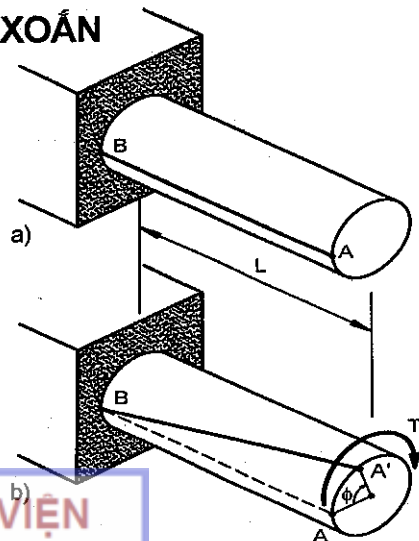
Chú ý rằng giả thuyết về sự phân bố đều của ứng suất pháp sẽ không còn đúng đối với ứng suất tiếp. Ta cần nghiên cứu biến dạng của trục dưới tác dụng của ngoại lực.



Hình 4.2

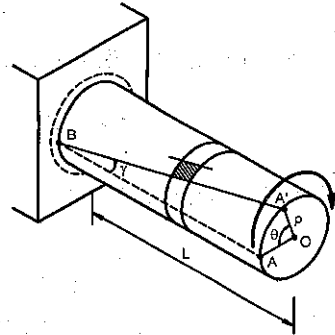
4.2. BIẾN DẠNG CỦA TRỤC CHỊU XOẮN

Hình 4.3 biểu diễn trục có một đầu ngàm, tại đầu tự do chịu tác dụng của mômen xoắn T. Trên mặt cắt ngang, ta nhận thấy đoạn AB ban đầu song song với trục thanh thì sau biến dạng lệch đi một góc ϕ , gọi là góc xoắn. Thục nghiệm cho thấy góc xoắn tỷ lệ với mômen xoắn và chiều dài của trục. Cần chú ý rằng giả thuyết về mặt cắt ngang phẳng chỉ đúng với hình tròn (hoặc vành



Hình 4.3

khăn), còn đối với các loại mặt cắt có hình dạng khác thì không áp dụng được giả thuyết đó nữa. Ví dụ, đối với thanh mặt cắt hình chữ nhật chịu xoắn sẽ có độ vênh và do đó mặt cắt không còn phẳng nữa. Tính chất đặc biệt đó của mặt cắt hình tròn có thể giải thích bởi sự đối xứng trục với góc xoắn bất kỳ.



Hình 4.4

Ta có thể thấy từ hình 4.4 với biến dạng góc rất bé γ , độ dài cung AA' có thể xác định bởi:

$$AA' = \gamma L \quad (4.3)$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$AA' = \rho \phi \quad (4.4)$$

Từ đó:
$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (4.5)$$

Như vậy, biến dạng góc trên mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn *tỷ lệ tuyến tính* với khoảng cách từ điểm đang xét đến trục thanh. Biến dạng góc lớn nhất đạt được trên bề mặt của trục:

$$\gamma_{\max} = \frac{c \phi}{L} \quad (4.6)$$

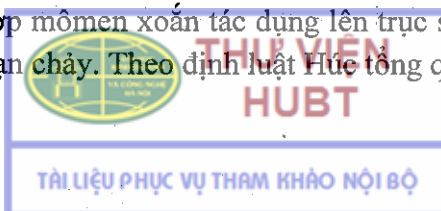
Với c là bán kính của mặt cắt ngang trục. Do đó biến dạng góc có thể biểu diễn phụ thuộc khoảng cách ρ :

$$\gamma = \frac{\rho \gamma_{\max}}{c} \quad (4.7)$$

4.3. CÔNG THỨC ỨNG SUẤT TIẾP VÀ GÓC XOẮN

4.3.1. Ứng suất

Ta xét trường hợp mômen xoắn tác dụng lên trục sao cho ứng suất tiếp chưa vượt qua giới hạn chảy. Theo định luật Hooke tổng quát, ta có:



$$\tau = G\gamma \quad (4.8)$$

Trong đó G là môđun trượt của vật liệu. Từ (4.7) ta có:

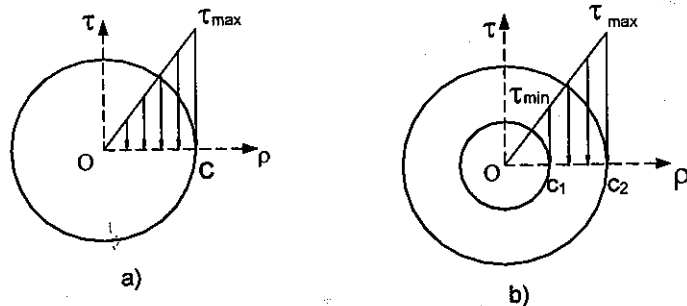
$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max} \quad (4.9)$$

Từ (4.8) và (4.9), ta thu được :

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (4.10)$$

Ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất phụ thuộc khoảng cách đến trục thanh (hình 4.5).

Đối với mặt cắt hình vành khăn có bán kính trong c_1 và bán kính ngoài c_2 , ta có:



Hình 4.5

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max} \quad (4.11)$$

Hợp lực của các mômen nội lực tác dụng lên mặt cắt ngang trục phải cân bằng với mômen ngoại lực T : $\int_A \rho \tau dA = T$

$$\text{Chú ý đến (4.10), ta có: } T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA \quad (4.12)$$

Tích phân ở vế phải chính là mômen quán tính độ cực của mặt cắt ngang, do đó: $T = \frac{\tau_{\max} J}{c}$ (4.13)

$$\text{Hay: } \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (4.14)$$

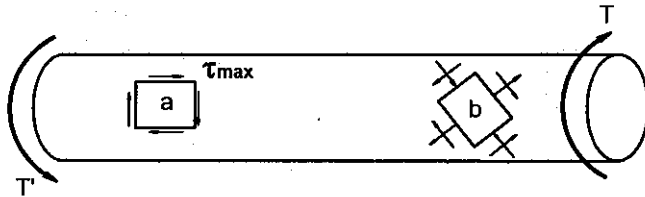
Công thức ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có dạng:



$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (4.15)$$

Mômen quán tính của mặt cắt ngang tròn có dạng: $J = \frac{1}{2} \pi r^4$

Bây giờ ta xét hai phân tử a và b trên bề mặt của trục chịu xoắn (hình 4.6). Do các mặt của phân tử a song song hoặc vuông góc với trục thanh, trên các mặt đó chỉ có ứng suất tiếp xác định bởi công thức (4.14). Đối với phân tử b, các mặt nghiêng một góc bất kỳ so với trục thanh sẽ chịu đồng thời cả ứng suất pháp và tiếp.



Hình 4.6

Khi bề mặt phân tử tạo thành góc 45° so với trục thanh, ta có thể xác định lực F tác dụng lên mặt đó như sau:

$$F = 2 (\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

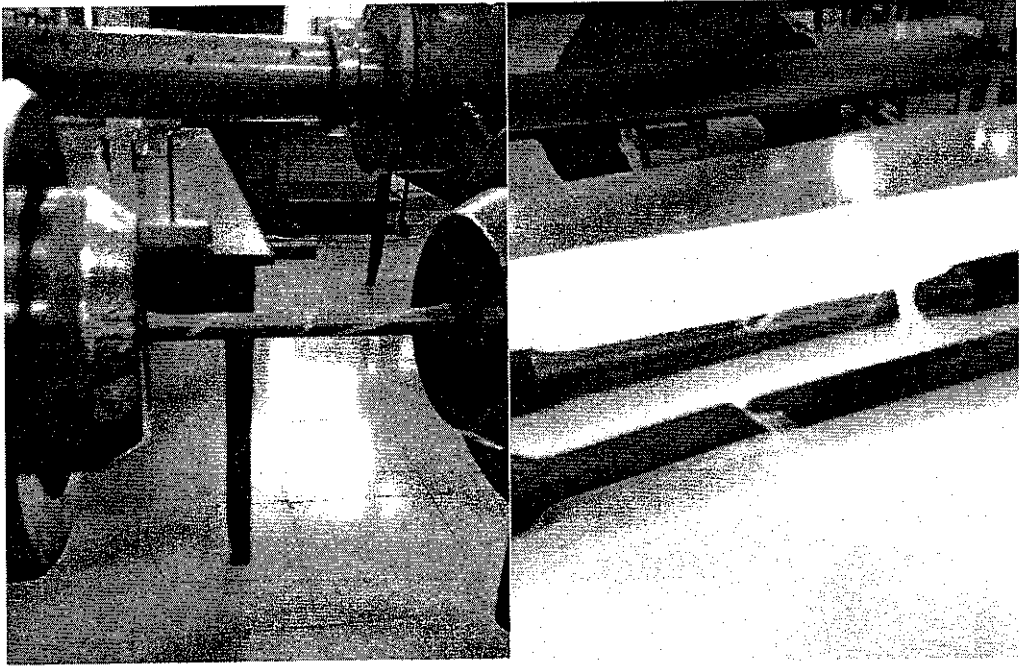
Trong đó A_0 là diện tích của mặt vuông góc với trục thanh. Ký hiệu A là diện tích của mặt nghiêng một góc 45° , ta có: $A = A_0 \sqrt{2}$, do đó ứng suất pháp trên mặt nghiêng được biểu diễn bởi:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max} \quad (4.16)$$

Tương tự, ta có thể thu được trên mặt đối diện của phân tử có ứng suất pháp bằng: $\sigma = -\tau_{\max}$.

Như vậy, ứng suất tác dụng trên các mặt của phân tử nghiêng một góc 45° so với trục thanh là ứng suất pháp và có giá trị bằng $\pm \tau_{\max}$.

Mẫu thí nghiệm làm từ vật liệu dẻo chịu xoắn bị phá hủy theo mặt phẳng vuông góc với trục thanh. Tuy nhiên, với vật liệu giòn, mẫu bị phá hủy theo phương tạo thành góc 45° với trục thanh, tương ứng với ứng suất kéo đạt giá trị lớn nhất (hình 4.7).



Hình 4.7. Thí nghiệm xoắn và mẫu thử bằng thép, gang sau biến dạng

Ví dụ 4.1. Trục BC với đường kính trong và ngoài tương ứng là 90mm và 120 mm, trục AB và CD đặc với đường kính d , chịu tác dụng của tải trọng như hình 4.8.

Xác định :

- Ứng suất tiếp lớn nhất và nhỏ nhất của trục BC;
- Đường kính lớn nhất của trục AB và CD nếu ứng suất tiếp cho phép của chúng là 65MPa.

Giải:

a) Trục BC :

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}((0,06)^4 - (0,045)^4) = 13,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ứng suất tiếp lớn nhất: trên mặt ngoài của trục, ta có:

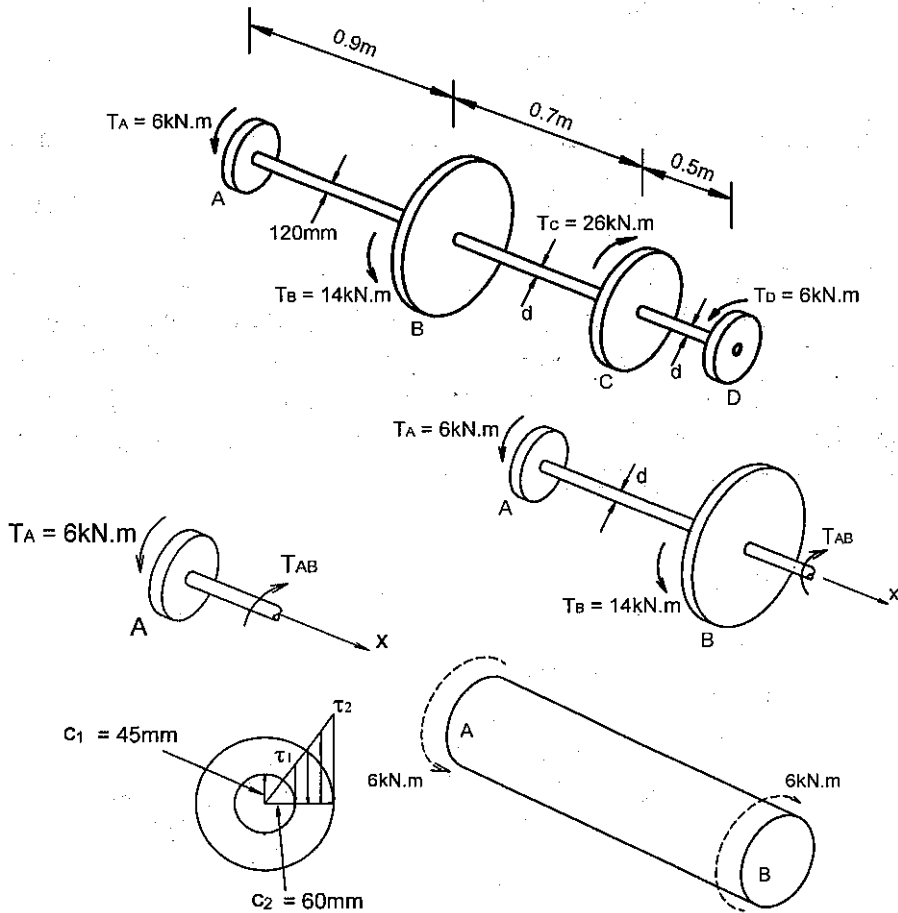
$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{20 \text{ kNm} \cdot (0,06 \text{ m})}{13,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 86,2 \text{ MPa};$$

Ứng suất tiếp nhỏ nhất: theo công thức (4.11), ta có:

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2}; \text{ hoặc } \tau_{\min} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \cdot 86,2 \text{ MPa} = 64,7 \text{ MPa};$$

b) Trục AB và CD. Ta nhận thấy cả hai trục đều chịu mômen xoắn là $T = 6\text{kNm}$ và có $\tau_{\text{all}} = 65\text{MPa}$. Ký hiệu c là bán kính của trục, ta có:

$$\tau_{\text{all}} = \frac{Tc}{J} ; 65\text{MPa} = \frac{6\text{kNm}\cdot c}{\frac{\pi}{2}c^4} ; c = 38,9 \cdot 10^{-3}\text{m} \text{ hay } d = 2c = 77,8\text{mm}$$



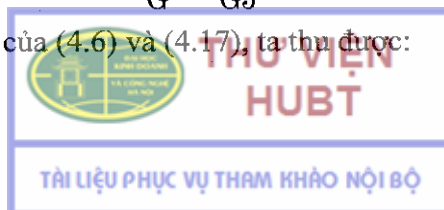
Hình 4.8

4.3.2. Góc xoắn

Từ (4.6), ta có thể xác định liên hệ giữa biến dạng góc và mômen xoắn:

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{\tau_{\text{max}}}{G} = \frac{Tc}{GJ} \quad (4.17)$$

So sánh về phải của (4.6) và (4.17), ta thu được:



$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (4.18)$$

Với ϕ là góc xoắn của thanh có chiều dài L , biểu diễn bằng radian.

Đối với trục gồm nhiều đoạn có kích thước mặt cắt ngang và vật liệu khác nhau, nhưng các đại lượng đó và mômen nội lực là hằng số trên mỗi đoạn, ta có công thức tính góc xoắn như sau:

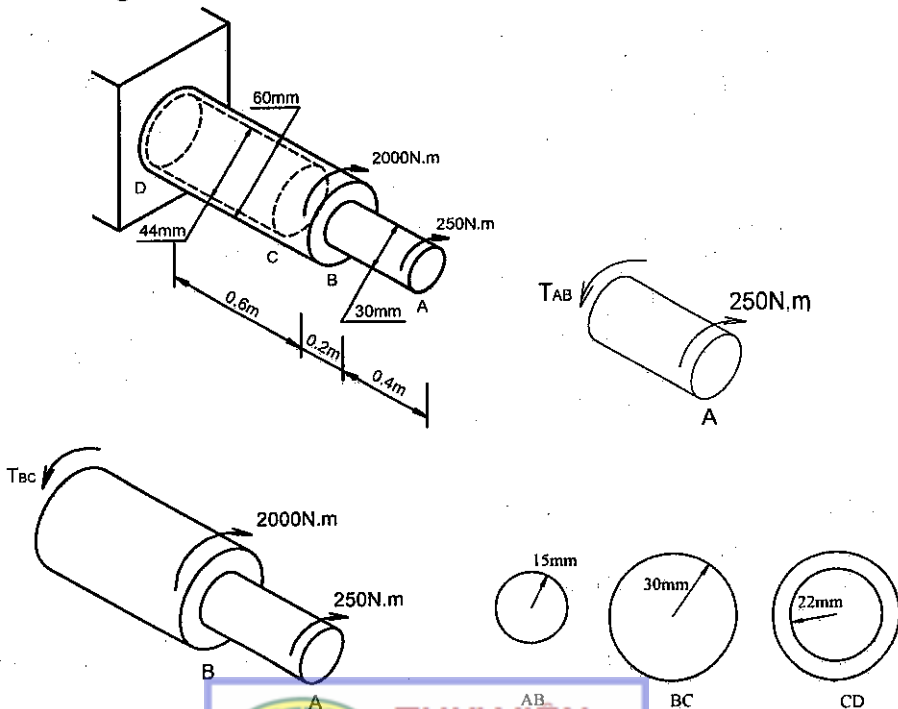
$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i} \quad (4.19)$$

Đối với trục có mặt cắt ngang và vật liệu thay đổi theo chiều dài, ta có:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ} \quad (4.20)$$

Ví dụ 4.2. Trục AD được ngàm tại D và chịu tác dụng của mômen xoắn như hình 4.9. Một lỗ có đường kính 44mm được khoan rỗng tại đoạn CD của trục. Biết vật liệu là thép có $G = 77\text{GPa}$, xác định góc xoắn tại mặt cắt A.

Giải : Trục được chia thành 3 đoạn có mặt cắt ngang và mômen xoắn nội lực không đổi trên mỗi đoạn. Dùng mặt cắt ngang trên đoạn giữa A và B, xét sự cân bằng của đoạn bên phải, ta có:



THU-VIEN
HUBT
Hình 4.9

$$\sum M_x = 0; (250\text{Nm}) - T_{AB} = 0; T_{AB} = 250\text{Nm};$$

Tương tự với mặt cắt giữa B và C :

$$\sum M_x = 0; (250\text{Nm}) + (2000\text{Nm}) - T_{BC} = 0; T_{BC} = 2250\text{Nm}$$

Do không có mômen xoắn tác dụng tại C nên:

$$T_{CD} = T_{BC} = 2250\text{Nm}$$

Mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang:

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0,015\text{m})^4 = 0,0795 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} (0,030\text{m})^4 = 1,272 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_1^4 - c_2^4) = \frac{\pi}{2} \left\{ (0,030\text{m})^4 - (0,022\text{m})^4 \right\} = 0,904 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

Góc xoắn: Với $G = 77\text{GPa}$ ta có :

$$\phi_A = \sum \frac{T_i L_i}{G J_i} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{77\text{GPa}} \left[\frac{(250\text{Nm}) \cdot (0,4\text{m})}{0,0795 \cdot 10^{-6} \text{m}^4} + \frac{(2250\text{Nm}) \cdot (0,2\text{m})}{1,272 \cdot 10^{-6} \text{m}^4} + \frac{(2250\text{Nm}) \cdot (0,6\text{m})}{0,904 \cdot 10^{-6} \text{m}^4} \right]$$

$$= 0,0403 \text{ rad.}$$

4.3.3. Góc xoắn của trục truyền động

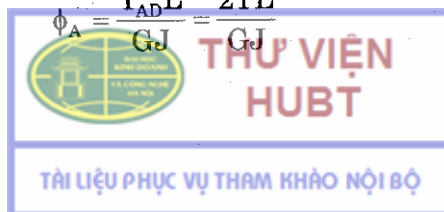
Hình 4.10a biểu diễn hai trục AD và EB, với bán kính $r_A = 2r_B$, cùng chiều L và môđun trượt G , được gắn với bánh răng tại C. Xác định góc xoắn tại E của trục EB khi mômen xoắn T tác dụng tại E.

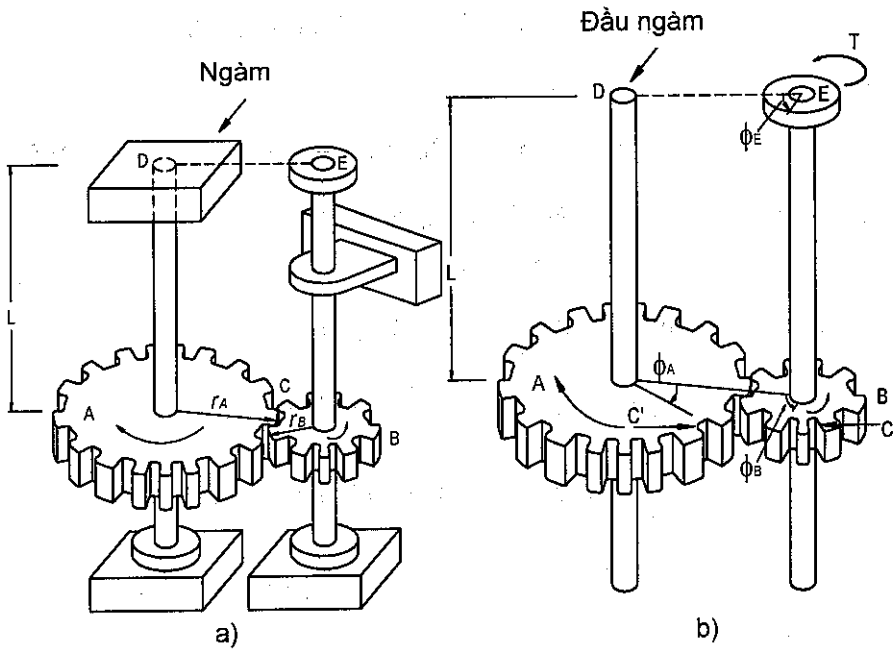
Trước hết ta có góc xoắn tương đối trên trục EB xác định bởi :

$$\phi_{EB} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{GJ}$$

Do đầu D của trục AD cố định, góc xoắn của bánh A bằng góc xoắn của trục:

$$\phi_A = \frac{T_{AD} L}{GJ} = \frac{2TL}{GJ}$$





Hình 4.10

Mặt khác, ta nhận thấy $r_A \cdot \phi_A = r_B \cdot \phi_B$ (hình 4.10b), và theo giả thiết

$$r_A = 2 r_B, \text{ ta có: } \phi_B = \frac{r_A}{r_B} \phi_A = 2\phi_A$$

$$\text{Từ đó rút ra: } \phi_B = \frac{4TL}{GJ}$$

Mặt khác, góc xoắn của trục EB xác định từ công thức:

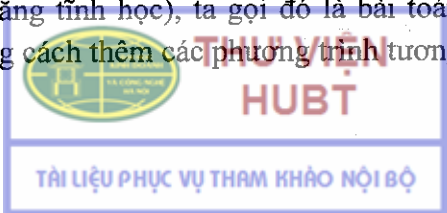
$$\phi_{EB} = \frac{T_{EB}L}{GJ} = \frac{TL}{GJ}$$

Góc xoắn tại E thu được như sau:

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{EB} = \frac{4TL}{GJ} + \frac{TL}{GJ} = \frac{5TL}{GJ}$$

4.4. BÀI TOÁN SIÊU TÍNH KHI XOẮN

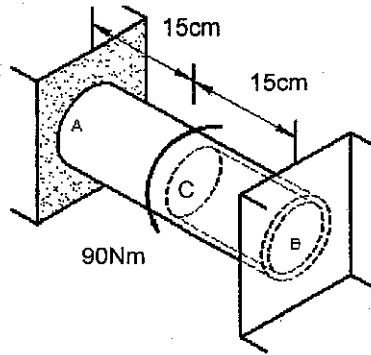
Khi liên kết của trục có các phản lực liên kết không thể xác định từ các phương trình cân bằng tĩnh học thuần túy (hay khi số ẩn số lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học), ta gọi đó là bài toán siêu tĩnh. Ta có thể giải bài toán đó bằng cách thêm các phương trình tương thích biến dạng.



Ví dụ 4.3. Một trục tròn AB ngâm hai đầu, có chiều dài 30cm, đường kính 2cm, trong đó đoạn có chiều dài 15cm được khoan rỗng bởi đường kính 1,5 cm từ đầu B. Trục chịu tác dụng của mômen xoắn 90Nm tác dụng ở giữa (hình 4.11). Xác định mômen phản lực liên kết ở hai đầu trục.

Giải : Xét sự cân bằng của trục, gọi T_A và T_B là các mômen xoắn phản lực liên kết ở hai đầu trục, ta có: $T_A + T_B = 90\text{Nm}$.

Do một phương trình chưa đủ để xác định hai ẩn số, ta có bài toán siêu tĩnh, cần thêm vào một phương trình biểu diễn góc xoắn tại đầu ngâm phải bằng không: $\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$.



Hình 4.11

Trong đó ϕ_1 và ϕ_2 là góc xoắn tại các đoạn thanh AC và CB.

Áp dụng (4.18), ta có:
$$\phi = \frac{T_A L_1}{GJ_1} - \frac{T_B L_2}{GJ_2} = 0$$

Giải theo T_B , ta có $T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A = 0,683 T_A$;

Thay giá trị đó vào phương trình cân bằng tĩnh học, ta được:

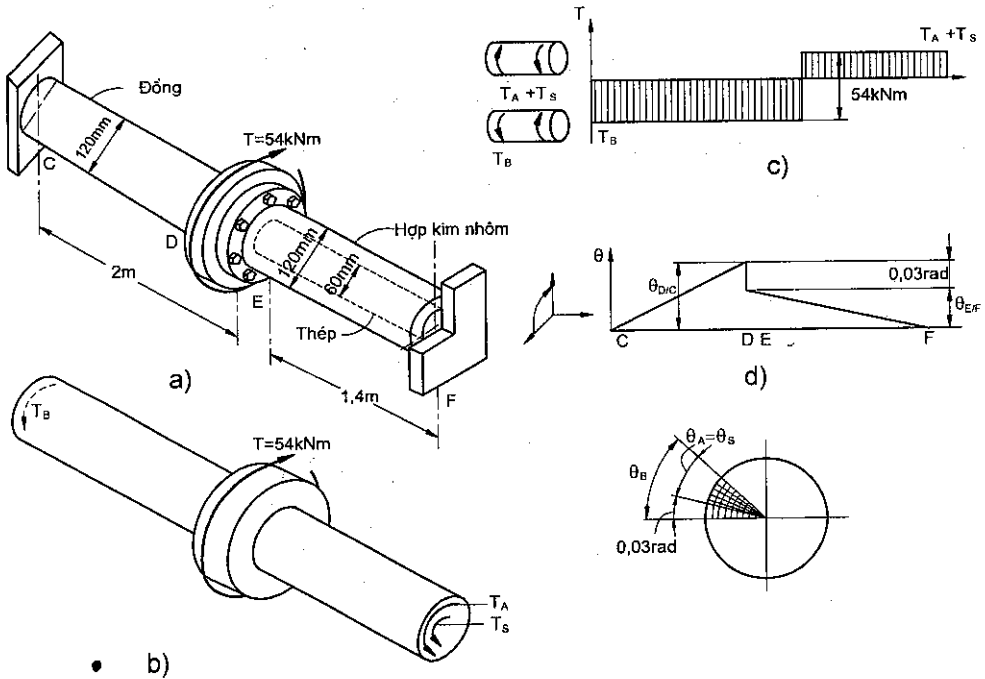
$$1,683 T_A = 90\text{Nm}; \quad T_A = 53,47\text{Nm}$$

Ví dụ 4.4: Trục gồm thanh CD đặc bằng đồng ($G_B = 45\text{GPa}$) gắn với thanh EF rỗng bằng hợp kim nhôm ($G_A = 28\text{GPa}$) có lõi bên trong bằng thép ($G_S = 80\text{GPa}$) ngâm tại hai đầu và chịu mômen xoắn $T = 54\text{kNm}$ (hình 4.12a). Lõi thép của thanh EF được gắn với vỏ nhôm bằng đai tại E sao cho phần thanh nhôm và thép hoạt động như một khối. Đai D và E được gắn với nhau và khe hở của đai vít cho phép đai D xoay một góc $0,03\text{rad}$,



trước khi thanh EF chịu lực. Xác định ứng suất tiếp lớn nhất trong mỗi thanh có vật liệu khác nhau.

Giải: Ta tách hệ bằng cách giải phóng liên kết như hình 4.12b



Hình 4.12

Mômen xoắn chưa biết là T_B ở đầu trái, và T_S , T_A ở đầu bên phải thanh, biểu đồ mômen xoắn trên hình 4.12c; ta có phương trình cân bằng tĩnh học:

$$T_B + T_S + T_A = 54 \cdot 10^3 \text{ Nm} \quad (a)$$

Ta cần thêm vào hai phương trình tương thích biến dạng nữa. Trên hình 4.12d là biểu đồ góc xoắn của toàn bộ thanh, còn ở hình 4.12e là góc xoắn của thanh đồng tại D bằng tổng góc xoắn do khe hở và góc xoắn của thanh nhôm và lõi thép.

Ta có : $\theta_A = \theta_S$ (góc xoắn của thanh nhôm và lõi thép như nhau) (b)

$$\theta_B = \theta_A + 0,03 \quad (c)$$

Các phương trình trên có thể biểu diễn qua mômen xoắn tác dụng trên từng đoạn thanh.

Trước hết ta tính đặc trưng hình học của mặt cắt ngang :



$$J_A = (\pi/2) (60^4 - 30^4) = 19,085 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 19,085 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_B = (\pi/2) (60^4) = 20,3610^6 \text{ mm}^4 = 20,36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_S = (\pi/2) (30^4) = 1,2723 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 1,2723 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Từ (a) ta có :

$$\frac{\tau_B \cdot J_B}{c_B} + \frac{\tau_A \cdot J_A}{c_A} + \frac{\tau_S \cdot J_S}{c_S} = 54 \cdot 10^3$$

$$\frac{\tau_B \cdot 20,36 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-3}} + \frac{\tau_A \cdot 19,085 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-3}} + \frac{\tau_S \cdot 1,2723 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-3}} = 54 \cdot 10^3 \text{ (Nm)}$$

$$\text{Hay : } 16\tau_B + 15\tau_A + 2\tau_S = 2,546 \cdot 10^9 \text{ N / m}^2 \quad (\text{d})$$

$$\text{Tương tự, từ (b) ta có : } \frac{\tau_A \cdot L_A}{G_A c_A} = \frac{\tau_S \cdot L_S}{G_S c_S}$$

$$\frac{\tau_A (1,4)}{28 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = \frac{\tau_S (1,4)}{80 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{Rút ra : } 8\tau_B = 9\tau_A + 324 \cdot 10^6 \quad (\text{e})$$

$$\text{Từ (c) ta có : } \frac{\tau_B \cdot J_B}{c_B} = \frac{\tau_A \cdot L_A}{G_A c_A} + 0,03$$

$$\frac{\tau_B \cdot 2}{45 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = \frac{\tau_A (1,4)}{28 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} + 0,03$$

$$\text{Rút ra : } 10 \tau_A = 7 \tau_S \quad (\text{f})$$

Giải hệ (d), (e), (f), ta thu được :

$$\tau_A = 52,9 \text{ MPa ; } \tau_B = 100 \text{ MPa ; } \tau_S = 75,6 \text{ Mpa.}$$

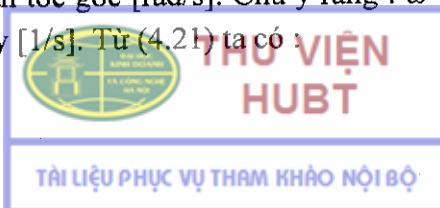
4.5. THIẾT KẾ TRỤC TRUYỀN

Vai trò của người kỹ sư là lựa chọn vật liệu và kích thước mặt cắt ngang của trục chịu xoắn, sao cho ứng suất tiếp lớn nhất của trục không vượt quá giới hạn cho phép, khi trục được cung cấp bởi mô tơ có công suất và vận tốc cho trước.

Liên hệ giữa mômen xoắn và công suất biểu diễn bởi công thức:

$$P = T \cdot \omega \quad (4.21)$$

Trong đó ω là vận tốc góc [rad/s]. Chú ý rằng : $\omega = 2\pi f$, với f là tần số của chuyển động quay [1/s]. Từ (4.21) ta có



$$P = 2\pi f.T$$

$$\text{Hay : } T = \frac{P}{2\pi f}, f = n/60 \quad (4.22)$$

Trong đó n là số vòng quay trong một phút.

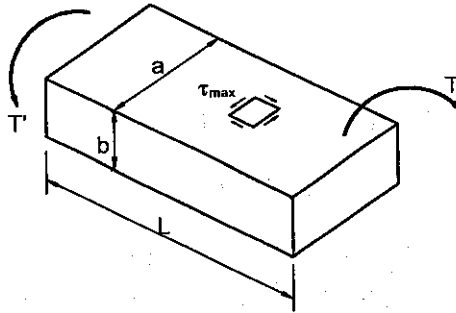
Thay thế T vào (4.12), ta có thể xác định đường kính cho phép của trục

$$\text{từ công thức sau: } \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (4.23)$$

Với c là bán kính của mặt cắt ngang trục.

4.6. XOẪN THANH MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN

Như đã nói ở phần trên, sự phân bố của ứng suất và biến dạng trong thanh mặt cắt ngang tròn không thể áp dụng đối với thanh mặt cắt ngang hình dạng khác. Ta sẽ thấy đối với mặt cắt hình chữ nhật, ứng suất tiếp bằng không tại các điểm góc, trong khi đối với mặt cắt tròn, ứng suất tiếp lại đạt giá trị lớn nhất tại chu tuyến. Từ Lý thuyết đàn hồi (S.P Timoshenko & Goudier, *Theory of Elasticity*, Mc.Graw Hill Book Com., N.Y 1953), phương pháp tương tự màng mỏng cho phép xác định sự phân bố của ứng suất tiếp và biến dạng đối với thanh chịu xoắn mặt cắt ngang không tròn.



Hình 4.12

Xét thanh mặt cắt ngang chữ nhật chịu xoắn (hình 4.12). Ký hiệu L là chiều dài thanh, cạnh dài và cạnh ngắn của mặt cắt là a và b ($a > b$), T là mômen xoắn tác dụng lên thanh, ta có thể xác định ứng suất tiếp lớn nhất tại hai đầu mút của cạnh dài theo công thức kỹ thuật sau (việc chứng minh công thức được nêu trong sách đã dẫn ở trên):



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad (4.24)$$

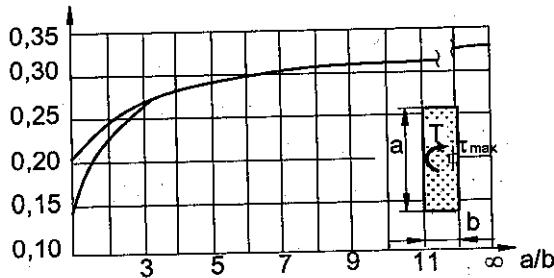
Góc xoắn được xác định bởi:
$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \quad (4.25)$$

Các hệ số c_1, c_2 phụ thuộc vào tỷ lệ của a/b và được cho trong bảng 4.1 và biểu diễn trên đồ thị ở hình 4.13. Ta nhận thấy từ bảng 4.1 rằng khi $a/b \geq 5$ hệ số $c_1 = c_2$ và có thể sử dụng công thức sau:

$$c_1 = c_2 = \frac{1 - 0,630b/a}{3} \quad (4.26)$$

Bảng 4.1. Hệ số độ cứng của mặt cắt ngang chữ nhật chịu xoắn

a/b	c_1	c_2
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

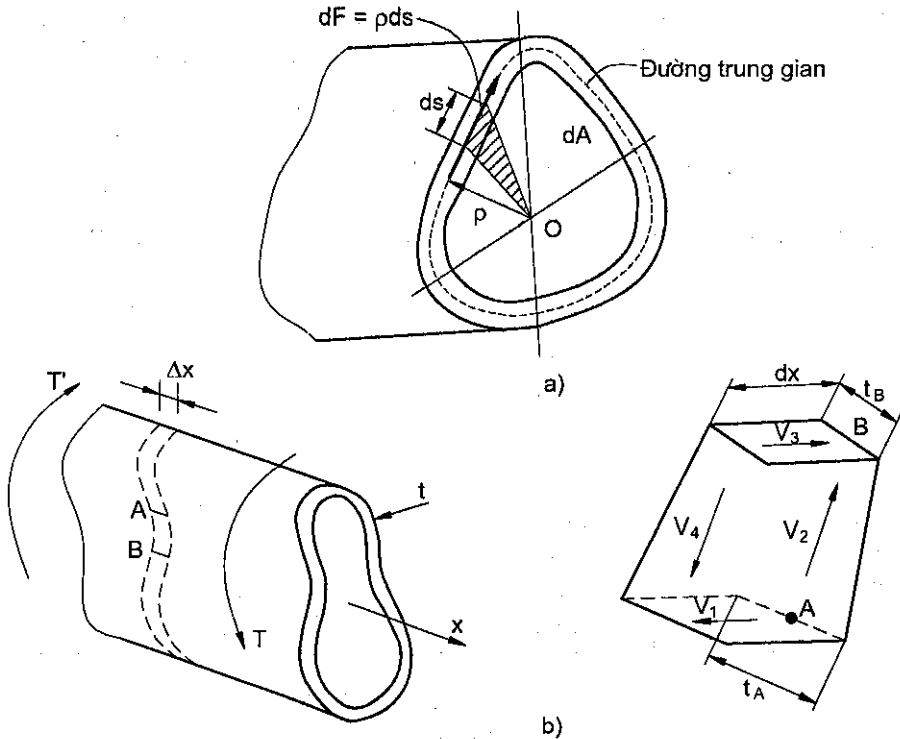


Hình 4.13. Đồ thị các hệ số c_1, c_2 .

4.7. THANH MẶT CẮT NGANG THÀNH MỎNG

Xét thanh hình trụ chịu xoắn có mặt cắt ngang rỗng hình dạng bất kỳ (hình 4.14a). Ta coi bề dày t của thành là rất nhỏ so với các kích thước còn lại của thanh và có thể thay đổi theo chu tuyến của mặt cắt ngang. Ta có thể

sử dụng các kết quả của thanh mặt cắt ngang chữ nhật hẹp ở mục 4.6 vào các mặt cắt thành mỏng hở, đồng thời lý thuyết tương tự màng mỏng có thể áp dụng đối với mặt cắt ngang thành mỏng kín, là các loại kết cấu ứng dụng rộng rãi trong xây dựng, khung máy bay, tàu thủy...



Hình 4.14

Ký hiệu q là tích của ứng suất tiếp và bề dày của thành (đơn vị N/m, gọi là dòng cắt hay *shear flow*). Ta sẽ chứng minh rằng :

$$q = \tau \cdot t = \text{const} \quad (4.27)$$

Cắt một phân tố hình hộp của thanh bằng hai mặt cắt tại A và B (hình 4.14b), và ký hiệu lực cắt trên các mặt của phân tố là V_1, V_2, V_3, V_4 , tổng hình chiếu các lực theo phương x là:

$$V_1 = V_3 \text{ hay : } q_1 dx = q_3 dx \text{ ; từ đó : } q_1 = q_3$$

Thay $q = \tau \cdot t$, ta có: $\tau_1 t_A = \tau_3 t_B$. Ta thấy do ứng suất tiếp trên hai mặt của phân tố vuông góc với nhau tại điểm A bằng nhau, tương tự như vật đối với điểm B. Biểu thức trên có thể viết lại là : $\tau_A t_A = \tau_B t_B$, hay $q_A = q_B$.



Có nghĩa là dòng cắt không thay đổi trên chu tuyến mặt cắt ngang, cho dù bề dày thay đổi. Ta đã chứng minh xong biểu thức (4.27).

Bây giờ ta xét liên hệ giữa mômen xoắn và ứng suất tiếp. Hợp lực của nội lực trên mặt cắt ngang phải cân bằng mômen xoắn ngoại lực T, ta có:

$$T = \int (dF) \cdot \rho = \int (q ds) \cdot \rho = q \int \rho ds = q \int 2dA$$

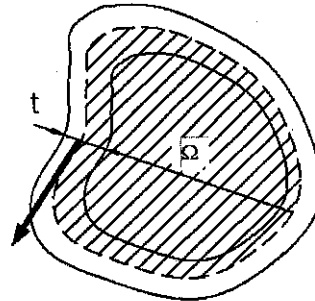
Trong đó dA là diện tích của phân tố hình quạt có bán kính ρ và đáy là ds (hình 4.14 a).

Nếu mặt cắt ngang là thành mỏng kín, ta viết lại biểu thức trên dưới dạng sau:

$$T = \int q(2d\Omega) = 2q\Omega.$$

$$\text{Vậy : } T = 2q\Omega \quad (4.28)$$

Với Ω là diện tích bao bởi đường trung gian của mặt cắt ngang (hình 4.15).



Hình 4.15

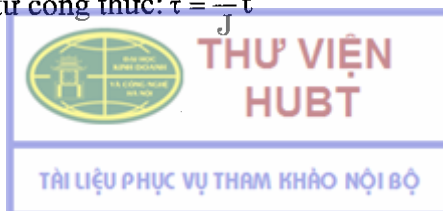
Ứng suất tiếp τ tại điểm bất kỳ được xác định phụ thuộc vào T và kích thước mặt cắt ngang, sử dụng (4.27) và (4.28) : $\tau = \frac{T}{2\Omega t}$ (4.29)

Góc xoắn ϕ của thanh có chiều dài L, môđun trượt của vật liệu G được xác định từ: $\phi = \frac{TL}{4\Omega^2 G} \int \frac{ds}{t}$ (4.30)

Trong đó tích phân được tính theo chiều dài của chu tuyến đường trung gian của mặt cắt ngang. Chú ý rằng các công thức trên chỉ được áp dụng đối với thanh mặt cắt ngang thành mỏng kín.

Đối với thanh thành mỏng hở, ta áp dụng kết quả của mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp, bằng cách chia mặt cắt thành nhiều đoạn, rồi sử dụng hằng số xoắn của toàn bộ mặt cắt: $J = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} t_i^3 s_i$ (4.31)

Trong đó t_i, s_i là bề dày và chiều rộng của đoạn chữ nhật thứ i. Ứng suất tiếp được xác định từ công thức: $\tau = \frac{T}{J} t$ (4.32)

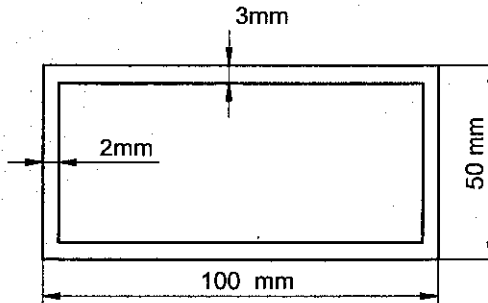


$$\text{Góc xoắn tính bởi: } \phi = \int_0^l \frac{T ds}{GJ} \quad (4.33)$$

Với l là chiều dài của thanh.

Ví dụ 4.5 : Thanh bằng nhôm có chiều dài $L = 1\text{m}$; mặt cắt ngang chữ nhật kích thước $100 \times 50\text{mm}$ (hình 4.16), bề dày của cạnh dài là 3mm , cạnh ngắn là 2mm . Biết ứng suất tiếp lớn nhất của vật liệu là 95MPa , môđun trượt $G = 25\text{GPa}$. Xác định:

- Mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên thanh;
- Góc xoắn của thanh (bỏ qua sự tập trung ứng suất).



Hình 4.16

Giải :

a) Ta thấy do dòng cắt $q = \tau \cdot t = \text{const}$ nên với mặt cắt ngang có bề dày thay đổi theo chu tuyến, ứng suất tiếp lớn nhất sẽ đạt được tại chỗ có bề dày nhỏ nhất. Do đó ta có từ (4.27):

$$q_{\max} = \tau \cdot t_{\min} = 95 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 190 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên thanh xác định theo công thức (4.28) :

$$T = 2q \cdot \Omega = 2 \cdot 190 \cdot 10^3 \cdot (100 - 2)(50 - 3) \cdot 10^{-6} = 1750 \text{ Nm}$$

b) Góc xoắn của thanh xác định theo công thức (4.33) :

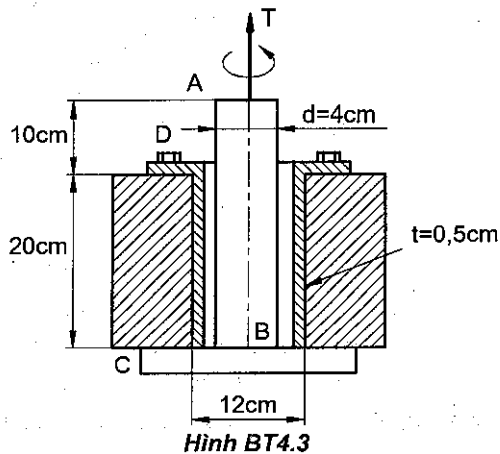
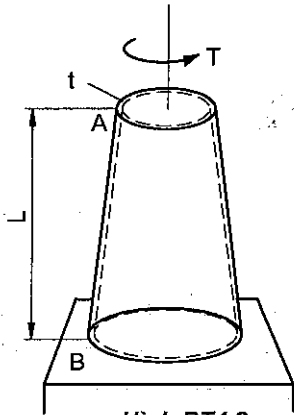
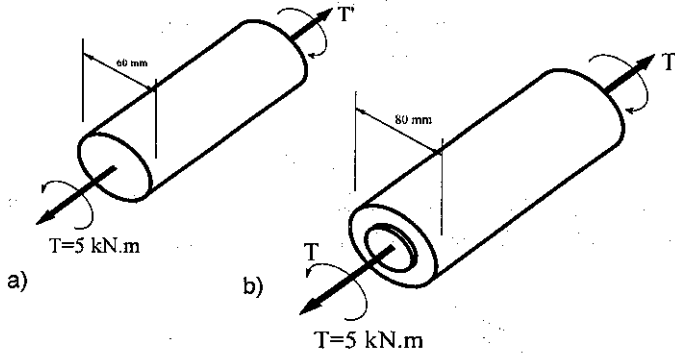
$$\text{Hằng số xoắn : } J = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} t_i^3 s_i = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (2^3 \cdot 98 + 3^3 \cdot 47) \cdot 10^{-12} = 1,302 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\text{Góc xoắn : } \phi = \int_0^l \frac{T ds}{GJ} = \frac{1750 (\text{Nm}) \cdot 1 (\text{m})}{25 \cdot 10^9 (\text{N} / \text{m}^2) \cdot 1,302 \cdot 10^{-9} (\text{m}^4)} = 53,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1. a) Cho trục đặc đường kính 60mm, chịu tải trọng như hình BT4.1a, xác định ứng suất tiếp lớn nhất.

b) Xác định đường kính trong của trục rỗng có đường kính ngoài 80mm (hình BT4.1b), với ứng suất tiếp lớn nhất giống như phần a.

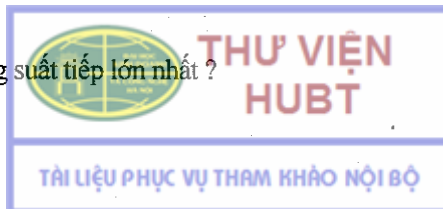


4.2. Xác định góc xoắn tại đầu tự do A của thanh có mặt cắt ngang thay đổi theo các thông số T , L , c_A , c_B , t , G (hình BT4.2).

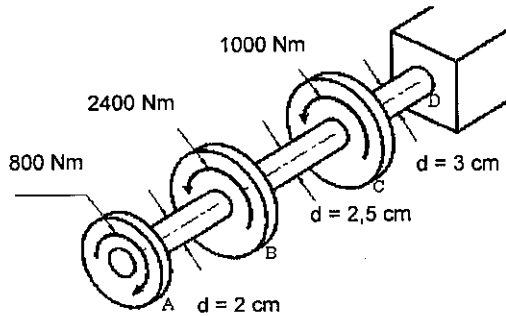
4.3. Trục AB đặc có đường kính $d = 4\text{cm}$, được làm bằng thép có ứng suất tiếp cho phép 12kN/cm^2 , trong khi phần khung CD làm bằng đồng với ứng suất tiếp cho phép là 7kN/cm^2 (hình BT4.3). Xác định mômen xoắn lớn nhất T có thể tác động lên đầu A của trục (chiều dày của khung CD là $t = 0,5\text{cm}$).

4.4. Trục đặc gồm các đoạn AB, BC, CD chịu mômen xoắn và kích thước như hình BT 4.4. Xác định:

a) Trục nào chịu ứng suất tiếp lớn nhất?

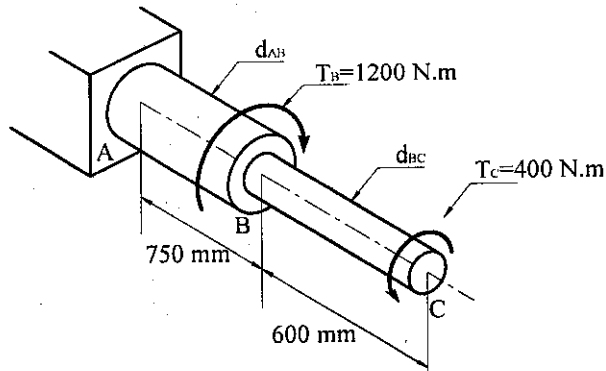


b) Độ lớn của ứng suất tiếp đó? (Cho : $d_{AB} = 2\text{cm}$; $d_{BC} = 2,5\text{cm}$; $d_{CD} = 3\text{cm}$.)



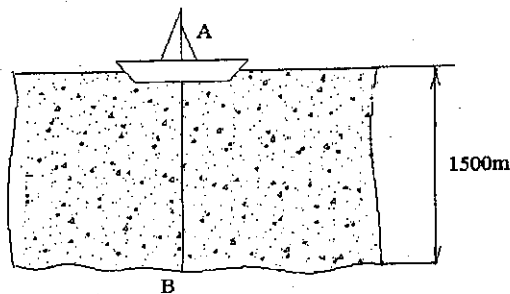
Hình BT4.4

4.5. Trục bạc bằng đồng có ứng suất tiếp cho phép 55 MPa. Bỏ qua sự tập trung ứng suất, xác định đường kính nhỏ nhất d_{AB} và d_{BC} của các đoạn AB và BC (hình BT4.5)?



Hình BT4.5

4.6. Tàu khoan thăm dò dầu khí tại A ở độ sâu thềm lục địa là 1500m (hình BT4.6). Biết rằng đầu trên của trục khoan bằng thép đường kính 200mm ($G = 77,2\text{GPa}$) quay tròn 2 vòng trước khi mũi khoan tại B bắt đầu hoạt động. Xác định ứng suất tiếp lớn nhất của trục khoan do xoắn gây nên.

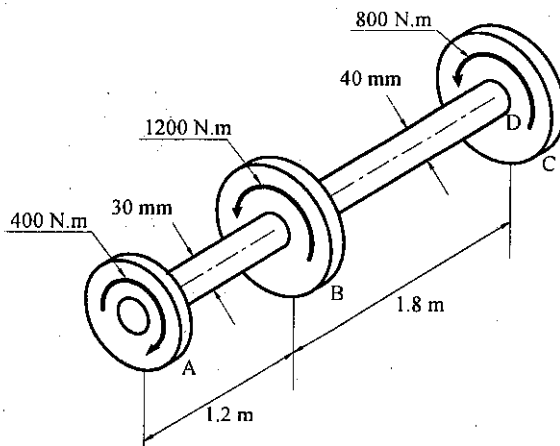


Hình BT4.6



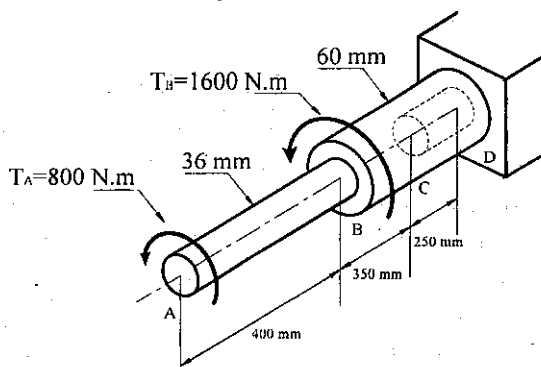
4.7. Mômen xoắn tác động lên các bánh đà A, B và C (hình BT4.7). Biết hai thanh AB và BC mặt cắt ngang đặc và bằng đồng ($G = 39\text{GPa}$), xác định góc xoắn giữa hai mặt cắt:

- a) A và B;
- b) A và C.



Hình BT4.7

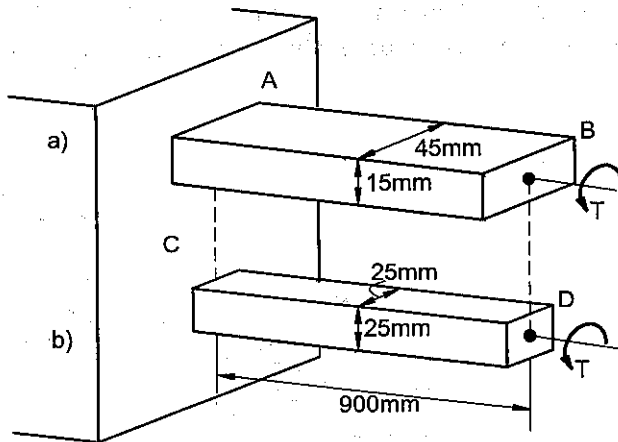
4.8. Trục AB bằng nhôm có đường kính 36mm ($G = 27\text{GPa}$) được gắn với trục rỗng bằng đồng BD ($G = 39\text{GPa}$). Biết đường kính trong và ngoài của trục BD là 40mm và 60mm (hình BT4.8); xác định góc xoắn tại A.



Hình BT4.8

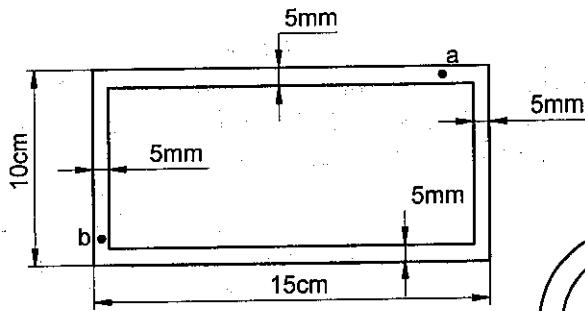
4.9. Biết mômen xoắn tác dụng lên hai thanh AB và CD là $T = 200\text{Nm}$, môđun trượt của nhôm $G = 27\text{GPa}$, xác định ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại đầu tự do của mỗi thanh (hình BT4.9). Cho biết: $L = 900\text{mm}$; kích thước mặt cắt ngang:

- a) $15 \times 45\text{mm}$; b) $25 \times 25\text{mm}$.



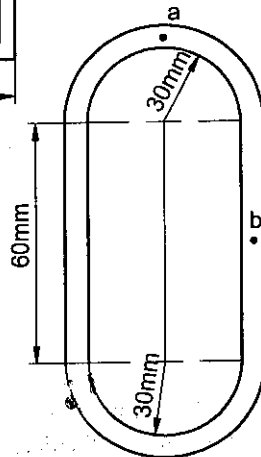
Hình BT4.9

4.10. Mômen xoắn 5kNm tác dụng lên trục bằng nhôm có mặt cắt ngang rỗng như hình BT4.10, bề dày không đổi $t = 5\text{mm}$. Bỏ qua sự tập trung ứng suất, xác định ứng suất tiếp tại điểm a và b.



Hình BT4.10

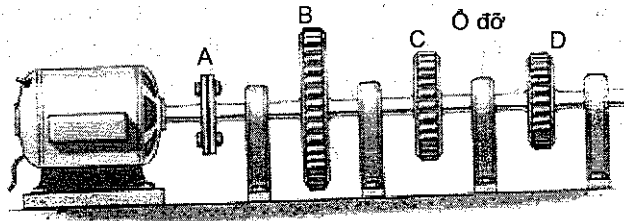
4.11. Mômen xoắn 750N.m tác dụng lên trục có mặt cắt ngang rỗng như hình BT4.11, bề dày không đổi $t = 6\text{mm}$. Bỏ qua sự tập trung ứng suất, xác định ứng suất tiếp tại điểm a và b.



Hình BT4.11

4.12. Một động cơ cung cấp mômen xoắn 5,5kNm cho một trục thép ($G = 80\text{GPa}$) đường kính không đổi như hình BT4.12. Ba máy được truyền động bởi các bánh răng B, C và D gắn với trục và chịu các mômen xoắn ngoại lực lần lượt là 3kNm, 1,5 kNm, 1kNm. Xác định :

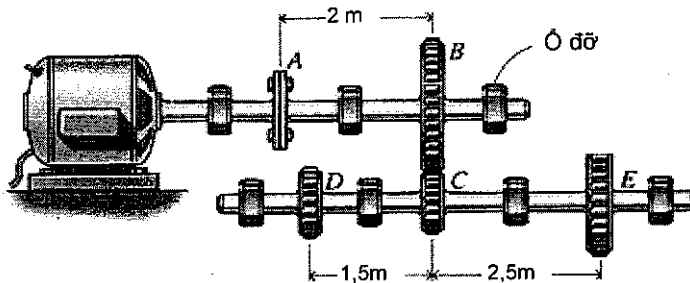
- Đường kính nhỏ nhất của trục nếu ứng suất tiếp lớn nhất là 100MPa.
- Góc xoắn tại D so với A nếu các bánh răng cách nhau một khoảng 2 m và đường kính trục là 75mm.



Hình BT4.12

4.13. Một động cơ cung cấp mômen xoắn 45kNm cho trục AB. Hai máy được truyền động bởi các bánh răng D và E. Mômen xoắn tác động lên bánh răng E là 8kNm . Trục AB và DCE bằng thép có $G = 80\text{GPa}$ và đường kính lần lượt là 150mm và 80mm (hình BT4.13). Nếu đường kính của bánh răng B và C tương ứng là 450mm và 150mm , xác định :

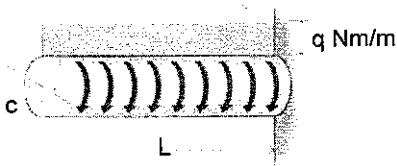
- Ứng suất tiếp lớn nhất của trục AB
- Ứng suất tiếp lớn nhất của trục DCE
- Góc xoắn giữa các bánh răng E và D.



Hình BT4.13

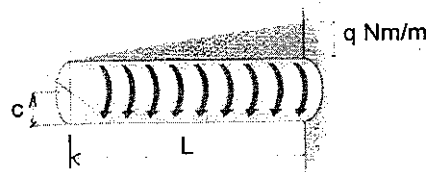
4.14. Một trục đặc chịu tác dụng của mômen xoắn phân bố đều theo chiều dài (hình BT4.14). Xác định góc xoắn tại đầu tự do theo các thông số q , L , G , c .

Mômen xoắn phân bố



Hình BT4.15

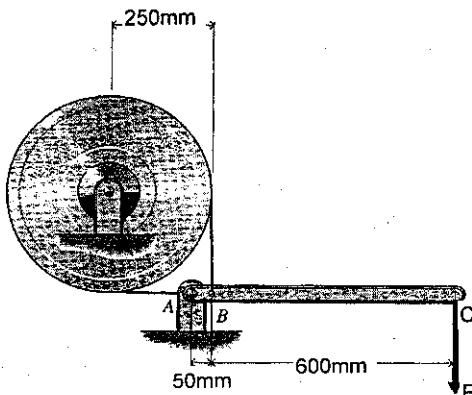
Mômen xoắn phân bố



Hình BT4.14

4.15. Một trục đặc chịu tác dụng của mômen xoắn phân bố bậc nhất theo chiều dài (hình BT4.15). Xác định góc xoắn tại đầu tự do theo các thông số q , L , G , c .

4.16. Bàn phanh của máy nâng chuyên (hình BT4.16) có hệ số ma sát giữa dây đai và trống có đường kính 500mm là 0,20. Lực P tối đa tác dụng lên tay phanh là 490N. Biết trống quay theo chiều kim đồng hồ. Xác định kích thước mặt cắt ngang của trục bằng thép có ứng suất tiếp cho phép là 55MPa. Biết trục có mặt cắt ngang vành khăn với bề dày bằng 5mm.



Hình BT 4.16

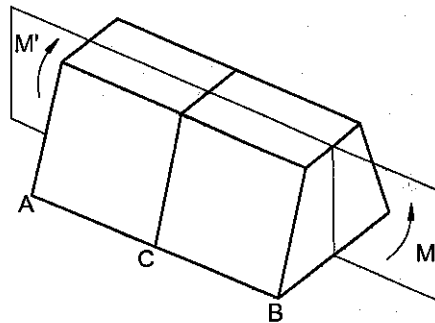
Chương 5

UỐN THUẦN TÚY

5.1. KHÁI NIỆM

Trong chương này ta sẽ xét trường hợp chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn khác không. Khi đó thanh gọi là chịu *uốn thuần túy*. Sự phân bố ứng suất pháp và giá trị của độ cong khi thanh biến dạng cũng được xác định.

Ví dụ: Thanh chịu uốn thuần túy khi chịu tác động của cặp mômen bằng nhau nhưng ngược chiều M và M' trên mặt phẳng đối xứng của mặt cắt ngang (hình 5.1). Trục của bánh xe hỏa (hình 5.2) khi chịu tác dụng của trọng lượng toa xe tại hai điểm cách đều bánh xe sẽ có mômen uốn M khác không tại phần giữa trục, trong khi lực cắt V bằng không, ta thấy đoạn giữa AB của trục chịu uốn thuần túy.

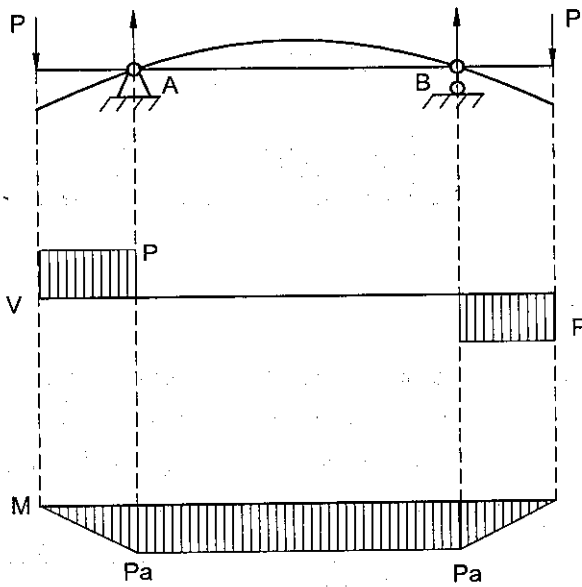


Hình 5.1

5.2. UỐN THUẦN TÚY THANH MẶT CẮT NGANG ĐỐI XỨNG

Từ hình 5.1, ta thấy nếu cắt thanh AB tại điểm C bất kỳ, nội lực trên mặt cắt ngang cân bằng với mômen M . Chiều của M quy ước là dương nếu như khi thanh biến dạng hướng bẻ lõm lên trên, và có dấu âm nếu chiều ngược lại (hình 5.2).





Hình 5.2



Hình 5.3. Thiết bị đo ứng suất của dầm chịu uốn

Ký hiệu σ_x là ứng suất pháp, τ_{xy} và τ_{xz} là ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang, ta có thể viết các phương trình cân bằng tĩnh học sau:



$$\sum F_x = \int \sigma_x dA = 0 \quad (5.1)$$

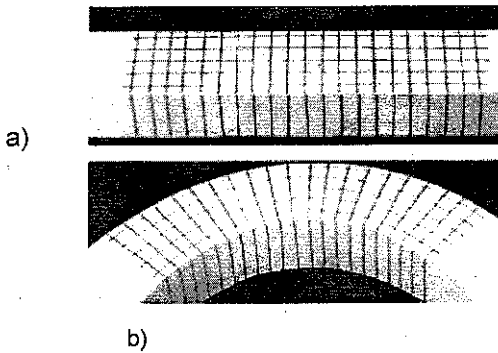
$$\sum M_y = \int z \sigma_x dA = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum M_z = \int (y \sigma_x) dA = -M \quad (5.3)$$

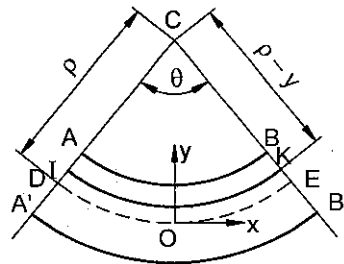
Các phương trình cân bằng tĩnh học còn lại chỉ chứa ứng suất tiếp mà ta sẽ thấy chúng bằng không. Dấu trừ trong phương trình cuối chỉ rằng ứng suất kéo tác dụng tại phân tử diện tích dA cách trục z khoảng cách bằng y ($\sigma_x > 0$) gây ra mômen uốn với trục z có chiều âm (bê lõm xuống dưới).

5.3. BIẾN DẠNG CỦA DÀM CHỊU UỐN THUẦN TÚY

Ta xét biến dạng của thanh lăng trụ có mặt cắt ngang đối xứng chịu uốn thuần túy.



Hình 5.4



Hình 5.5

Thực nghiệm đã chỉ ra rằng có thể chấp nhận các giả thuyết sau : Các thớ dọc song song với trục của thanh trước biến dạng thì vẫn song song với trục thanh; mặt cắt ngang luôn phẳng và vuông góc với trục thanh. Trên hình 5.4a ta thấy dầm được chia thành nhiều phần tử nhỏ hình lập phương có các mặt song song với trục tọa độ, và hình 5.4b là các phần tử đó sau biến dạng. Do các góc vuông không thay đổi ta có: $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$, hay theo định luật Húc $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Từ các giả thuyết trên, ta rút ra σ_y , σ_z , và τ_{zy} cũng bằng không, chỉ còn thành phần ứng suất pháp duy nhất khác không là σ_x . Do vậy đối với điểm bất kỳ trên thanh chịu uốn thuần túy, ta có trạng thái ứng suất đơn.

Trên hình 5.5, đường AB co lại sau biến dạng, còn A'B' sẽ dẫn dài ra, ta thấy đường DE không bị thay đổi chiều dài, gọi là đường trung hòa. Mặt cong trên có ứng suất pháp σ_x và do đó biến dạng dài ϵ_x bằng không, gọi là *mặt trung hòa*. Giao tuyến của mặt trung hòa với mặt cắt ngang gọi là *trục trung hòa*.

Ký hiệu ρ là bán kính cong của DE (hình 5.5), và góc ở tâm tương ứng với cung DE là θ , ta có: $L = \rho.\theta$ (5.4)

Với L là chiều dài của đoạn thanh trước biến dạng. Xét cung IK có chiều dài L' cách mặt trung hòa khoảng cách y , ta có :

$$L' = (\rho - y).\theta \quad (5.5)$$

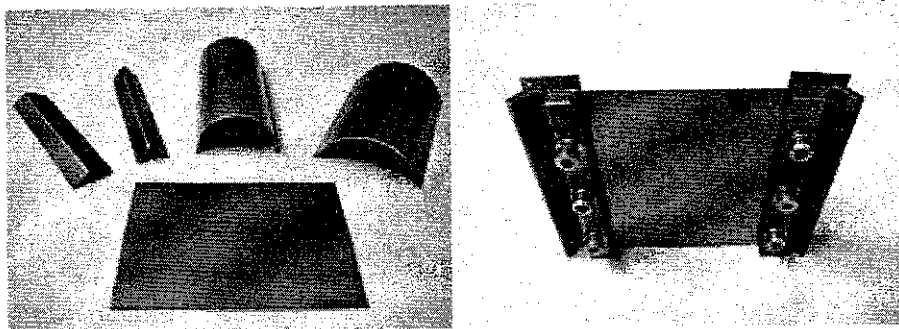
Biến dạng dài của IK là :

$$\delta = L' - L = (\rho - y).\theta - \rho.\theta = -y.\rho \quad (5.6)$$

Biến dạng dài tỷ đối ϵ_x của cung IK xác định từ:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (5.7)$$

Dấu trừ chỉ rằng ta giả thiết thanh bị uốn bởi mômen dương, có nghĩa là bề lõm hướng lên trên, do đó đoạn IK bị co lại. Hình 5.6 biểu diễn mẫu biến dạng sau khi chịu uốn thuần túy.



Hình 5.6. Biến dạng của mẫu chịu uốn thuần túy

Từ (5.7) ta rút ra biến dạng dài tỷ đối ϵ_x phụ thuộc tuyến tính theo khoảng cách y so với mặt trung hòa.

Ký hiệu ϵ_m là biến dạng dài tỷ đối lớn nhất, ta có:

$$\epsilon_x = \frac{c}{\rho} ; \text{ do đó } \epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (5.8)$$

5.4. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG MIỀN ĐÀN HỒI

Từ định luật Húc, ký hiệu E là môđun đàn hồi của vật liệu, ta có:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (5.9)$$

Thay (5.8) vào (5.9) :

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} E \varepsilon_m = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (5.10)$$

Từ (5.1) và (5.10) ta thu được:

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

Do đó: $\int y dA = 0$, hay trục trung hòa đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Từ công thức (5.3) ta có liên hệ giữa mômen uốn và ứng suất pháp:

$$\int -y \sigma_x dA = M \quad (5.11)$$

Dấu trừ để chỉ rằng mômen uốn có chiều dương (bề lõm của thanh hướng lên trên) nếu ứng suất pháp tác dụng lên phân tố có khoảng cách y dưới trục z tùy ý.

Thay (5.10) vào (5.11) ta có :

$$\int -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_m\right) dA = M \quad (5.12)$$

$$\text{Hay } \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M$$

Mặt khác tích phân trong biểu thức trên chính là mômen quán tính của mặt cắt đối với trục z, vậy:

$$\sigma_m = \frac{M \cdot c}{I_z}, \text{ và } \sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I_z} \quad (5.13)$$

Hình 5.7 biểu diễn sự phân bố của ứng suất pháp theo khoảng cách đến trục trung hòa của mặt cắt ngang.

$$\text{Từ (5.8) ta có: } \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c}$$

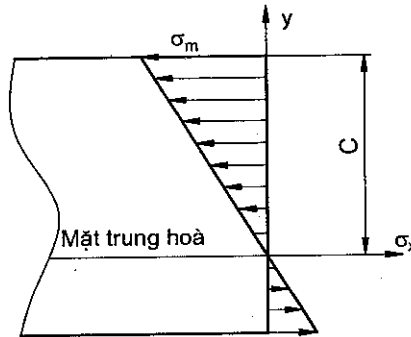
Thay thế $\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E}$, ta nhận được:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E.c} = \frac{1}{E.c} \frac{M.c}{I_z} \quad (5.14)$$

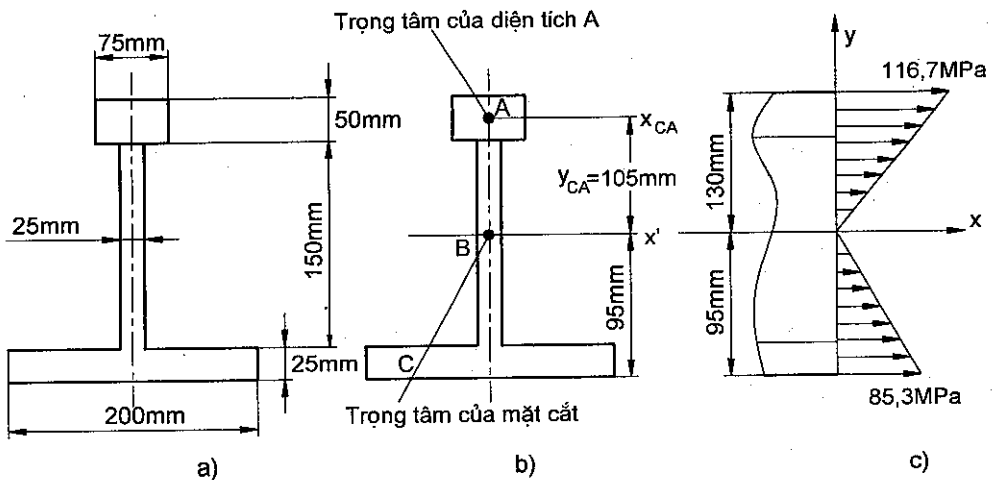
$$\text{Hay : } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I_z} \quad (5.15)$$

Công thức trên của độ cong đường đàn hồi (trục của dầm sau khi biến dạng) sẽ được sử dụng để xác định độ võng và góc xoay của dầm khi chịu uốn.



Hình 5.7

Ví dụ 5.1 : Dầm có mặt cắt ngang như hình 5.8, chịu mômen uốn bằng -75kNm . Xác định ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu kéo và chịu nén.



Giải: Các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang:

$$\text{Diện tích : } A = 200.(25) + 150.(25) + 50.(75) = 12500(\text{mm}^2)$$

Mômen tĩnh của diện tích mặt cắt đến cạnh đáy là:

$$Q = 22.(25)(12,5) + 25(150).(100) + 75(50)(2000) = 1187500\text{mm}^3$$

Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt y_C đến cạnh đáy là:

$$y_C = \frac{Q}{A} = \frac{1187500}{12500} = 95\text{mm}$$

Mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hòa xác định từ công thức chuyển trục song song :

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_{x'}^{(A)} + I_{x'}^{(B)} + I_{x'}^{(C)} = \left[I_x^{(A)} + y_{CA}^2 \cdot A_{(A)} \right] + \left[I_x^{(B)} + y_{CB}^2 \cdot A_{(B)} \right] \\ &\quad + \left[I_x^{(C)} + y_{CC}^2 \cdot A_{(C)} \right] \\ &= \left[\frac{75(50)^3}{12} + (105)^2 \cdot (75)(50) \right] + \left[\frac{25(150)^3}{12} + (5)^2 \cdot (25)(150) \right] + \\ &\quad + \left[\frac{200(25)^3}{12} + (-82,5)^2 \cdot (200)(25) \right] \\ &= 42,13 \cdot 10^6 + 7,13 \cdot 10^6 + 34,29 \cdot 10^6 = 83,55 \cdot 10^6 (\text{mm}^4) = 83,55 \cdot 10^{-6} (\text{m}^4) \end{aligned}$$

a) Ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu kéo đạt được tại mép trên của mặt cắt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{M \cdot y_{\max}^{(T)}}{I} = -\frac{(75) \cdot 10^3 \cdot (130) 10^{-3}}{83,55 \cdot 10^{-6}} = 116,7 \cdot 10^6 (\text{N/m}^2) \\ &= 116,7 (\text{MPa}) \end{aligned}$$

b) Ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu nén đạt được tại mép dưới của mặt cắt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{M \cdot y_{\max}^{(C)}}{I} = -\frac{(75) \cdot 10^3 \cdot (-95) 10^{-3}}{83,55 \cdot 10^{-6}} = -85,28 \cdot 10^6 (\text{N/m}^2) \\ &= -85,28 (\text{MPa}) \end{aligned}$$



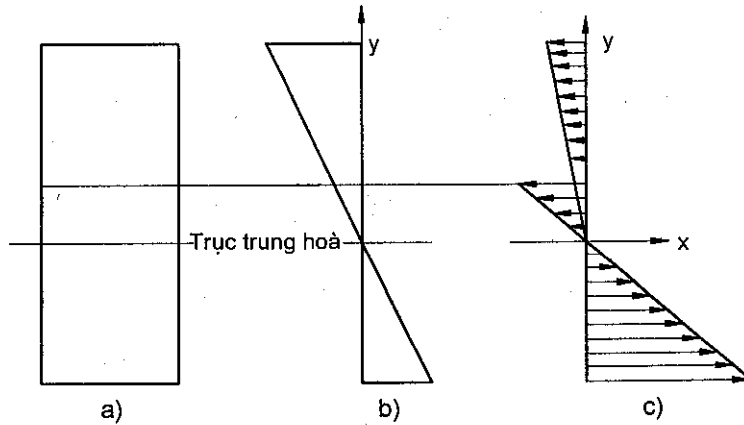
5.5. UỐN DÀM LÀM TỪ CÁC VẬT LIỆU KHÁC NHAU

Các công thức ở mục trên dựa trên cơ sở giả thuyết về vật liệu đồng nhất với môđun đàn hồi của vật liệu E đã cho. Nếu thanh chịu uốn thuần túy được làm từ hai hoặc nhiều vật liệu khác nhau, ta cần tiếp cận theo cách khác để xác định ứng suất trên dầm.

Xét dầm gồm hai thanh vật liệu khác nhau (có môđun đàn hồi là E_1 và E_2) được gắn liền như hình 5.9. Do việc tính biến dạng dài tỷ đối không liên quan đến vật liệu, ta có:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{x1} = -\frac{E_1 \cdot y}{\rho}; \sigma_{x2} = -\frac{E_2 \cdot y}{\rho}$$



Hình 5.9

Tuy nhiên, ta không thể giả thiết rằng trục trung hòa đi qua trọng tâm mặt cắt ngang, biểu thức của ứng suất pháp đối với từng vật liệu được xác định bởi:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho}$$

$$\text{Và: } \sigma_2 = E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \quad (5.17)$$

Chú ý rằng nội lực tác dụng lên phân tố có diện tích dA của phần phía trên mặt cắt là:



$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA$$

Và đối với phần dưới của mặt cắt :

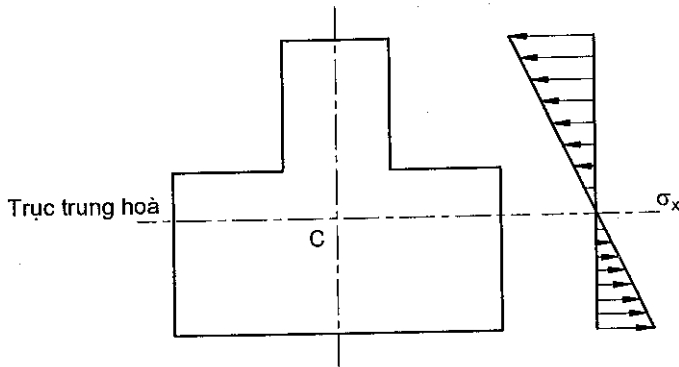
$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \quad (5.18)$$

Ký hiệu tỷ lệ giữa môđun đàn hồi của các vật liệu bằng hệ số $n = E_2/E_1$, khi đó công thức (5.18) sẽ có dạng:

$$dF_2 = -\frac{nE_1 y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (ndA) \quad (5.19)$$

So sánh dF_1 và (5.19), ta thấy cũng lực dF_2 có thể tác dụng lên phần diện tích bằng (ndA) của vật liệu thứ nhất. Nói cách khác, độ bền khi uốn của dầm là như nhau nếu cả hai phần thanh được làm từ vật liệu thứ nhất, nhưng có bề rộng của phần dưới mặt cắt ngang được nhân với hệ số bằng n .

Mặt cắt ngang mới thu được bằng cách trên gọi là *mặt cắt quy đổi* của dầm (hình 5.10). $\sigma_x = -\frac{M.y}{I}$



Hình 5.10. Phân bố ứng suất trên mặt cắt quy đổi

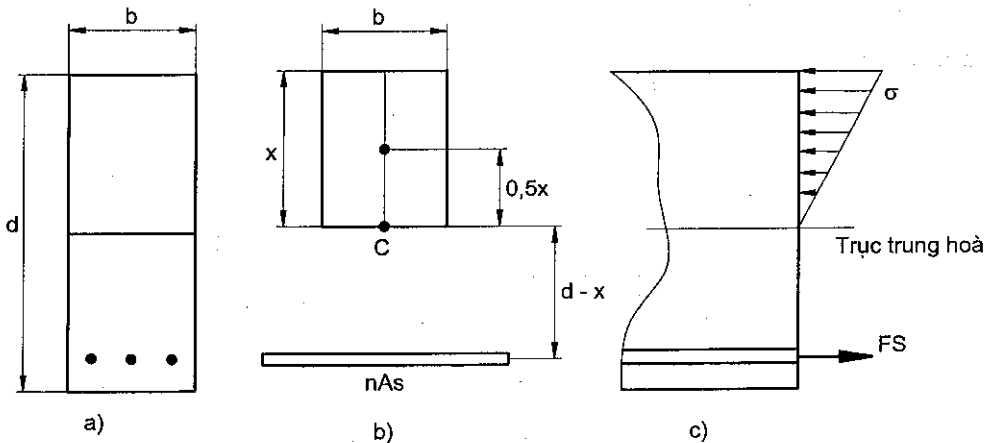
Trục trung hòa bây giờ có thể vẽ qua trọng tâm của diện tích mặt cắt ngang quy đổi, ứng suất pháp σ_x tại điểm bất kỳ của dầm quy đổi đồng nhất xác định như sau: $\sigma_x = -\frac{M.y}{I}$ (5.20)

Trong đó y là khoảng cách đến mặt trung hòa, I là mômen quán tính của diện tích quy đổi đối với trục trung hòa của diện tích đó.

Biến dạng của dầm composite có thể xác định bằng cách sử dụng mặt cắt ngang quy đổi với môđun đàn hồi “đồng nhất” E_1 . Độ cong của dầm xác định bởi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I} \quad (5.21)$$

Trong thực tế xây dựng, một ví dụ quan trọng về kết cấu làm từ các vật liệu khác nhau là *dầm bê tông cốt thép*. Khi chịu tác dụng của mômen uốn có chiều dương được gia cường bằng các thanh thép ở khoảng cách nhỏ từ phần đáy mặt cắt (hình 5.11a). Do bê tông là vật liệu giòn, chịu kéo yếu, dầm sẽ bị phá hủy ở phần dưới của mặt trung hòa và khi đó các thanh thép sẽ chịu toàn bộ tải trọng kéo, trong khi phần trên của mặt cắt chịu tải trọng nén. Ta thay toàn bộ diện tích A_s của các thanh thép bằng *diện tích tương đương* $n.A_s$, với n là tỷ lệ E_s/E_c (ký hiệu E_s, E_c lần lượt là môđun đàn hồi của thép và bê tông).



Hình 5.11

Vị trí của trục trung hòa được xác định bằng cách tính khoảng cách x từ mép trên của dầm đến trọng tâm C của diện tích quy đổi (hình 5.11b). Từ phương trình mômen tĩnh của diện tích quy đổi đối với trục trung hòa (cũng là trục trung tâm của mặt cắt) phải bằng không, ta có:

$$bx\left(\frac{x}{2}\right) - nA_s(d - x) = 0 \quad (5.22)$$

Hay: $\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \quad (5.23)$

Giải phương trình trên đối với x , ta thu được vị trí của trục trung hòa, đồng thời cũng là phần trên của mặt cắt bằng bê tông sẽ được sử dụng một cách hợp lý. Hình 5.11c biểu diễn sự phân bố ứng suất nén của phần bên trên mặt cắt bằng bê tông, và hợp lực kéo F_s trên thanh thép ở phần dưới của mặt cắt. Biến dạng của dầm composite có thể xác định từ diện tích quy đổi như trên:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I} \quad (5.24)$$

Ở đây E_1 là môđun đàn hồi của dầm quy đổi đồng nhất, I là mômen quán tính đối với trục trung hòa của diện tích mặt cắt ngang quy đổi.

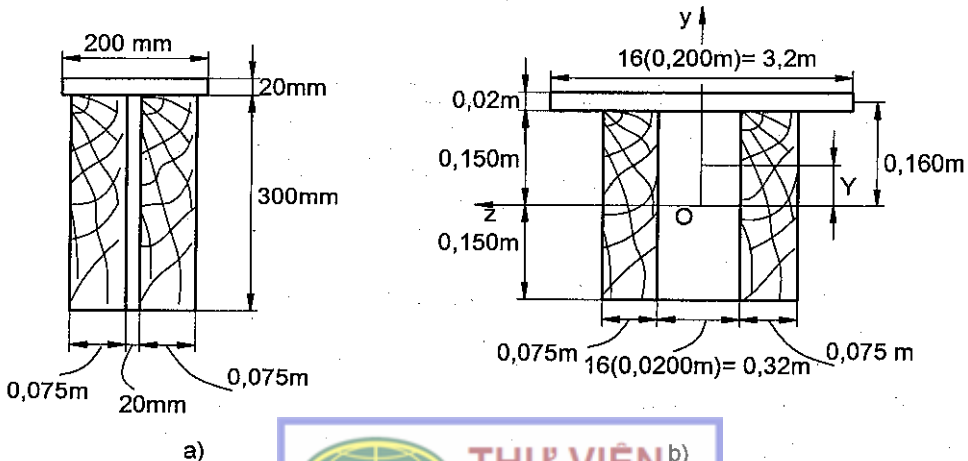
Ví dụ 5.2. Hai tấm bằng thép được hàn vào nhau thành hình chữ T và được gia cường bằng cách bắt vít với các thanh gỗ như hình 5.12a. Cho biết môđun đàn hồi của gỗ là 12,5GPa, của thép là 200GPa. Thanh chịu mômen uốn $M = 50\text{kNm}$, xác định :

- Ứng suất pháp lớn nhất của thanh ghép;
- Ứng suất pháp của thanh thép ở mép trên mặt cắt ngang.

Giải: Trước hết ta tìm diện tích quy đổi của mặt cắt ngang. Hệ số các môđun đàn hồi của vật liệu là:

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200\text{GPa}}{12,5\text{GPa}} = 16$$

Trong đó E_s là môđun đàn hồi của thép, E_w là môđun đàn hồi của gỗ. Ta nhân bề rộng của phần thanh thép với hệ số n sẽ thu được diện tích quy đổi của mặt cắt ghép được coi là làm đồng nhất bằng gỗ (hình 5.12b).



Vị trí trục trung hòa được xác định như sau: Do mặt cắt ghép gồm hai hình chữ nhật (nằm ngang phía trên và phần thân ở dưới, ta có vị trí trọng tâm của mặt cắt (so với trục trung tâm của phần dưới) tính theo công thức :

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(0,16)(3,2 \cdot 0,002) + 0}{3,2 \cdot 0,002 + 0,47 \cdot 0,30} = 0,05(\text{m})$$

Mômen quán tính trung tâm của mặt cắt quy đổi xác định từ công thức chuyển trục song song :

$$I_z = \frac{1}{12}(0,47)(0,30)^3 + (0,47) \cdot 0,30 \cdot (0,05)^2 + \frac{1}{12}(3,2)(0,02)^3 + (3,2) \cdot 0,02 \cdot (0,16 - 0,05)^2 = 2,19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

– Ứng suất lớn nhất trong thanh gỗ

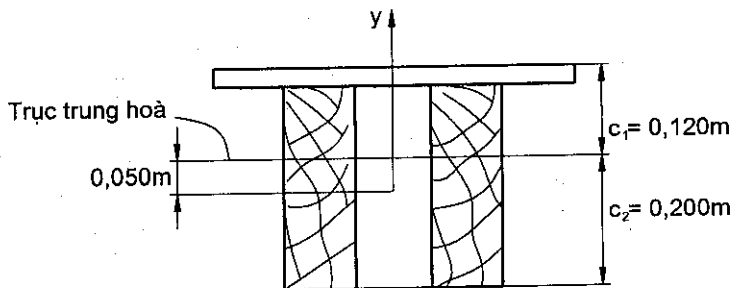
Tại điểm cách xa trục trung hòa nhất (mép dưới mặt cắt) của phần gỗ, với $c_2 = 0,20\text{m}$:

$$\sigma_w = \frac{M \cdot c_2}{I_z} = \frac{(50 \cdot 10^3)(0,20)}{2,19 \cdot 10^{-3}} = 4,57 \text{ MPa}$$

– Ứng suất lớn nhất của thanh thép

Đối với điểm cách xa trục trung hòa nhất (mép trên mặt cắt) của phần thép, ta có $c_1 = 0,12\text{m}$ (hình 5.12c). Từ diện tích quy đổi thành vật liệu gỗ đồng nhất, ta có ứng suất của phần thép sẽ gấp n lần (do diện tích thực của thép chỉ bằng 1/n diện tích quy đổi):

$$\sigma_s = n \frac{M \cdot c_1}{I_z} = 16 \cdot \frac{(50 \cdot 10^3)(0,120)}{2,19 \cdot 10^{-3}} = 43,8 \text{ MPa}$$

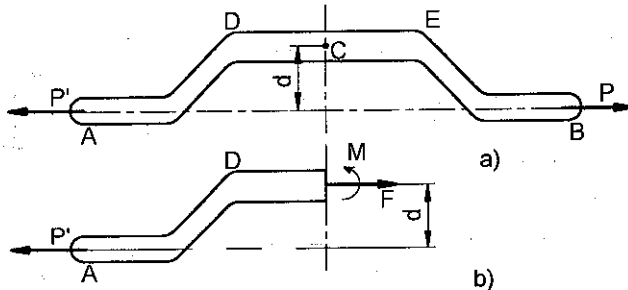


Hình 5.12c

Tra bảng các đặc trưng cơ học của thép và gỗ (xem phụ lục A), ta thấy kết cấu đủ bền (đối với thép là 250MPa, với gỗ là 30MPa).

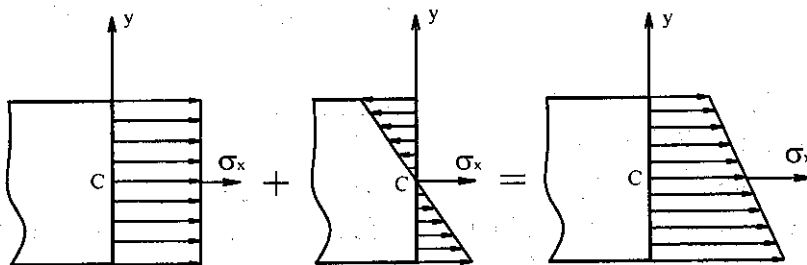
5.6. TẢI TRỌNG LỆCH TÂM TÁC DỤNG TRONG MẶT PHẪNG ĐỐI XỨNG

Khi tải trọng không đi qua trọng tâm của mặt cắt, ta gọi đó là *tải trọng lệch tâm*. Ví dụ như trên các đường cao tốc, trọng lượng của đèn đường (và các thiết bị) gây nên sự nén lệch tâm đối với cột đèn. Xét thanh chịu tác dụng của cặp lực P và P' (hình 5.13), điều kiện cân bằng tĩnh học cho ta các nội lực F và M như sau: $F = P$; $M = P.d$ (5.25)



Hình 5.13

Sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang thu được bằng phương pháp cộng tác dụng (hình 5.14).

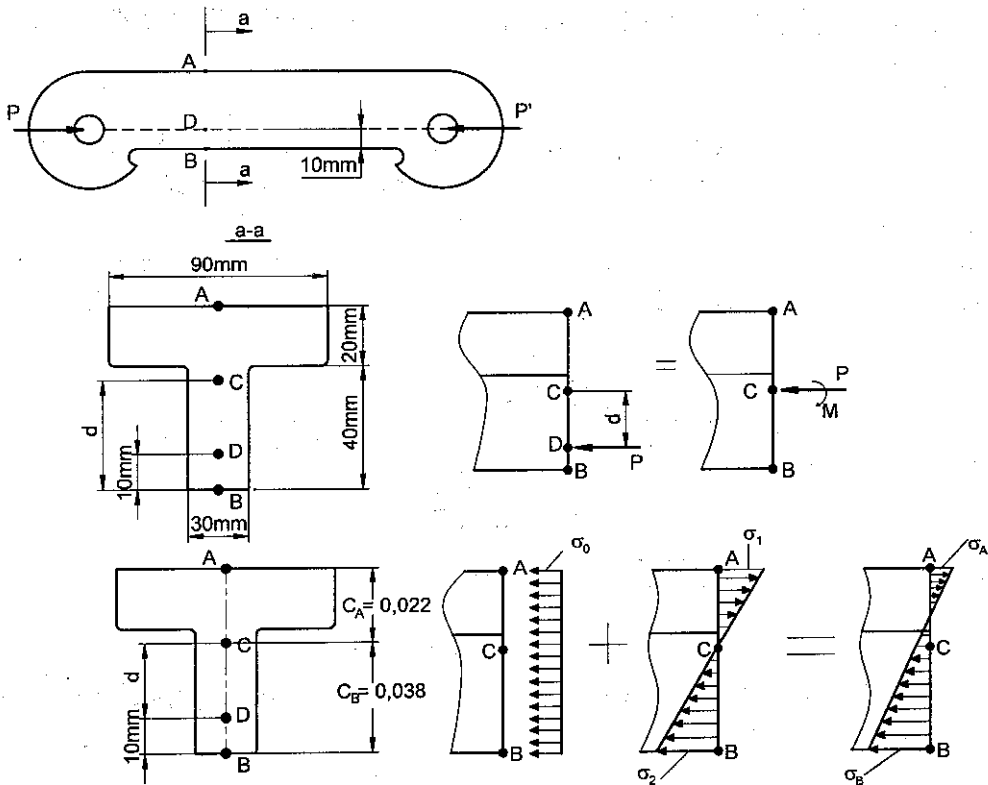


Hình 5.14

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M.y}{I_z} \quad (5.26)$$

Ta thấy luật phân bố của ứng suất pháp theo chiều cao mặt cắt ngang là tuyến tính và có dấu bất kỳ. Khi ứng suất thay đổi dấu, các vị trí tương ứng với ứng suất bằng không tạo nên trục trung hòa. Chú ý rằng *trục trung hòa trong trường hợp tải trọng lệch tâm không đi qua trọng tâm của mặt cắt và do đó không trùng với bất kỳ trục trung tâm nào*.

Ví dụ 5.3: Một thanh giằng bằng gang có ứng suất pháp cho phép khi kéo bằng 30MPa, khi nén là 120MPa, xác định lực P có thể tác dụng lên thanh (mặt cắt ngang tại a-a có dạng chữ T, kích thước như hình 5.15).



Hình 5.15

Giải : Ta xác định các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang (bạn đọc có thể tự tính, coi đây là bài tập về chương 3).

$A = 3000\text{mm}^2 = 3.10^{-3}\text{m}^2$, $\bar{Y} = 38\text{mm} = 0,038\text{m}$; $I_z = 868.10^{-9}\text{m}^4$.
 Khoảng cách d từ trọng tâm C của mặt cắt đến đường tác dụng của lực P là :

$$d = 0,038\text{m} - 0,010\text{m} = 0,028\text{m}$$

Ta thay thế lực P bằng lực nén đúng tâm và mômen uốn tại C :

$$M = P \cdot d = 0,028P$$

Ứng suất pháp do lực nén đúng tâm và do mômen uốn xác định từ công thức:

$$\sigma_0 = -\frac{P}{A} = -\frac{0,028P}{3.10^{-3}} = -333P$$

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot c_A}{I_z} = \frac{0,028P \cdot (0,022)}{868.10^{-9}} = 710P$$

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot c_B}{I_z} = \frac{0,028P \cdot (-0,038)}{868.10^{-9}} = -1226P$$



Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có ứng suất tổng tại điểm mép trên và mép dưới của mặt cắt là:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M.c_A}{I_z} = 377P$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{M.c_B}{I_z} = -1559P$$

Điều kiện bền của thanh đòi hỏi ứng suất lớn nhất tại A và B không vượt quá ứng suất cho phép khi kéo và khi nén, từ đó ta tính được lực tác dụng lớn nhất P :

$$\sigma_A = 377P = 30\text{MPa} ; P = 79,6(\text{kN})$$

$$\sigma_B = -1559P = -120\text{MPa} ; P = 77,0(\text{kN})$$

Vậy lực P phải thỏa mãn đồng thời điều kiện bền tại các điểm nguy hiểm A và B, nên ta chọn giá trị nhỏ nhất $P = 77,0\text{kN}$.

5.7. UỐN TRONG MẶT PHẶNG KHÔNG ĐỐI XỨNG

Trong mục trên, ta xét trường hợp thanh chịu tải trọng đối xứng, có nghĩa là mặt phẳng tải trọng trùng với mặt phẳng đối xứng của mặt cắt ngang. Bây giờ ta chuyển sang xét trường hợp mômen uốn không tác dụng trong mặt phẳng đối xứng của thanh, hoặc khi mặt cắt ngang không đối xứng. Ta có các phương trình cân bằng tĩnh học (5.1 – 5.3):

$$\sum F_x = \int \sigma_x dA = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum M_y = \int z \sigma_x dA = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum M_z = \int (y \sigma_x) dA = -M \quad (5.3)$$

Giả thiết rằng ứng suất nằm trong giới hạn tỷ lệ, ta có thể thay :

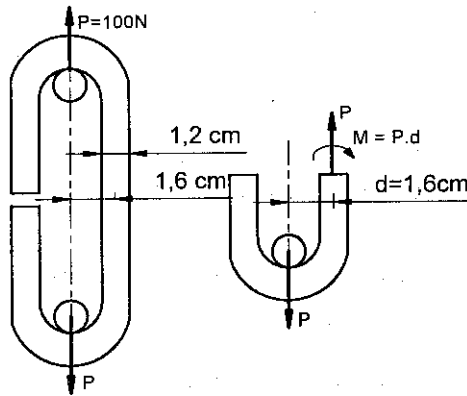
$\sigma_x = \frac{-\sigma_m y}{c}$ vào (5.2) được:

$$\int z \left(\frac{-\sigma_m y}{c} \right) dA = 0; \int y z dA = 0 \quad (5.27)$$

Điều đó có nghĩa là hệ trục yz là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang.



Ta có thể kết luận rằng trục trung hòa của mặt cắt ngang trùng với đường tác dụng của vectơ ngẫu lực M khi và chỉ khi vectơ ngẫu lực đó có phương trùng với trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 5.16).



Hình 5.16

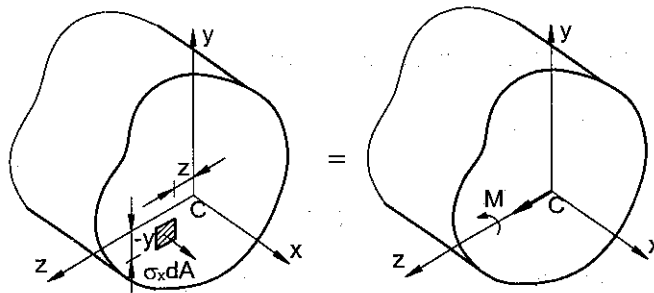
Bằng cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể xác định ứng suất pháp gây nên bởi hai thành phần của mômen uốn M :

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (5.28)$$

Trong đó I_z và I_y là các mômen quán tính của mặt cắt, z , y là tọa độ của điểm khảo sát trên mặt cắt ngang.

Vị trí của trục trung hòa có thể xác định bằng cách cho biểu thức (5.28) bằng không:

$$\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0, \text{ hay } y = \left(-\frac{I_z}{I_y} \tan \theta\right) z \quad (5.29)$$

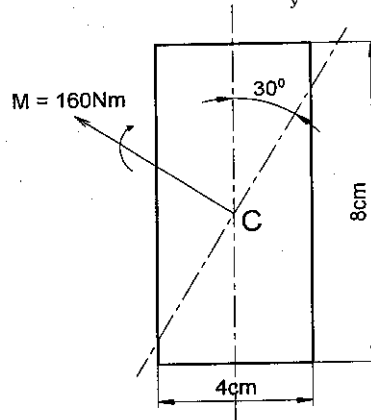


Hình 5.17



Trong đó θ là góc tạo bởi vectơ ngẫu lực M và trục z . Ta thấy trục trung hòa trong trường hợp uốn trong mặt phẳng không đối xứng không trùng với trục trung tâm của mặt cắt, mà nghiêng một góc với trục z có hệ số góc là: $(-\frac{I_z}{I_y} \tan \theta)$.

Ví dụ 5.4: Dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước $4\text{cm} \times 8\text{cm}$ chịu tác dụng của mômen uốn $M = 160\text{Nm}$ trong mặt phẳng nghiêng một góc bằng 30° với trục thẳng đứng (hình 5.18). Xác định:



Hình 5.18

- Ứng suất lớn nhất trên dầm;
- Góc tạo bởi mặt trung hòa và mặt phẳng ngang.

Giải :

a) Ứng suất lớn nhất trên dầm :

Các thành phần M_z và M_y của mômen uốn M xác định như sau:

$$M_z = (160\text{Nm}) \cos 30^\circ = 138,6\text{Nm}$$

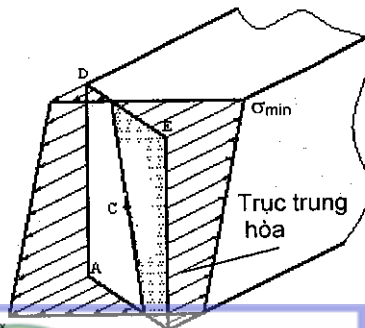
$$M_y = (160\text{Nm}) \sin 30^\circ = 80\text{Nm}$$

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục z và y có giá trị :

$$I_z = \frac{1}{12} (4\text{cm})(8\text{cm})^3 = 170,67\text{cm}^4; \quad I_y = \frac{1}{12} (8\text{cm})(4\text{cm})^3 = 42,67\text{cm}^4$$

Ứng suất lớn nhất ở miền chịu kéo do M_z gây ra đạt được trên cạnh AB (hình 5.19).

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(138,6 \cdot 10^2 \text{Ncm})(4\text{cm})}{170,67(\text{cm}^4)} = 324,8(\text{N} / \text{cm}^2)$$



Hình 5.19

Ứng suất lớn nhất ở miền chịu kéo do M_y gây ra đạt được trên cạnh AD:

$$\sigma_3 = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{(80 \cdot 10^2 \text{ Ncm})(2 \text{ cm})}{42,67(\text{cm}^4)} = 374,97 \text{ (N / cm}^2\text{)}$$

Do đó ứng suất kéo lớn nhất tại điểm A do tải trọng phức tạp gây nên là :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_3 = 324,8(\text{N / cm}^2) + 374,97(\text{N / cm}^2) \approx 700(\text{N / cm}^2)$$

Ứng suất nén lớn nhất có cùng giá trị tuyệt đối đạt được tại điểm E.

b) Góc tạo bởi mặt trung hòa và mặt phẳng ngang

Trục trung hòa nghiêng một góc ϕ với mặt phẳng ngang xác định bởi công thức:

$$\text{tg}\phi = -\frac{I_z}{I_y} \text{tg}30^\circ = -\frac{170,67}{42,67} \frac{\sqrt{3}}{3} = -2,31$$

$$\phi \approx -67^\circ$$

5.8. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA TẢI TRỌNG LỆCH TÂM

Xét trường hợp thanh thẳng chịu tác dụng của hai lực bằng nhau nhưng ngược chiều P và P' tác dụng tại điểm có tọa độ (a, b) trên mặt cắt ngang. Ứng suất pháp tổng hợp xác định từ nguyên lý cộng tác dụng của các ứng suất do lực P và do các mômen uốn M_z và M_y :

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (5.30)$$

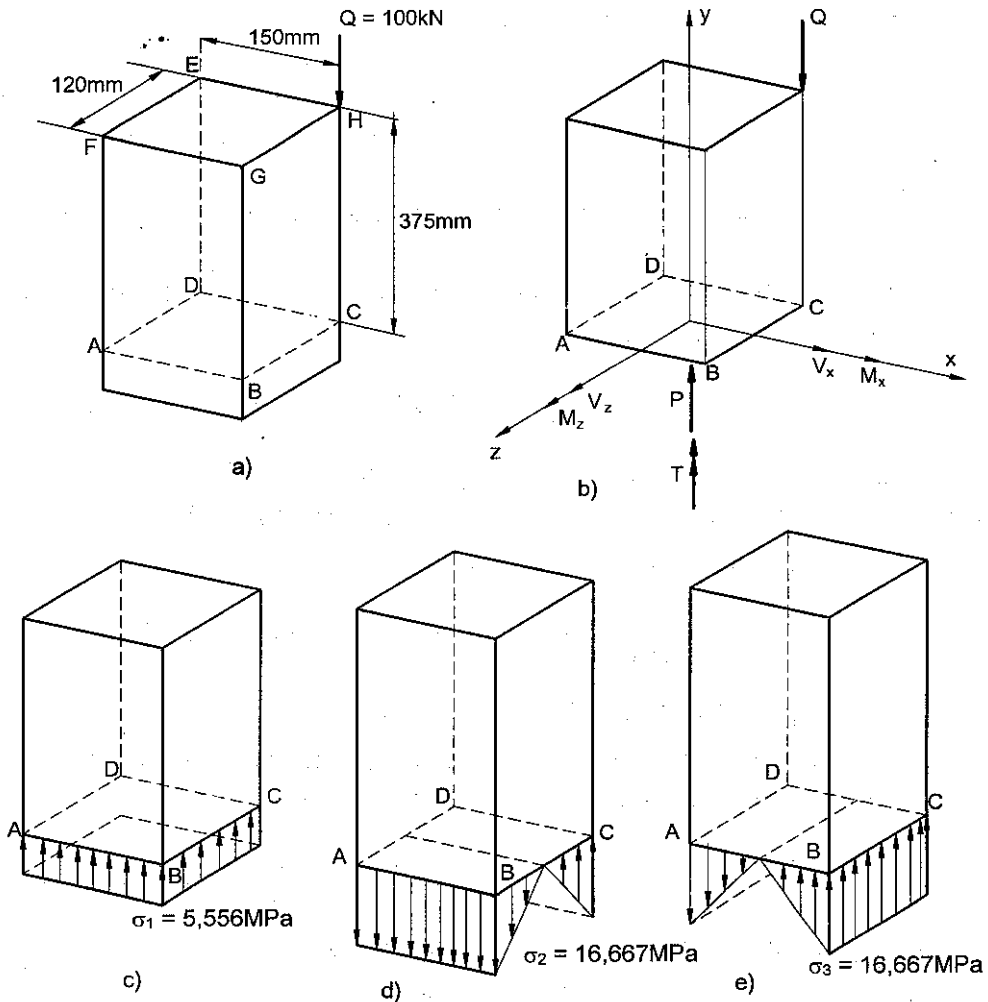
Vị trí trục trung hòa tính theo công thức:

$$\frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = -\frac{P}{A} \quad (5.31)$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất đạt được ở điểm cách xa trục trung hòa nhất (đối với mặt cắt ngang chữ nhật làm ví dụ, đó là các điểm trên các góc đối diện của mặt cắt ngang).

Ví dụ 5.5: Một cột bằng gang xám liên kết ngầm tại đáy, chịu nén lệch tâm bởi lực $Q = 100\text{kN}$ tại điểm H như hình 5.20a. Xác định ứng suất pháp tại các điểm góc của mặt cắt ngang ABCD.





Hình 5.20

Giải: Ta cắt thanh bằng mặt cắt đi qua ABCD, xét sự cân bằng của phần bên trên mặt cắt đó (hình 5.20b):

$$\sum F_x = V_x = 0; \quad V_x = 0$$

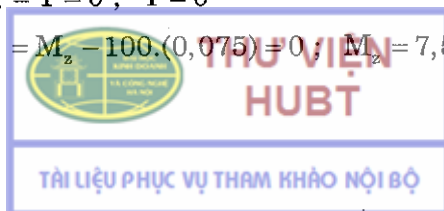
$$\sum F_y = P - 100 = 0; \quad P = 100\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_z = V_z = 0; \quad V_z = 0$$

$$\sum M_x = M_x - 100 \cdot (0,060) = 0; \quad M_x = 6\text{kNm}$$

$$\sum M_y = T = 0; \quad T = 0$$

$$\sum M_z = M_z - 100 \cdot (0,075) = 0; \quad M_z = 7,5\text{kNm}$$



Các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang:

$$A = 150 \cdot 120 = 18 \cdot 10^3 (\text{mm}^2) = 18 \cdot 10^{-3} (\text{m}^2)$$

$$I_x = \frac{1}{12} (150)(120)^3 = 21,6 \cdot 10^6 (\text{mm}^4) = 21,6 \cdot 10^{-6} (\text{m}^4)$$

$$I_z = \frac{1}{12} (120)(150)^3 = 33,75 \cdot 10^6 (\text{mm}^4) = 33,75 \cdot 10^{-6} (\text{m}^4)$$

Ứng suất pháp (nén) do lực dọc P phân bố đều trên mặt phẳng ABCD (hình 5.20 c) có giá trị bằng :

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = -\frac{100 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-3}} = -5,556 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = -5,556 \text{MPa}$$

Ứng suất pháp do mômen uốn M_x phân bố tuyến tính theo z từ 0 (trên trục trung hòa là trục x) đến các cạnh AB (chịu kéo lớn nhất) và CD (chịu nén lớn nhất), giá trị của ứng suất đó bằng:

$$\sigma_2 = \frac{M_x \cdot c_2}{I_x} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{21,6 \cdot 10^{-6}} = 16,667 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 16,667 \text{MPa}$$

Ứng suất pháp đó phân bố trên hình 5.20d).

Tương tự như trên đối với mômen uốn M_z , ứng suất pháp kéo phân bố trên cạnh AD và nén trên cạnh BC (hình 5.20e), ta có:

$$\sigma_3 = \frac{M_z \cdot c_3}{I_z} = \frac{7,5 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-3}}{33,75 \cdot 10^{-6}} = 16,667 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 16,667 \text{MPa}$$

Ứng suất tại các điểm góc của mặt ABCD được tính bằng cách cộng giá trị của các ứng suất trên hình 5.20 c, d và e:

Ứng suất nén lớn nhất đạt được tại góc C là:

$$\sigma_C = -5,556 - 16,667 - 16,667 = -38,89 \text{MPa}$$

Ứng suất kéo lớn nhất tại góc A là:

$$\sigma_A = -5,556 + 16,667 + 16,667 = 27,78 \text{MPa}$$

Ứng suất tại hai góc còn lại của mặt cắt ABCD là:

$$\sigma_B = -5,556 + 16,667 - 16,667 = -5,556 \text{MPa}$$

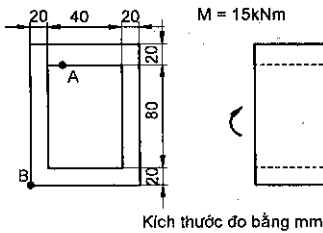
$$\sigma_D = -5,556 - 16,667 + 16,667 = -5,556 \text{MPa}$$



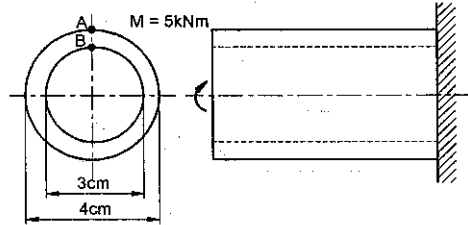
BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1 và 5.2. Cho biết mômen uốn M tác dụng trong mặt phẳng thẳng đứng, xác định ứng suất tại:

a) Điểm A; b) Điểm B.

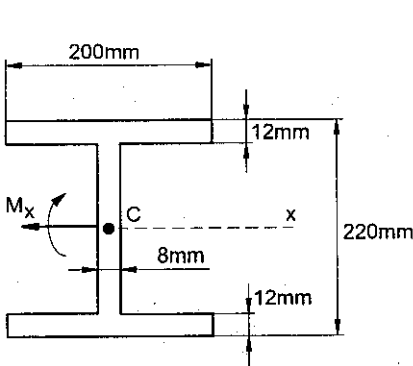


Hình BT 5.1

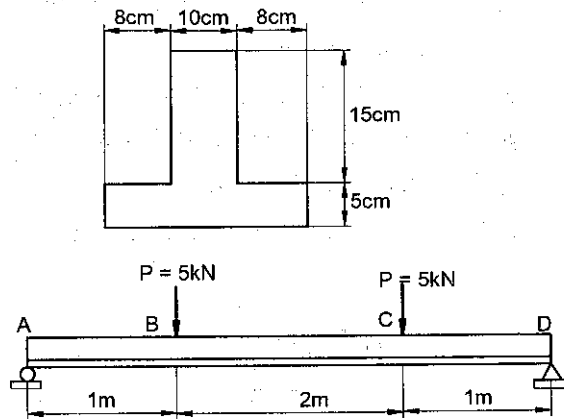


Hình BT 5.2

5.3. Cho biết ứng suất cho phép của vật liệu bằng 155MPa, xác định mômen uốn lớn nhất có thể tác dụng lên dầm mặt cắt chữ I như hình BT5.3. Bỏ qua sự tập trung ứng suất.



Hình BT 5.3

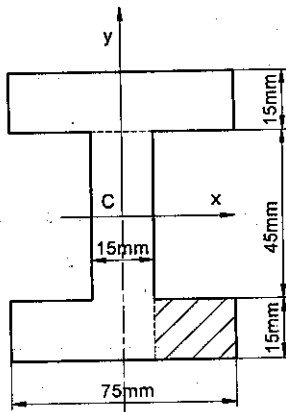


Hình BT 5.4

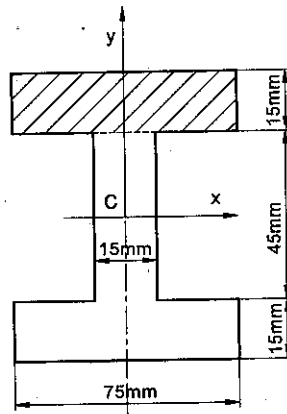
5.4. Hai lực $P = 5\text{kN}$ tác dụng tại hai điểm có khoảng cách $d = 1\text{m}$ đến mỗi gối tựa. Mặt cắt cắt ngang có hình chữ T như hình BT5.4. Xác định ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu kéo và chịu nén trong đoạn BC của dầm.

5.5. Cho dầm có mặt cắt ngang như hình BT5.5 chịu uốn xung quanh trục nằm ngang bởi mômen uốn bằng 8kNm, xác định hợp lực của ứng suất tác dụng lên phần bản cánh trên của mặt cắt (diện tích gạch chéo).

5.6. Cho dầm có mặt cắt ngang như hình BT5.6 chịu uốn xung quanh trục thẳng đứng bởi mômen uốn bằng 4kNm. Xác định hợp lực của ứng suất tác dụng lên phần bản cánh dưới của mặt cắt (diện tích gạch chéo).



Hình BT 5.5



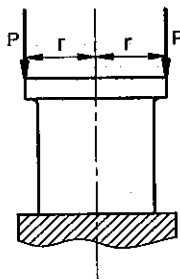
Hình BT 5.6

5.7. Hai lực P tác dụng riêng rẽ hoặc cùng đồng thời lên đĩa được hàn với thanh trụ tròn có bán kính r (hình BT5.7). Xác định ứng suất nén lớn nhất của thanh khi:

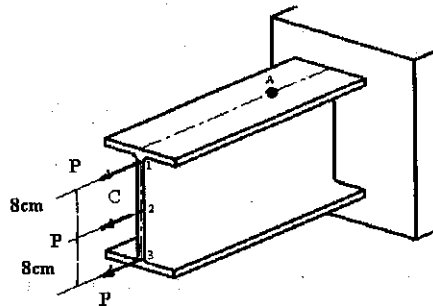
- Cả hai lực đồng thời tác dụng lên thanh;
- Chỉ có một lực tác dụng.

5.8. Ba lực có độ lớn bằng $P = 10\text{kN}$ có thể tác dụng lên đầu tự do của dầm mặt cắt ngang $W152 \times 24$ (hình BT5.8). Xác định ứng suất tại điểm A khi:

- Cả ba lực cùng tác dụng;
- Nếu chỉ có lực tác dụng tại điểm 1 và 2.



Hình BT 5.7



Hình BT5.8

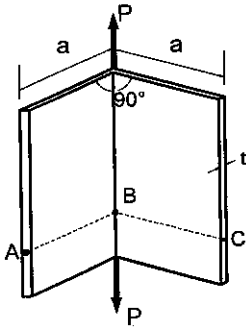
5.9. Bằng cách uốn một tấm thép mỏng, người ta thu được vật thể có hình dạng như hình BT5.9. Coi bề dày của tấm là rất nhỏ so với kích thước a của tấm, xác định ứng suất tại :

- Điểm A; b) Điểm B; c) Điểm C.

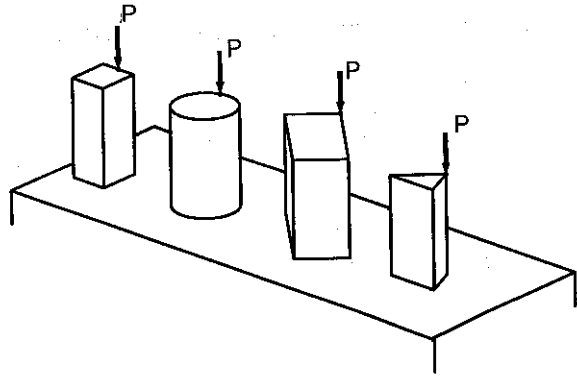
5.10. Bốn thanh có hình dạng mặt cắt khác nhau nhưng cùng diện tích chịu tác dụng của lực P như nhau (hình BT5.10). Hãy chỉ ra rằng:

- Ứng suất nén lớn nhất của các thanh theo tỷ lệ 4 : 5 : 7 : 9;

b) Ứng suất kéo lớn nhất của các thanh theo tỷ lệ 2 : 3 : 5 : 3. (Chú thích: Mặt cắt ngang tam giác là đều).



Hình BT5.9



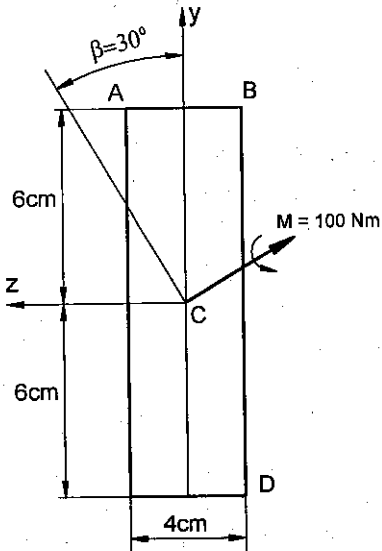
Hình BT5.10

5.11. Mômen uốn M tác dụng trên mặt cắt ngang và làm thành góc β với trục thẳng đứng (hình BT 5.11), xác định ứng suất tại:

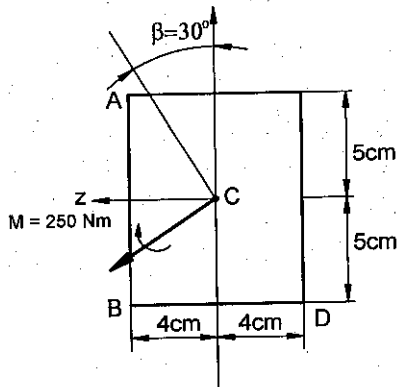
a) Điểm A; b) Điểm B; c) Điểm D.

5.12. Mômen uốn M tác dụng trên mặt cắt ngang và làm thành góc β với trục thẳng đứng (hình BT 5.12), xác định ứng suất tại:

a) Điểm A; b) Điểm B; c) Điểm D.



Hình BT 5.11

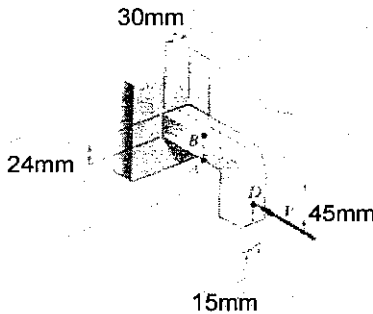


Hình BT 5.12

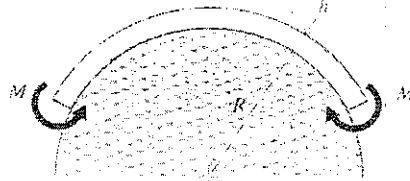
5.13. Xác định ứng suất tại điểm A và B của thanh gấp khúc chịu lực như hình BT5.13.



5.14. Một thanh thép ($E = 200\text{GPa}$) mặt cắt ngang chữ nhật được uốn quanh khung có dạng nửa hình tròn ($R = 25\text{cm}$) (hình BT 5.14). Nếu ứng suất pháp của thanh không vượt quá giới hạn chảy ($\sigma_V = 35\text{GPa}$), xác định bề dày lớn nhất cho phép h của mặt cắt ngang thanh.



Hình BT 5.13



Hình BT 5.14

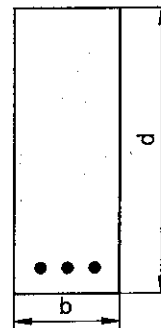
5.15. Một thanh hợp kim nhôm ($E = 73\text{GPa}$) mặt cắt ngang chữ nhật được uốn quanh khung như hình bài 5.14. Bề dày của mặt cắt ngang $h = 25\text{mm}$. Nếu ứng suất pháp của thanh không vượt quá giới hạn 200MPa, xác định bán kính nhỏ nhất R của khung.

5.16. Dầm chữ nhật có môđun đàn hồi của vật liệu khi kéo là E_T , khi nén là E_C . Hãy chỉ ra rằng độ cong của dầm khi chịu uốn thuần túy bằng :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_{\text{tương đương}} \cdot I}, \text{ với } E_{\text{tương đương}} = \frac{4E_T E_C}{(\sqrt{E_T} + \sqrt{E_C})^2}$$

5.17. Việc thiết kế dầm bê tông được coi là cân bằng nếu như ứng suất nhỏ nhất của thép và của bê tông tương ứng bằng ứng suất cho phép σ_s (đối với thép) và σ_c (đối với bê tông). Hãy chỉ ra rằng để đạt được sự cân bằng đó, khoảng cách x từ mép trên của mặt cắt ngang đến trục trung

hòa phải thỏa mãn: $x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$ (hình BT 5.17).



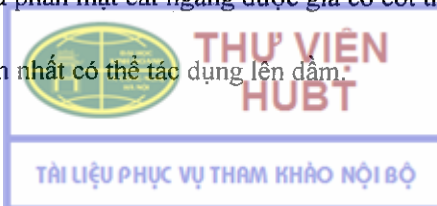
Hình BT 5.17

Trong đó E_s và E_c là môđun đàn hồi của thép và bê tông tương ứng, và d là khoảng cách từ mép trên mặt cắt ngang đến phần được gia cố cốt thép.

5.18. Cho dầm bê tông cốt thép có mặt cắt ngang như hình BT 5.18 ở bài trên, nếu môđun đàn hồi của thép là 200GPa, của bê tông là 25GPa. Biết $b = 200\text{mm}$, $d = 450\text{mm}$, ứng suất cho phép của thép là 140MPa, của bê tông là 12,5MPa. Xác định:

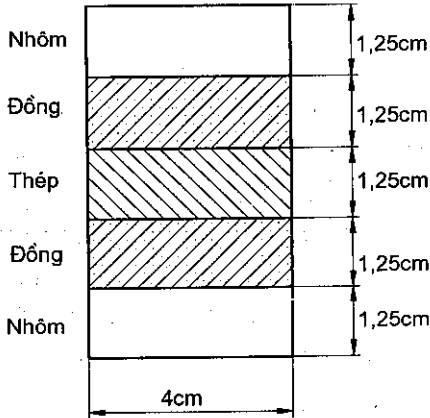
a) Diện tích A của phần mặt cắt ngang được gia cố cốt thép nếu dầm được thiết kế cân bằng;

b) Mômen uốn lớn nhất có thể tác dụng lên dầm.

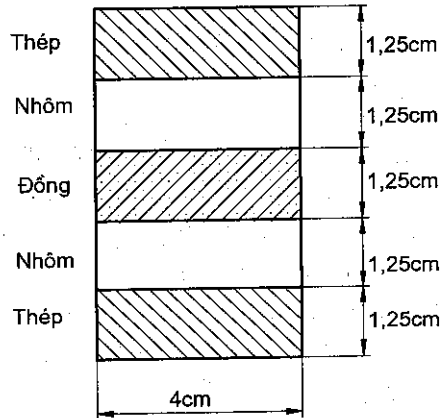


5.19 và 5.20. Năm thanh kim loại bằng vật liệu khác nhau, mỗi thanh có mặt cắt ngang chữ nhật kích thước $1,25 \times 3,8\text{cm}$ được gắn vào nhau tạo thành dầm composite như hình BT5.19 và 5.20. Môđun đàn hồi của thép là $E_s = 200\text{GPa}$, của đồng là $E_b = 100\text{GPa}$, của nhôm là $E_{al} = 66,7\text{GPa}$. Dầm chịu uốn bởi mômen $M = 30,5\text{kNm}$ xung quanh trục ngang. Xác định :

- Ứng suất lớn nhất trong mỗi loại vật liệu;
- Bán kính cong của dầm composite .



Hình BT 5.19



Hình BT 5.20

Chương 6

DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.1. KHÁI NIỆM

Trong thực tế ta thấy các xà nhà hay dầm cầu chịu tác dụng của tải trọng vuông góc với dầm, trên mặt cắt ngang sẽ xuất hiện các thành phần nội lực là *lực cắt* và *mômen uốn*, khi đó ta gọi là dầm chịu *uốn ngang phẳng*. Ví dụ, dầm của cầu chịu tải trọng do xe cộ đi trên cầu sẽ chịu đồng thời lực cắt và mômen uốn (hình 6.1). Trong chương này sẽ xác định các thành phần ứng suất của dầm chịu uốn ngang phẳng và lựa chọn kích thước sao cho dầm thỏa mãn điều kiện bền và tiết kiệm vật liệu.



Hình 6.1. Cầu Chương Dương –Hà nội

Ở chương 4, ta đã có công thức ứng suất pháp do mômen uốn gây nên. Do sự phân bố ứng suất chỉ phụ thuộc vào giá trị mômen uốn và hình học của mặt cắt ngang dầm, nên ta vẫn sử dụng được công thức đó cho dầm chịu uốn ngang phẳng:



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

$$\sigma_m = \frac{|M|.c}{I_z}; \sigma_x = -\frac{M.y}{I_z} \quad (6.1)$$

Trong đó: I_z là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung tâm z ; y là khoảng cách từ điểm khảo sát đến trục z ; c là giá trị lớn nhất của khoảng cách đó. Ta đặt mômen chống uốn của mặt cắt ngang là : $S_z = \frac{I_z}{c}$, ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang xác định bởi:

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S_z} \quad (6.2)$$

Đối với mặt cắt ngang chữ nhật, ta có:

$$S_z = \frac{1}{6}bh^2 \quad (6.3)$$

Đối với mặt cắt ngang là thép định hình, có thể tra cứu mômen chống uốn trong bảng phụ lục. Ta thấy do ứng suất tỷ lệ nghịch với S_z , nên cần chọn giá trị lớn hơn của đại lượng đó. Tuy nhiên để tránh lãng phí vật liệu và trọng lượng lớn của kết cấu, người thiết kế cần chọn kích thước sao cho hợp lý, hài hòa giữa điều kiện bền và điều kiện sử dụng.

6.2. BIỂU ĐỒ LỰC CẮT VÀ MÔMEN UỐN

6.2.1. Quy ước dấu

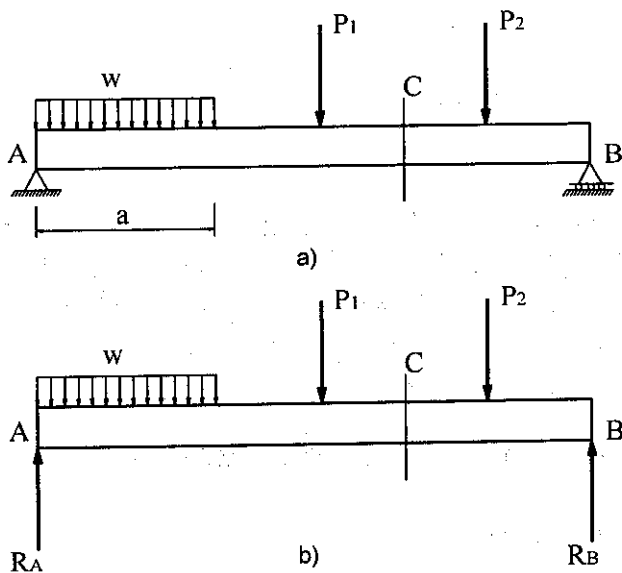
Việc xác định ứng suất lớn nhất đòi hỏi phải tìm *mặt cắt nguy hiểm nhất* trên dầm, tức là mặt cắt có giá trị nội lực lớn nhất. Để làm được điều đó, ta cần vẽ *biểu đồ lực cắt và mômen uốn* dọc theo chiều dài của dầm. Phương pháp xác định nội lực tại điểm bất kỳ là sử dụng mặt cắt chia dầm thành hai phần rồi xét sự *cân bằng tĩnh học* của một trong hai phần đó (thường xét phần có ít lực tác dụng hơn). Ví dụ như dầm cho trên hình 6.2. Ta cần xác định phản lực liên kết tại hai gối tựa A và B, sau đó dùng mặt cắt đi qua điểm C, có thể xác định lực cắt và mômen uốn nội lực bằng hệ phương trình cân bằng tĩnh học của phần bên trái dầm. Cho giá trị của x biến thiên từ đầu mút trái đến đầu mút phải, ta có thể vẽ được biểu đồ của nội lực dọc theo chiều dài của dầm. Ta cần chú ý đến quy ước về dấu của nội lực như sau:



– Lực cắt được coi là dương nếu nó tạo cùng ngoại lực tác dụng trên đoạn đang xét một ngẫu lực quay ngược chiều kim đồng hồ. Nói cách khác, lực cắt $V > 0$ nếu khi quay pháp tuyến ngoài của mặt cắt *ngược chiều kim đồng hồ*, mà chiều của nó trùng với chiều của V .

– Mômen uốn coi là dương nếu nó làm dầm bị uốn hướng bẻ lõm lên trên.

Sau khi xác định nội lực là hàm số phụ thuộc khoảng cách x từ đầu mút của dầm, ta có thể vẽ biểu đồ bằng cách cho x thay đổi từ 0 đến hết chiều dài L của dầm.



Hình 6.2

Ví dụ 6.1: Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm công-xôn chiều dài L , chịu tải trọng phân bố đều cường độ w (hình 6.3a).

Giải: Ta cắt dầm tại điểm bất kỳ cách đầu tự do khoảng cách x , giả sử chiều của V và M theo quy ước là dương. Phương trình cân bằng như sau:

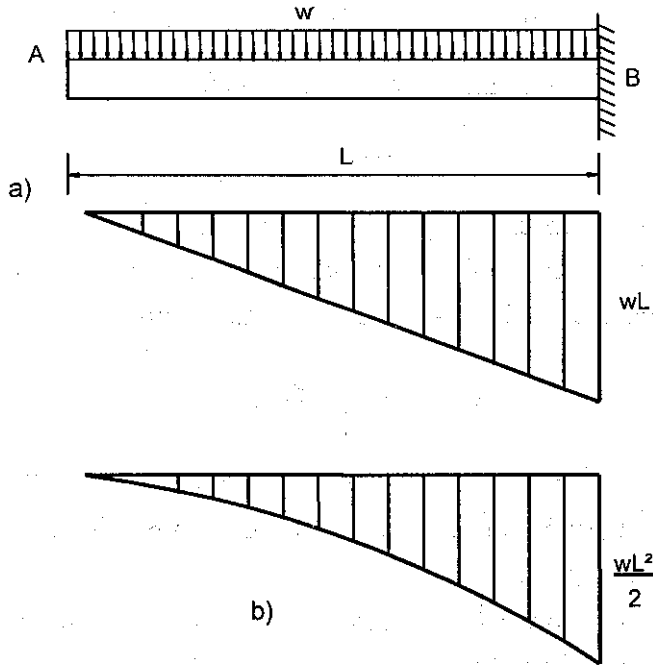
$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad -w \cdot x - V = 0; \quad V = -w \cdot x$$

$$\sum M_C = 0; \quad w \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M = 0; \quad M = -\frac{1}{2} w x^2$$

Trên hình 6.3b) ta có biểu đồ lực cắt và mômen uốn. Ta thấy biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất, còn mômen uốn là hàm bậc 2. Giá trị lớn nhất của nội lực đạt được tại ngàm: $V_B = -wL$; $M_B = -\frac{1}{2} wL^2$



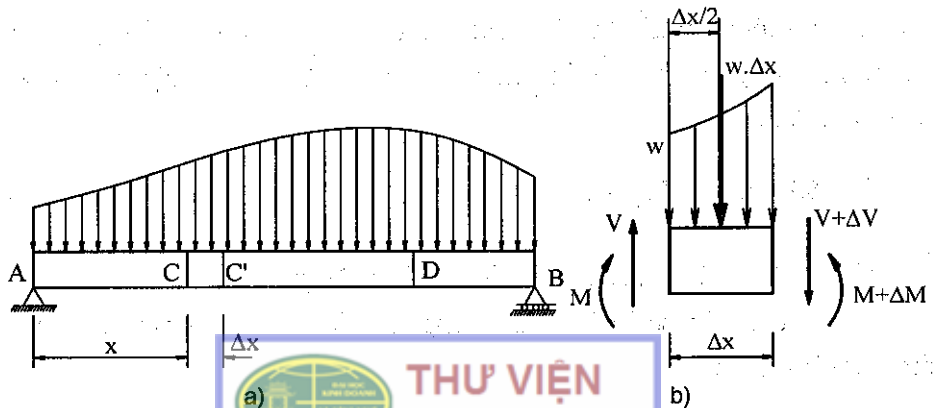
Ngoài phương pháp mặt cắt kể trên, ta có thể sử dụng các phương pháp khác sẽ trình bày dưới đây để vẽ biểu đồ nội lực.



Hình 6.3

6.2.2. Liên hệ giữa tải trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn

Xét dầm AB đặt trên hai gối tựa (hình 6.4a) chịu tải trọng phân bố $w = w(x)$. Cắt dầm bằng hai mặt cắt tại C và C' có khoảng cách Δx (hình 6.4b). Xét sự cân bằng của phần tử đó:




THƯ VIỆN HUBT
 Hình 6.4
 TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Liên hệ giữa tải trọng phân bố và lực cắt: Phương trình tổng hình chiếu theo phương thẳng đứng:

$$\uparrow \sum F_y = 0 : V - (V + \Delta V) - w \cdot \Delta x = 0; \Delta V = -w \cdot \Delta x$$

Chia cả hai vế cho Δx và cho $\Delta x \rightarrow 0$, ta có:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (6.4)$$

Công thức trên cho thấy: độ dốc của biểu đồ lực cắt tại điểm bất kỳ bằng lực phân bố trên một đơn vị dài, và chiều lực cắt ngược với chiều tải trọng phân bố. Tích phân (6.4) từ C đến D, ta thu được:

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w dx \quad (6.5)$$

Hay: $V_D - V_C = -$ (diện tích biểu đồ của tải trọng giữa C và D) (6.6)

Chú ý rằng (6.6) chỉ đúng với tải trọng phân bố *chứ không đúng với lực tập trung* trên đoạn CD.

Liên hệ giữa lực cắt và mômen uốn: Phương trình cân bằng đối với mômen uốn trên phân tố CC':

$$\sum M_C = 0 ; (M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (6.7)$$

Sau khi giản ước và cho $\Delta x \rightarrow 0$ ta được:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (6.8)$$

Ta thấy độ dốc của biểu đồ mômen uốn tại điểm bất kỳ bằng giá trị của lực cắt tại điểm đó; giá trị lớn nhất của mômen đạt được tại mặt cắt có lực cắt bằng không. Tính chất đó được sử dụng để xác định mặt cắt nguy hiểm nhất trên dầm.

Từ (6.8) ta có: $M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx$ (6.9)

Hay: $M_D - M_C =$ (diện tích biểu đồ lực cắt giữa điểm C và D) (6.10)

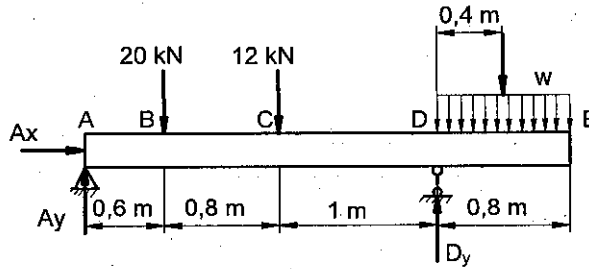
Biểu thức trên sẽ không còn đúng khi dầm chịu mômen tập trung tại điểm ở giữa C và D.



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Ví dụ 6.2: Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm như hình 6.5a.



Hình 6.5a

Giải :

Phản lực liên kết (hình 6.5b):

Giải phóng liên kết và xét hệ phương trình cân bằng tĩnh học:

$$\sum M_A = 0 : D_y \cdot (2,4\text{m}) - (20\text{kN})(0,6\text{m}) - (12\text{kN})(1,4\text{m}) - (12\text{kN})(2,8\text{m}) = 0$$

$$D_y = 26 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - 20\text{kN} - 12\text{kN} + 26\text{kN} - 12\text{kN} = 0$$

$$A_y = 18\text{kN} \uparrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x = 0$$

Biểu đồ lực cắt (hình 6.5c): Lực cắt trên đoạn từ A đến D là hằng số, do không có tải trọng phân bố. Xét sự cân bằng của đoạn bên trái mặt cắt ở giữa B và C:

$$\uparrow \sum F_y = 0 : 18\text{kN} - 20\text{kN} - V = 0 ; V = -2\text{kN} \uparrow$$

Trên đoạn từ D đến E, do $\frac{dV}{dx} = -w$, ta có biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất.

Biểu đồ mômen uốn (hình 6.5d): Chú ý rằng diện tích của biểu đồ lực cắt giữa hai điểm bất kỳ bằng sự biến thiên mômen uốn giữa hai điểm đó, ta có:

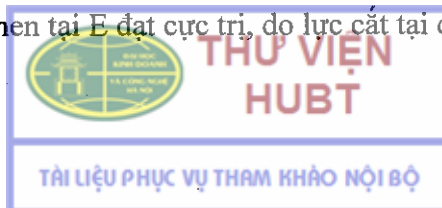
$$M_B - M_A = 10,8 ; M_B = 10,8\text{kN.m}$$

$$M_C - M_B = -1,6 ; M_C = 9,2\text{kN.m}$$

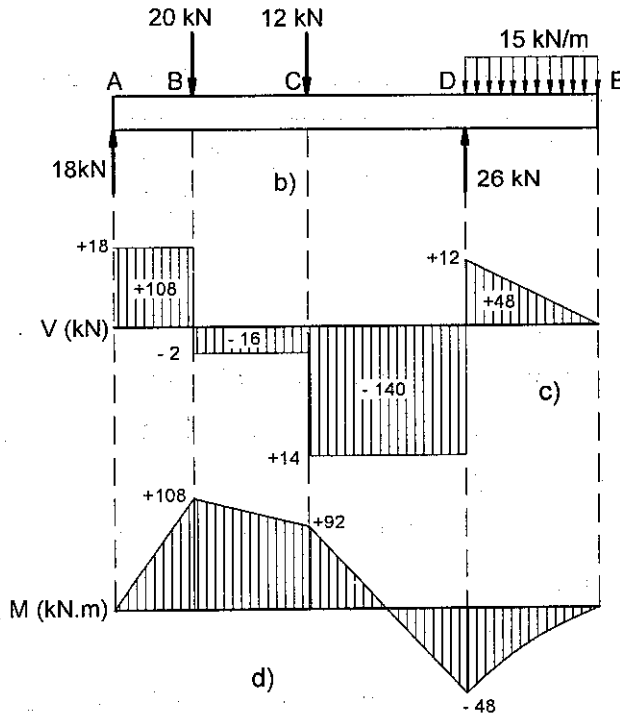
$$M_D - M_C = -14 ; M_D = -4,8\text{kN.m}$$

$$M_E - M_D = 4,8 ; M_E = 0$$

Ta vẽ biểu đồ mômen uốn bằng cách nối các giá trị mômen tại A, B, C và D thành đoạn thẳng. Giữa D và E, biểu đồ có dạng parabol với bề lồi hướng lên trên. Mômen tại E đạt cực trị, do lực cắt tại đó bằng không.



Như vậy dầm đã cho có trị số lực cắt lớn nhất tại A bằng 18kN, và mômen uốn lớn nhất tại B, bằng 10,8kNm.



Hình 6.5

Ví dụ 6.3 : Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm chịu tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất (hình 6.6a).

Giải :

Biểu đồ lực cắt (hình 6.6b): Tại đầu tự do A, ta có $V_A = 0$, diện tích biểu đồ tải trọng phân bố giữa A và B bằng $\frac{1}{2} w_0 a$; ta có sự thay đổi lực cắt trên đoạn đó là:

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2} w_0 a \Rightarrow V_B = -\frac{1}{2} w_0 a.$$

Từ B đến C không có tải trọng, do đó $V_C = V_B$. Biểu đồ lực cắt trên AB có dạng bậc hai với bề lõm hướng lên trên, do $\frac{dV}{dx} = -w_0$, còn trên đoạn BC là hằng số.



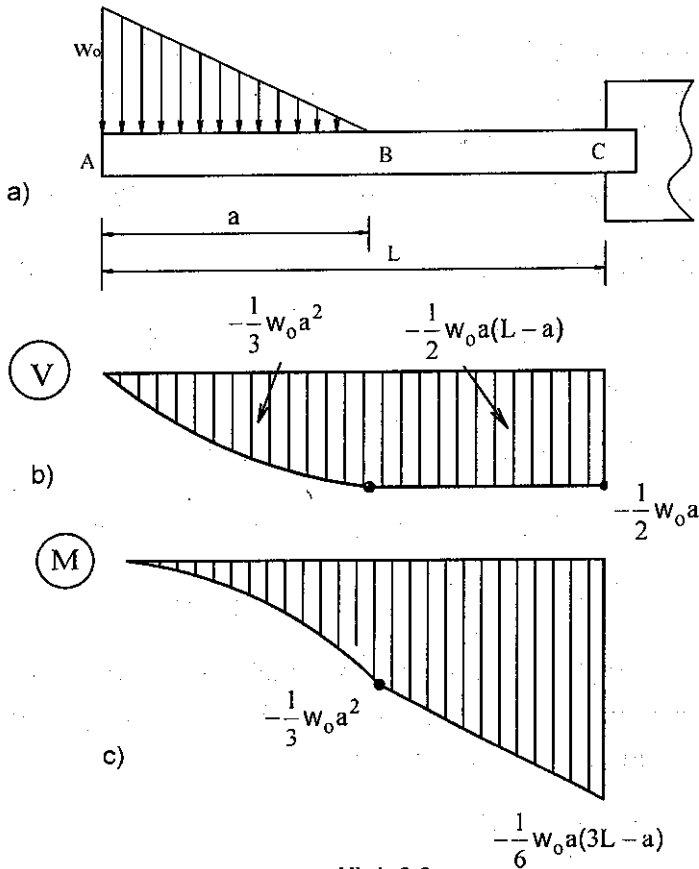
Biểu đồ mômen uốn (hình 6.6c): Mômen uốn tại đầu tự do A bằng không, ta tính diện tích của biểu đồ lực cắt:

$$M_B - M_A = \frac{1}{3} w_0 a^2 \Rightarrow M_B = -\frac{1}{3} w_0 a^2$$

(dấu - theo chiều quy ước của mômen uốn).

$$M_C - M_B = \frac{1}{2} w_0 a(L - a) \Rightarrow M_C = -\frac{1}{6} w_0 a(3L - a) ;$$

Chú ý rằng ta có: $\frac{dM}{dx} = V$, mômen uốn trên đoạn AB có dạng bậc ba với độ dốc bằng không tại A, còn trên đoạn BC, biểu đồ mômen có dạng bậc nhất.



Hình 6.6

6.3. ỨNG SUẤT TIẾP CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Việc xác định ứng suất tiếp của dầm được thực hiện bởi Jourawski D.J (1821–1891) khi thiết kế dầm cầu cho tàu hỏa và được ứng dụng rộng rãi cho đến nay nhờ tính chính xác và dễ sử dụng của công thức đó. Đối với các trường hợp sau, ta cần xác định ứng suất tiếp khi tính toán, thiết kế dầm chịu uốn:

- Dầm có chiều dài lớn, do tính chịu lực của nó kém hơn dầm ngắn.
- Dầm có mặt cắt ngang là thành mỏng hở.
- Tính các ứng suất chính trên mỗi ghép giữa phân thân và đế của các mặt cắt có bản cánh rộng (chữ T, I ...).

6.3.1. Công thức ứng suất tiếp

Xét mặt cắt ngang chữ nhật kích thước $t \times h$ của dầm chịu uốn ngang phẳng và một đoạn thanh có chiều dài Δx (hình 6.7a). Lực dF tác dụng trên phần tử diện tích $dA = t.dy$ theo phương trục dầm là:

$dF = \sigma_x.dA$, hợp lực của nó trên toàn mặt cắt bằng: $F = \int \sigma_x.dA$, trong đó σ_x xác định bởi: $\sigma_x = -\frac{M.y}{I_z}$. Do đó, lực F_1 tác dụng lên phần bên trái của đoạn thanh có diện tích từ khoảng cách y_1 đến mép trên của dầm (hình 6.7b) tính theo công thức:

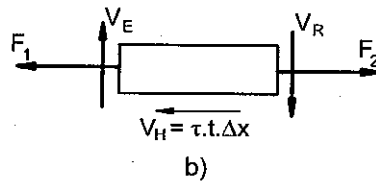
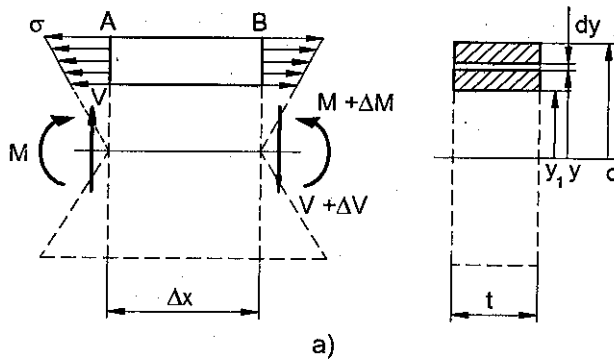
$$F_1 = -\frac{M}{I_z} \int y.dA = -\frac{M}{I_z} \int_{y_1}^{\infty} y(tdy) \quad (6.11)$$

Tương tự đối với lực F_2 trên mặt cắt bên phải đoạn thanh, ta có:

$$F_2 = -\frac{(M + \Delta M)}{I_z} \int y.dA = -\frac{M}{I_z} \int_{y_1}^{\infty} y(tdy) \quad (6.12)$$

Ký hiệu V_t , V_B là lực cắt ở bên trái và bên phải phần tử đang xét, V_H là hợp lực theo phương trục thanh ở mép trên, ta có tổng hình chiếu theo phương ngang của các lực tác dụng lên phần tử là:

$$V_H = F_2 - F_1 = -\frac{\Delta M}{I_z} \int_{y_1}^{\infty} y(tdy) \quad (6.13)$$



Hình 6.7

Ứng suất tiếp trung bình τ_{tb} bằng lực V_H chia cho diện tích $A_s = t \cdot \Delta x$, ta có:

$$\tau_{tb} = \frac{V_H}{A_s} = -\frac{\Delta M}{I_z \cdot t \cdot \Delta x} \int_{y_1}^c y(t dy) \quad (6.14)$$

Cho $\Delta x \rightarrow 0$, ta có:

$$\tau = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \left(-\frac{1}{I_z \cdot t} \right) \int_{y_1}^c t \cdot y dy = \frac{dM}{dx} \left(-\frac{1}{I_z \cdot t} \right) \int_{y_1}^c t \cdot y dy \quad (6.15)$$

Mặt khác do đạo hàm của mômen uốn chính là lực cắt, còn tích phân trong biểu thức trên chính là mômen tĩnh Q của phần diện tích từ lát cắt có tung độ y đến mép trên của dầm, ta thu được :

$$\tau_H = -\frac{V \cdot Q}{I_z \cdot t} \quad (6.16)$$

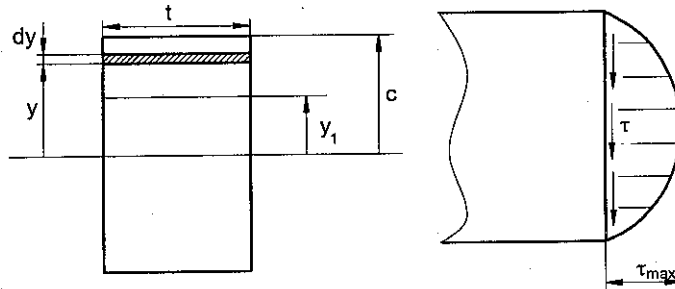
Tại mọi điểm trên dầm, ứng suất tiếp theo phương ngang và phương thẳng đứng bằng nhau (định luật đối ứng của ứng suất tiếp), dấu trừ trong biểu thức trên do chiều của lực V_H phải ngược lại để thỏa mãn $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, do đó :

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I_z \cdot t} \quad (6.17)$$

Đó chính là công thức của Jourawski D.J, chiều của ứng suất tiếp τ xác định theo chiều của lực cắt V .



Bây giờ ta xét sự phân bố ứng suất tiếp trên một số mặt cắt đơn giản. Xét mặt cắt ngang chữ nhật (hình 6.8), ta có theo (6.17):



Hình 6.8

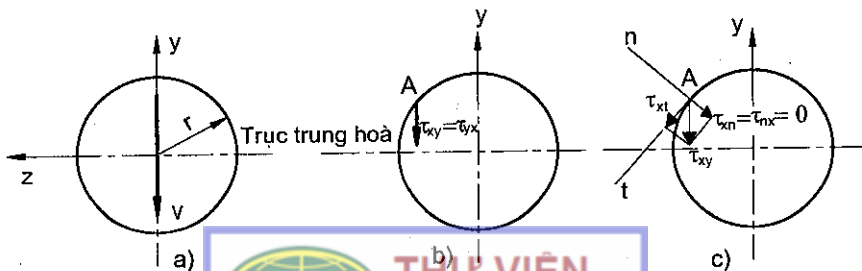
$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I_z \cdot t} = \frac{V}{I_z \cdot t} \int y dA = \frac{V}{I_z \cdot t} \int_{y_1}^c t \cdot y dy = \frac{V}{2I_z} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right] \quad (6.18)$$

Ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo chiều cao mặt cắt ngang theo quy luật parabol, giá trị lớn nhất đạt được tại $y_1 = 0$, tức là trên trục trung hòa:

$$\tau_{\max} \Big|_{y=0} = \frac{V \cdot h^2}{8I_z} = \frac{V \cdot h^2}{8(th^3/12)} = \frac{3V}{2th} = \frac{3V}{2A} \quad (6.19)$$

Trong đó A là diện tích mặt cắt ngang chữ nhật.

Đối với mặt cắt ngang hình tròn (hình 6.9), tại điểm A , ứng suất tiếp có thể phân tích thành hai thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến với đường bao. Tuy nhiên do $\tau_{xn} = \tau_{nx}$, trong đó τ_{nx} là ứng suất tiếp trên mặt ngoài thanh theo phương trục x . Mặt khác do thanh chịu uốn ngang phẳng nên bề mặt ngoài không chịu tác dụng của lực theo phương x , do đó: $\tau_{xn} = \tau_{nx} = 0$, có nghĩa là ứng suất tiếp tại điểm A có *phương tiếp tuyến với đường bao* của mặt cắt ngang, chứ *không theo phương của lực cắt V* . Tại trục trung hòa, ta có ứng suất tiếp theo phương lực V và có giá trị lớn nhất:



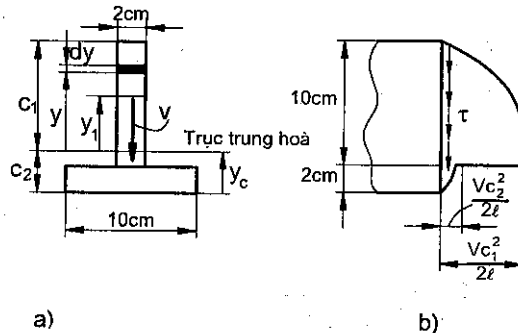
THƯ VIỆN
HUBT

Hình 6.9

$$\tau_{\max} \Big|_{y=0} = \frac{V \cdot Q}{I_z \cdot t} = \frac{V \cdot (\pi r^2 / 2) \cdot (4r / 3\pi)}{(\pi r^4 / 4) \cdot (2r)} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^2} = \frac{4}{3} A \quad (6.20)$$

Trong đó A là diện tích mặt cắt ngang hình tròn.

Ví dụ 6.4: Xác định ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ T (hình 6.10).



Hình 6.10

Ta có khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt đến mép dưới chữ T là :

$$y_c = \frac{2 \cdot 10 \cdot 7 + 10 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 10 + 2 \cdot 10} = 4(\text{cm})$$

Khoảng cách từ mép trên và mép dưới đến trục trung hòa là:

$c_1 = 8 \text{ cm}$, $c_2 = 4 \text{ cm}$, chú ý rằng trong công thức (6.17), V và I_z là hằng số, chỉ có Q và t thay đổi trên mặt cắt ngang. Tại điểm bất kỳ cách trục x khoảng cách y_1 , ta có:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I_z \cdot t} = \frac{V}{I_z \cdot t} \int_{y_1}^{c_1} t \cdot y \cdot dy = \frac{V}{2I_z} [c_1^2 - y_1^2] = \frac{V}{2I_z} [8^2 - y_1^2]; (-2 < y_1 < 8)$$

Tương tự đối với ứng suất tiếp trên phần đế chữ T:

$$\tau = \frac{V}{2I_z} [c_2^2 - y_1^2] = \frac{V}{2I_z} [4^2 - y_1^2]; (-4 < y_1 < -2)$$

Hình 6.10b biểu diễn sự phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ T, ta thấy có sự gián đoạn tại điểm tiếp giáp giữa lòng và đế chữ T, do bề dày của mặt cắt thay đổi.

Ví dụ 6.5: Xác định ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ I số hiệu W203×22, chịu lực cắt $V = 37,5 \text{ kN}$ (hình 6.11a).



Giải:

Ta có, theo bảng phụ lục đặc trưng hình học của thép định hình : $I_z = 20.10^6 \text{mm}^4$. Áp dụng (6.17) ta có tại điểm nằm trên trục trung hòa ($y = 0$) ứng suất tiếp có giá trị:

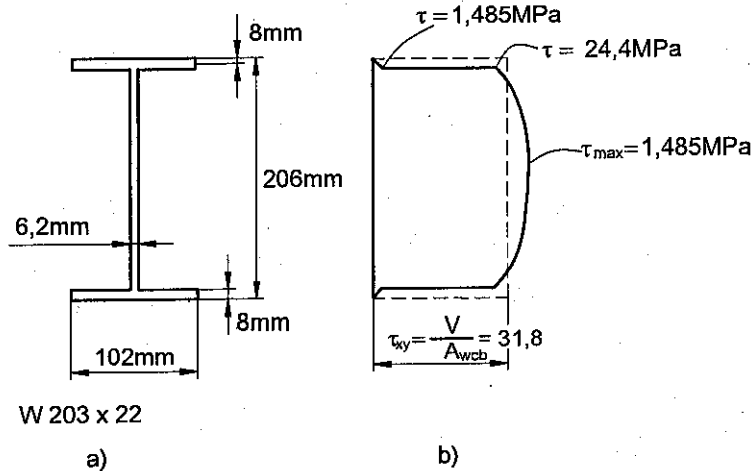
$$Q|_{y=0} = 102.8.99 + 95.(6,2).(47,5) = 108,76.10^3 (\text{mm}^3)$$

$$\tau|_{y=0} = \frac{V.Q}{I_z.t} = \frac{37,5.10^3.(108,76).10^{-6}}{20.10^{-6}.(6,2).10^{-3}} = 32,89.10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 32,9 \text{MPa} \quad (6.21)$$

Tương tự tại điểm tiếp giáp giữa thân và đế chữ I với $t = 6,2 \text{ mm}$ (phía thân chữ I):

$$Q = 102.8.99 = 80,78.10^3 (\text{mm}^3) = 80,78.10^{-6} (\text{m}^3)$$

$$\tau = \frac{V.Q}{I_z.t} = \frac{37,5.10^3.(80,78).10^{-6}}{20.10^{-6}.(6,2).10^{-3}} = 24,43.10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 24,4 \text{MPa}$$



Hình 6.11

Sự phân bố ứng suất tiếp biểu diễn trên hình 6.11b. Trong thực tế khi thiết kế dầm chữ I người ta thường tính ứng suất tiếp trung bình bằng cách chia lực cắt V cho diện tích của mặt cắt:

$$\tau_{tb} = \frac{V}{A_{\text{lông}}} \quad (6.22)$$

Trong ví dụ trên ta có:

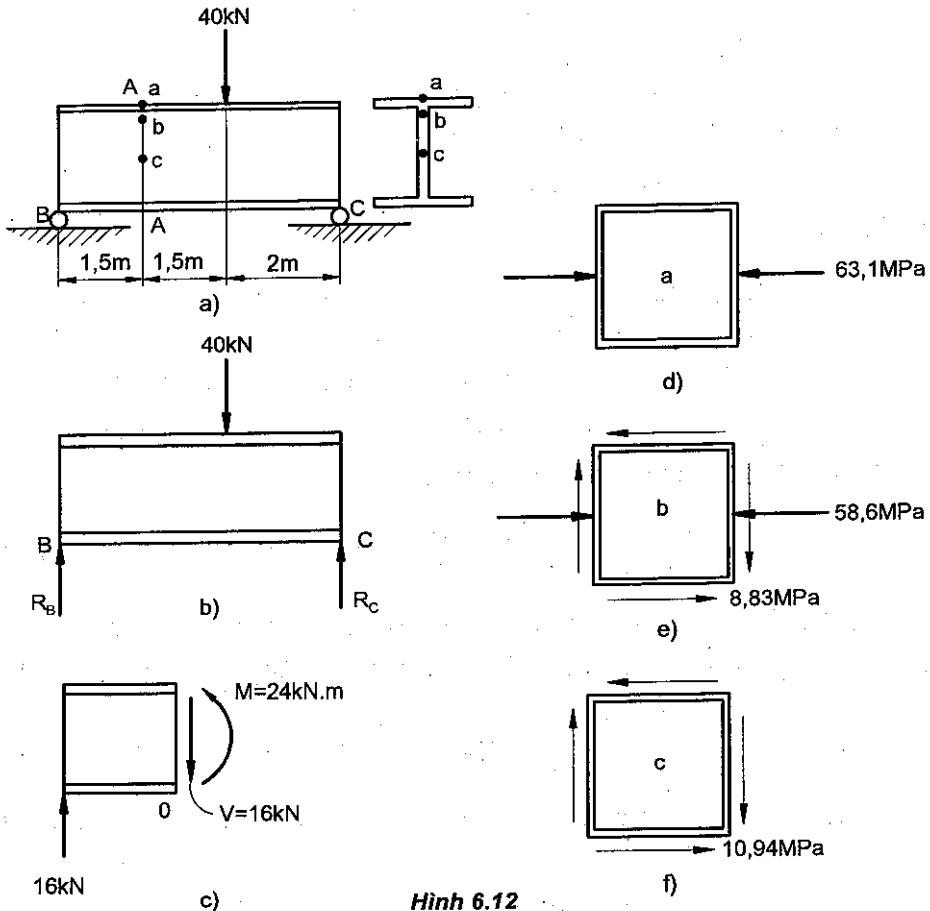
$$\tau_{tb} = \frac{V}{A_{\text{lông}}} = \frac{37,5.10^3}{6,2.10^{-3}.190.10^{-3}} = 31,83.10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 31,8 \text{MPa}$$



Ta thấy sai số so với kết quả trong (6.21) là 3,2%. Chú ý rằng công thức (6.22) chỉ được áp dụng với chữ I, không được áp dụng đối với các mặt cắt ngang khác.

Ví dụ 6.6: Dầm chữ I số hiệu mặt cắt W 254 × 33 liên kết và chịu lực như hình 6.12a. Tại mặt cắt A–A, xác định ứng suất pháp và tiếp tại các điểm sau:

- Tại điểm a ở mép trên của mặt cắt;
- Tại điểm b ở điểm tiếp giáp giữa lòng và đế;
- Tại điểm c trên trục trung hòa.



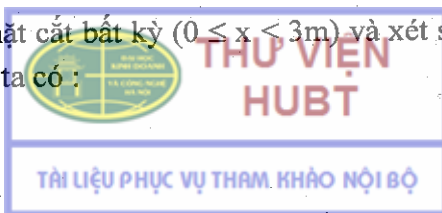
Hình 6.12

Giải: Phản lực liên kết tại hai đầu thanh xác định bởi:

$$\sum M_C = 40 \cdot 2 - R_B \cdot 5 = 0; R_B = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = -40 \cdot 3 + R_C \cdot 5 = 0; R_C = 24 \text{ kN}$$

Cắt dầm bằng mặt cắt bất kỳ ($0 \leq x < 3\text{m}$) và xét sự cân bằng của phần bên trái (hình 6.12c) ta có:



$$\sum F_y = 16 - V = 0 ; V = 16\text{kN}$$

$$\sum M_O = -16.(1,5) + M = 0 ; M = 24\text{kNm}$$

Các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang: $I_z = 49,1.10^6\text{mm}^4$, chiều cao $d = 258\text{mm}$, chiều rộng đế $w_f = 146\text{mm}$, bề dày đế $t_f = 9,1\text{mm}$; bề dày thân $t_w = 6,1\text{mm}$.

a) Ứng suất tại điểm a xác định bởi công thức:

$$\sigma_a = -\frac{M.y}{I_z} = -\frac{24.10^3.129.10^{-3}}{49,1.10^{-6}} = -63,05.10^6(\text{N} / \text{m}^2) \approx -63,1\text{MPa}$$

Ứng suất tiếp τ tại điểm a bằng không do tại đó mômen tĩnh Q của diện tích phần tổ cắt đi qua a là bằng không (công thức 6.17).

b) Tại điểm b, ta có khoảng cách $y = 129 - 9,1 = 119,9\text{mm}$. Do đó ứng suất pháp là:

$$\sigma_b = -\frac{M.y}{I_z} = -\frac{24.10^3.119,9.10^{-3}}{49,1.10^{-6}} = -58,61.10^6(\text{N} / \text{m}^2) \approx -58,6\text{MPa}$$

Mômen tĩnh của diện tích phía trên lát cắt đi qua điểm b là:

$$Q_b = y_C . A = (124,45).146.(9,1) = 165,34.10^3(\text{mm}^3) = 165,34.10^{-6}(\text{m}^3)$$

Ứng suất tiếp tại điểm b xác định bởi:

$$\tau_b = \frac{V.Q_b}{I_z.t_w} = \frac{16.10^3.165,34.10^{-6}}{49,1.10^{-6}.6,1.10^{-3}} = 8,832.10^6(\text{N} / \text{m}^2) \approx 8,83\text{MPa}$$

c) Ta thấy điểm c nằm trên trục trung hòa nên ứng suất pháp bằng không. Ứng suất tiếp tại c đạt giá trị lớn nhất và bằng (theo công thức 6.22):

$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_w} = \frac{16.10^3}{6,1.10^{-3}.(239,8).10^{-3}} = 10,938.10^6(\text{N} / \text{m}^2) \approx 10,94\text{MPa}$$

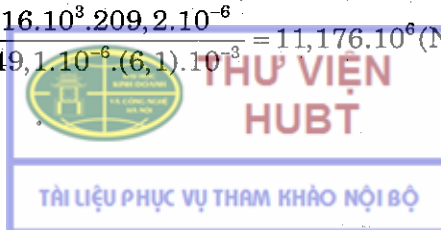
Chú ý rằng nếu ta áp dụng công thức (6.17) để tính ứng suất tiếp tại c, khi đó:

$$Q_C = y_C . A = 124,45.(146).(9,1) + 59,95.(119,9).(6,1) = 209,2.10^3(\text{mm}^3)$$

$$Q_C = 209,2.10^{-6}(\text{m}^3)$$

Vậy:

$$\tau_{\max} = \frac{V.Q_C}{I_z.t_w} = \frac{16.10^3.209,2.10^{-6}}{49,1.10^{-6}.(6,1).10^{-3}} = 11,176.10^6(\text{N} / \text{m}^2) \approx 11,18\text{MPa}$$



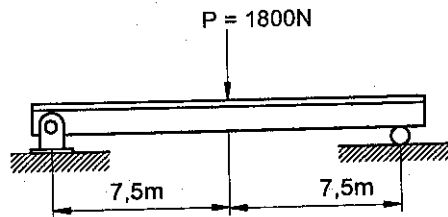
Sai số giữa hai kết quả tính theo (6.17) và (6.22) là :

$$\delta = \frac{11,176 - 10,938}{11,176} = 2,13\%$$

Trên hình 6.12d, e, f biểu diễn trạng thái ứng suất tại các điểm a, b, c trên dầm. Ta gọi các trạng thái đó lần lượt là: *Trạng thái ứng suất đơn, trạng thái căng phẳng đặc biệt, và trạng thái trượt thuần túy*. Việc kiểm tra điều kiện bền sẽ dựa theo các tiêu chuẩn (thuyết bền) mà trong chương 7 sẽ đề cập đến.

Ví dụ 6.7. Dầm đặt trên hai gối tựa, chịu lực tập trung ở giữa như hình 16.13a. Xác định :

- Ứng suất tiếp trung bình tại khoảng cách 4cm từ đế chữ T và cách 6m so với gối tựa trái;
- Ứng suất tiếp lớn nhất trên dầm;
- Ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu kéo.



Hình 6.13a

Giải: Theo kích thước cho trên hình 6.13b, ta có mômen quán tính của mặt cắt chữ T là:

$$I_z = \frac{1}{12} 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 \cdot 3^2 + \frac{1}{12} 10 \cdot 2^3 = 533,3(\text{cm}^4)$$

a) Từ biểu đồ lực cắt (hình 6.13c), lực cắt tại mặt cắt cách gối trái 6m bằng 900N, mômen tĩnh của diện tích phía trên lát cắt tại 4cm từ đế là :

$$Q_4 = y_{C_4} \cdot A_4 = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48(\text{cm}^3)$$

Ứng suất tiếp trung bình tại điểm đó là:

$$\tau_4 = \frac{V \cdot Q_4}{I_z \cdot t_4} = \frac{900 \cdot 48}{533,3 \cdot 2} = 40,5(\text{N} / \text{cm}^2)$$



b) Ứng suất tiếp lớn nhất đạt được trên trục trung hòa của mặt cắt ngang. Mômen tĩnh của diện tích phía trên trục trung hòa cũng bằng mômen tĩnh của phần dưới (do mômen tĩnh của toàn bộ diện tích đối với trục trung tâm bằng không), nên ta xét phần phía dưới trục trung hòa: $Q = 4.2.8 = 64(\text{cm}^3)$. Thay V và Q vào (6.17), ta có:

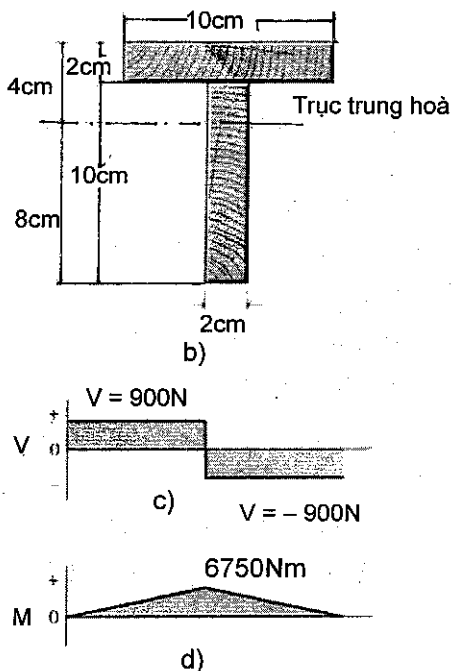
$$\tau_{\max} = \frac{V.Q}{I_z.t} = \frac{900.64}{(533,3).2} = 54,0(\text{N/cm}^2)$$

c) Từ biểu đồ mômen uốn (hình 6.13.d), ứng suất pháp lớn nhất ở miền chịu kéo đạt được tại điểm ở mép dưới của mặt cắt giữa dầm:

$$M_{\max} = 900.7,5 = 6750\text{N.m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}.c}{I_z} = \frac{6750.10^2.8}{533,3} = 10125,63(\text{N/cm}^2)$$

$$\sigma_{\max} \approx 10,13(\text{kN/cm}^2)$$



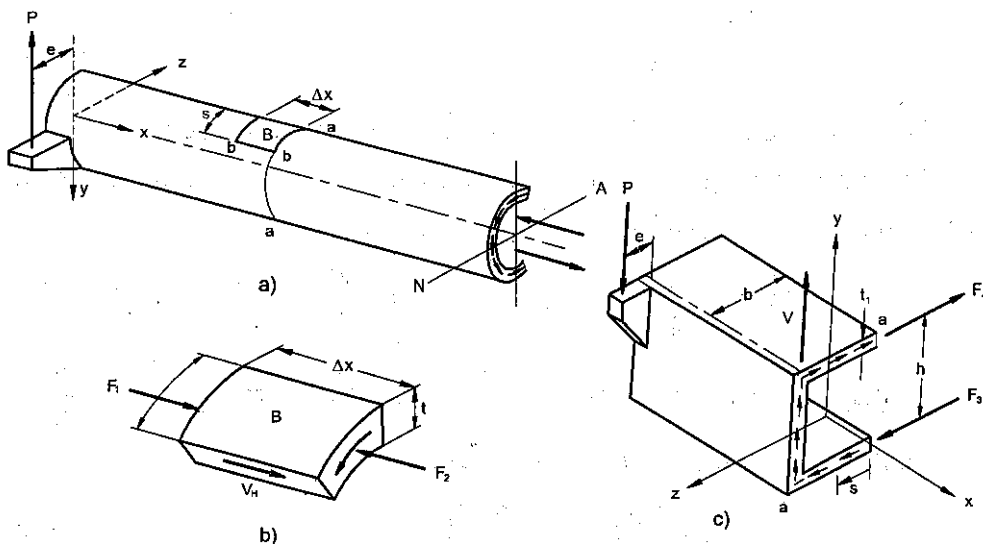
Hình 6.13

6.3.2. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang thành mỏng. Tâm cắt

Trong chương 5, khi xét dầm chịu uốn thuần túy ta giả thiết rằng tải trọng tác dụng trên mặt phẳng đối xứng của dầm. Khi điều kiện đó không thỏa mãn, dầm nói chung sẽ vừa bị uốn, vừa bị xoắn theo trục thanh. Tuy nhiên, ta có thể đặt tải trọng trong mặt phẳng sao cho đường tác dụng của nó đi qua tâm cắt (*shear center hoặc center of twist*). Tâm cắt được xác định trên mặt phẳng của mặt cắt ngang sao cho hợp lực của các ứng suất tiếp sẽ đi qua điểm đó, và do vậy mômen xoắn sẽ bằng không. Đối với các mặt cắt có hai trục đối xứng, tâm cắt trùng với trọng tâm của mặt cắt (ví dụ chữ I...), còn với mặt cắt có một trục đối xứng, tâm cắt sẽ nằm trên trục đối xứng đó (ví dụ chữ C, T). Nếu mặt cắt có tâm đối xứng (ví dụ chữ Z), tâm cắt sẽ

trùng với tâm đối xứng. Còn đối với mặt cắt gồm nhiều đoạn ghép lại (chữ L,...), tâm cắt sẽ nằm ở tiếp giáp giữa phân thân và đế.

Các mặt cắt ngang thành mỏng có bản cánh rộng (T, C, L...) khi chịu uốn sẽ có ứng suất tiếp lớn đáng kể. Xét dầm công-xôn có mặt cắt ngang hình dạng bất kỳ nhưng bề dày của thành không đổi (hình 6.14a). Tải trọng tác dụng trong mặt phẳng song song với một trong các trục quán tính chính của mặt cắt ngang. Xét phân tố tại điểm B có chiều dài Δx và chiều rộng s (hình 6.14b), mômen uốn tác dụng trên hai mặt bên của phân tố là M và ΔM , các lực F_1, F_2 tác dụng trên mặt của phân tố xác định bởi:



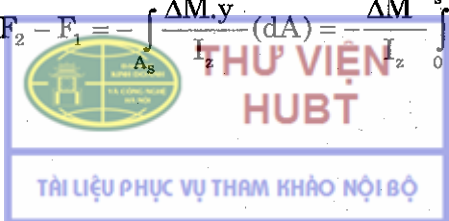
Hình 6.14

$$F_1 = \int_{A_s} \sigma dA = - \int_{A_s} \frac{M \cdot y}{I_z} dA = - \int_0^s \frac{M \cdot y}{I_z} (t \cdot ds)$$

$$F_2 = \int_{A_s} \sigma dA = - \int_{A_s} \frac{(M + \Delta M) \cdot y}{I_z} dA = - \int_0^s \frac{(M + \Delta M) \cdot y}{I_z} (t \cdot ds) \quad (6.23)$$

Trong đó A_s là diện tích của phần mặt cắt từ mép ngoài của chữ C đến lát cắt b-b có khoảng cách s . Tổng hình chiếu các lực tác dụng theo phương trục thanh có dạng:

$$V_H = F_2 - F_1 = - \int_{A_s} \frac{\Delta M \cdot y}{I_z} (dA) = - \frac{\Delta M}{I_z} \int_0^s y(t \cdot ds) \quad (6.24)$$



Ứng suất tiếp trung bình tại lát cắt b – b bằng:

$$\tau = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \left(-\frac{1}{I \cdot t} \right) \int_{A_s} y dA = \frac{dM}{dx} \left(-\frac{1}{I \cdot t} \right) \int_0^s y(tds) \quad (6.25)$$

Do $dM/dx = V$, tích phân trong biểu thức (6.25) là mômen tĩnh của phần diện tích mặt cắt giới hạn bởi lát cắt b – b đối với trục trung hòa, nên ta có:

$$\tau = -\frac{V \cdot Q_s}{I \cdot t} \quad (6.26)$$

Dấu trừ trong (6.26) để phù hợp với quy ước dấu của lực cắt. Tại mọi điểm trên mặt cắt ngang, ta có $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, do đó công thức (6.26) viết lại như sau :

$$\tau = \frac{V \cdot Q_s}{I \cdot t} \quad (6.27)$$

Chiều của τ trùng với chiều của lực cắt V trên mặt cắt ngang.

Bây giờ ta xác định vị trí của tâm cắt. Ứng suất tiếp phân bố trên phần bản cánh ($y = h/2$) của chữ C là:

$$\tau = \frac{V}{I \cdot t} \int_0^s y(tds) = \frac{V}{I \cdot t} \int_0^s \left(\frac{h}{2} \right) (t ds) = \frac{Vhs}{2I} \quad (6.28)$$

Ta thấy ứng suất tiếp phân bố tuyến tính từ 0 ở mép cánh đến $\frac{Vhb}{2I}$ ở cuối bản cánh. Hợp lực ở cuối bản cánh dưới bằng:

$$F_3 = \tau_{tb} \cdot A_f = \frac{Vhb}{4I} \cdot bt_1 = \frac{Vhb^2 t_1}{4I} \quad (6.29)$$

Tương tự, đối với bản cánh trên, ta có $F_4 = F_3$ về độ lớn nhưng ngược chiều (hình 6.14c).

Lực cắt V phải cân bằng với ngoại lực P , chúng tạo thành ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ để cân bằng với mômen do F_3 và F_4 gây nên :

$$P \cdot e = V \cdot e = h \cdot F_3 = \frac{Vh^2 b^2 \cdot t_1}{4I} \quad (6.30)$$

Trong đó e là khoảng cách từ điểm đặt lực P đến thân chữ C. Từ đó rút ra:

$$e = \frac{h^2 b^2 \cdot t_1}{4I} \quad (6.31)$$

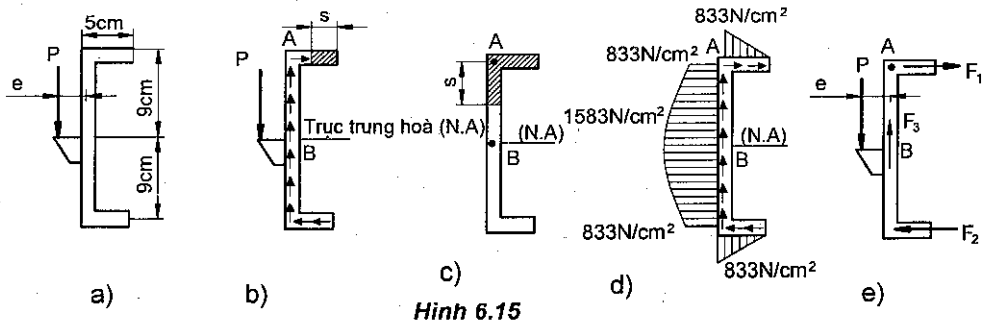


Vậy tâm cắt của mặt cắt ngang chữ C cách đường trung gian của thân một khoảng e xác định bởi công thức (6.31).

Tương tự, nếu lực P tác dụng theo phương z , ta có lực tương ứng F_3 và F_4 sẽ cân bằng với P . Trên thân chữ C sẽ có hai lực bằng nhau nhưng ngược chiều, vì vậy phương trình mômen có thể cân bằng nếu *tâm cắt nằm trên trục z (trục đối xứng)*. Trong trường hợp lực P nghiêng một góc bất kỳ, ta có thể *phân tích thành hai thành phần thẳng đứng và nằm ngang rồi áp dụng nguyên lý cộng tác dụng* để xác định tâm cắt.

Ví dụ 6.8: Dầm công-xôn mặt cắt ngang chữ C chịu lực tập trung $P = 12\text{kN}$ tại đầu tự do (hình 6.15), bề dày của thành là $0,5\text{cm}$. Xác định :

- a) Tâm cắt;
- b) Sự phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.



Hình 6.15

Giải: a) Vị trí của tâm cắt xác định theo công thức (6.31):

$$\text{Với : } I = \frac{1}{12} (0,5) \cdot 18^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{12} 5 \cdot (0,5)^3 + 5 \cdot (0,5) \cdot 9^2 \right] = 648 (\text{cm}^4)$$

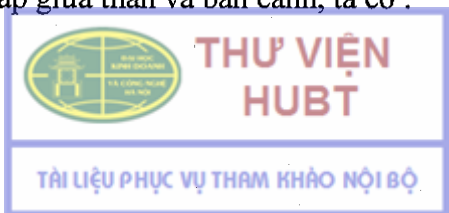
$h = 18 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$; $t = 0,5 \text{ cm}$, ta có:

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4I} = \frac{18^2 \cdot 5^2 \cdot (0,5)}{4 \cdot (648)} = 1,5625 (\text{cm}) \approx 1,563 (\text{cm})$$

b) Áp dụng công thức (6.17) ta có :

$$\tau = \frac{VQ_s}{I \cdot t} = \frac{V(st)(h/2)}{I \cdot t} = \frac{Vhs}{2I}$$

Ta thấy luật phân bố ứng suất tiếp ở bản cánh là tuyến tính (hình 6.15d)
 Tại điểm tiếp giáp giữa thân và bản cánh, ta có :



$$\tau = \frac{Vhs}{2I} = \frac{12.18.5}{2(648)} = 0,8333(\text{kN} / \text{cm}^2) \approx 833(\text{N} / \text{cm}^2)$$

Mômen tĩnh của phần thân cách một khoảng s đến đường trung gian của bản cánh bằng :

$$Q_s = Q_r + Q_w = 5.(0,5).9 + (0,5).s.(9 - 0,5.s) = 22,5 + 4,5s - 0,25s^2$$

Ta thấy luật phân bố ứng suất tiếp ở thân cánh là parabol (hình 6.15d).

Ứng suất tiếp lớn nhất ($s = 9\text{cm}$) đạt được trên trục trung hòa bằng :

$$\tau_B = \frac{VQ_s}{I.t_w} = \frac{12.(42,75)}{(648).(0,5)} = 1,5833(\text{kN} / \text{cm}^2) \approx 1583(\text{N} / \text{cm}^2)$$

Ta thấy ứng suất tiếp dường như « chảy » theo hướng ngược lại P để cân bằng với lực cắt (hình 6.15d).

Bây giờ ta kiểm tra lại phương trình cân bằng do các lực F_1, F_2, F_3 trên bản cánh và thân chữ C (hình 6.15 e) :

$$F_1 = \tau_{tb}.A_r = \frac{1}{2}(0,8333).5.(0,5) = 1,0416(\text{kN})$$

Lực F_2 ở bản cánh dưới có cùng độ lớn nhưng ngược chiều với F_1 ; lực F_3 trên thân mặt cắt xác định bởi :

$$F_3 = 833.(18).(0,5) + \frac{2}{3}(1583 - 833).(18).(0,5) = 11,997 \approx 12(\text{kN})$$

Ta thấy F_3 cân bằng với lực cắt $P = 12 \text{ kN}$.

Sử dụng hệ phương trình tổng hình chiếu theo phương y và tổng mômen đối với điểm B của các lực tác dụng lên phần dầm từ đầu tự do đến mặt cắt đang xét, ta thu được :

$$\sum F_y = F_3 - P = 11,997 - 12 = -0,003 \approx 0$$

$$\sum M_B = P.e - F_1.h = 12.(1,5625) - (1,0416).18 = 0,0012 \approx 0$$

Điều đó chứng minh kết quả xác định tâm cắt ở trên là đúng và *chỉ có phần thân mặt cắt là chống lại ứng suất tiếp theo phương thẳng đứng*. Nói cách khác, ngoại lực truyền tác dụng lên dầm qua thân của mặt cắt, vì vậy độ cứng của nó cần đảm bảo để kết cấu được bền.

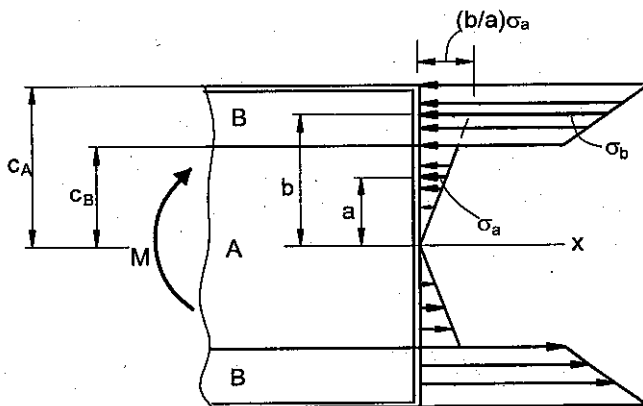


6.3.3. Ứng suất trên mặt cắt ngang của thanh có vật liệu khác nhau

Phương pháp biến đổi mặt cắt trình bày trong chương 5 có hiệu quả chủ yếu đối với các thanh đối xứng gồm nhiều lớp vật liệu khác nhau ghép lại (theo chiều dài). Tuy nhiên, trong thực tế nhiều dầm được ghép từ hai vật liệu khác nhau (chủ yếu là để gia cường độ cứng), ta cần phát triển phương pháp đó để giảm bớt khối lượng tính toán. Chú ý rằng chỉ *giới hạn khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi*.

Giả thuyết về mặt cắt ngang luôn phẳng trong quá trình biến dạng vẫn được bảo toàn, khi các vật liệu khác nhau được ghép một cách chắc chắn để có thể chống lại ứng suất tiếp theo phương dọc trục. Do đó công thức biến dạng dài tỷ đối theo phương x vẫn giữ nguyên :

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (6.32)$$



Hình 6.16

Xét dầm trên hình 6.16, mặt cắt ngang gồm phần giữa làm từ vật liệu A và hai phần bên ngoài làm từ vật liệu B. Giả thiết mặt cắt đối xứng qua mặt phẳng xy và xz, và mômen tác dụng trong mặt phẳng xy. Biến dạng tại các điểm a của vật liệu A và điểm b của vật liệu B xác định theo công thức :

$$\varepsilon_a = -\frac{a}{\rho} ; \varepsilon_b = -\frac{b}{\rho} \quad (6.33)$$

Từ đó : $\varepsilon_b = \frac{b}{a} \varepsilon_a$

Do vật liệu làm việc trong miền đàn hồi nên có thể áp dụng định luật Húc :



$$\frac{\sigma_b}{E_B} = \frac{b}{a} \left(\frac{\sigma_a}{E_A} \right) \quad (6.34)$$

Với E_A, E_B là môđun đàn hồi của vật liệu A và B.

$$\text{Hay : } \sigma_b = \frac{b}{a} \left(\frac{E_B}{E_A} \right) \sigma_a \quad (6.35)$$

Ta thấy từ (6.35) tại phần tiếp giáp giữa hai vật liệu, khi $a = b$ sẽ có sự thay đổi đột ngột về ứng suất, xác định bởi hệ số :

$$n = \frac{E_B}{E_A} \quad (6.36)$$

Lực dọc tác dụng lên phân tử của vật liệu B xác định từ biểu thức :

$$dF_B = \sigma_b \cdot dA = n \cdot \frac{b}{a} (\sigma_a) \cdot dA = \left(\frac{b}{a} \sigma_a \right) (n \cdot t) dy ; (c_A \leq y \leq c_B) \quad (6.37)$$

Với t là bề rộng của mặt cắt tại vị trí cách trục trung hòa một khoảng bằng b . Thừa số thứ nhất trong ngoặc biểu thị sự *phân bố tuyến tính của ứng suất pháp trong vật liệu đồng nhất A*, thừa số thứ hai trong ngoặc có thể coi là *sự kéo dài chiều rộng của mặt cắt từ $y = c_A$ đến $y = c_B$, nếu như vật liệu B được thay thế bằng vật liệu A*. Mặt cắt thu được bằng cách trên gọi là *mặt cắt quy đổi*, có nghĩa là ta *thay thế một vật liệu bằng lượng vật liệu khác xác định bởi hệ số n giữa các môđun đàn hồi*. Phương pháp này không hạn chế bởi hai loại vật liệu.

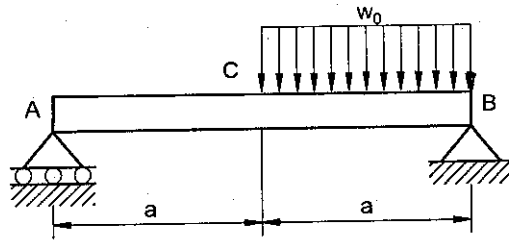
6.4. SỬ DỤNG HÀM GIÁN ĐOẠN XÁC ĐỊNH LỰC CẮT VÀ MÔMEN UỐN

Trong mục này ta sẽ ứng dụng hàm gián đoạn (*Discontinuity, or Singularity function*) để biểu diễn lực cắt và mômen uốn thành *biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài của dầm, cho dù dầm chịu tải trọng khác nhau trên các đoạn*.

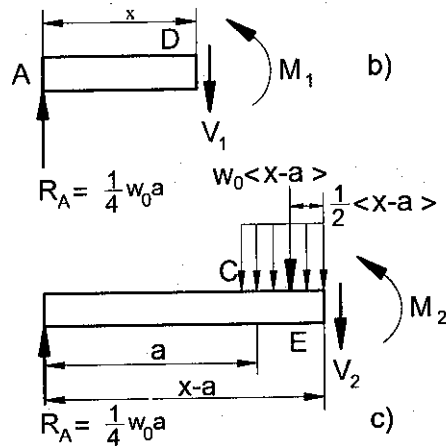
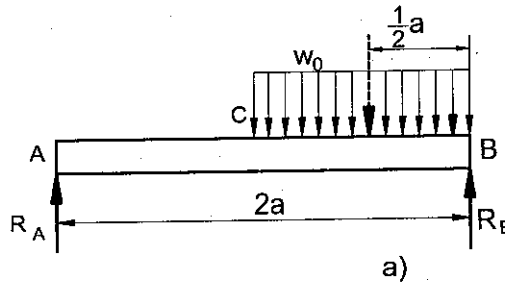
Ví dụ 6.9: Xét dầm đặt trên hai gối tựa có chiều dài a chịu tải trọng phân bố đều w từ điểm giữa C đến gối tựa bên phải B (hình 6.17). Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn.

Giải: Ta giải phóng liên kết và xét sự cân bằng của dầm (hình 6.18a):

$$\sum M_B = 0 : (w_0 a) \left(\frac{1}{2} a \right) - R_A (2a) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{4} w_0 a$$



Hình 6.17



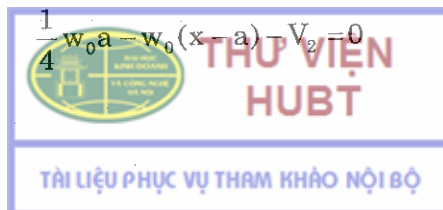
Hình 6.18

Tiếp theo ta cắt dầm tại D giữa A và C. Từ sự cân bằng của đoạn AD, ta có với $0 < x < a$, lực cắt và mômen uốn xác định bởi (hình 6.8b):

$$V_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a \quad \text{và} \quad M_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a x$$

Bây giờ ta cắt dầm tại E giữa C và B (hình 6.8c), phương trình cân bằng tĩnh học cho ta:

$$\uparrow \sum F_y = 0: \quad \frac{1}{4} w_0 a - w_0(x-a) - V_2 = 0$$



$$\sum M_E = 0: -\frac{1}{4} w_0 a x + w_0 (x-a) \left[\frac{1}{2} (x-a) \right] + M_2 = 0$$

Từ đó ta có trên đoạn $a < x < 2a$, lực cắt và mômen uốn được biểu diễn bởi hàm số:

$$V_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 (x-a) \text{ và } M_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 (x-a)^2$$

Như trên đã đề cập, lực cắt và mômen được biểu diễn bằng các hàm số khác nhau phụ thuộc vào khoảng cách x lớn hơn hay nhỏ hơn độ dài a nào đó là do sự gián đoạn của tải trọng tác dụng lên dầm. Tuy nhiên, ta có thể biểu diễn $V_1(x)$ và $V_2(x)$ dưới dạng duy nhất sau:

$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x-a \rangle$$

Ta chỉ rõ rằng số hạng thứ hai được tính khi $x \geq a$ và bỏ qua khi $x < a$. Nói cách khác, dấu ngoặc $\langle \rangle$ được thay bởi $()$ khi $x \geq a$ và bằng không khi $x < a$. Tương tự, với mômen uốn ta có thể biểu diễn dưới dạng:

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 \langle x-a \rangle^2$$

Theo quy ước trên, hàm số trong dấu $\langle \rangle$ có thể lấy đạo hàm hoặc tích phân như trong dấu ngoặc đơn thông thường. Ta có từ biểu thức của lực cắt, tích phân theo biến x , ta được:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x) dx = \int_0^x \frac{1}{4} w_0 a dx - \int_0^x w_0 \langle x-a \rangle dx$$

Chú ý rằng $M(0) = 0$, ta có kết quả giống như trên:

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 \langle x-a \rangle^2$$

Hơn nữa, ta có thể biểu diễn tải trọng phân bố dưới dạng:

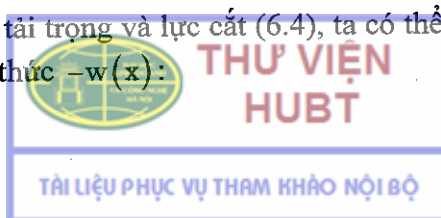
$$w(x) = w_0 \langle x-a \rangle^0$$

Có nghĩa là biểu thức trong ngoặc sẽ được thay thế bằng không khi $x < a$ và bằng biểu thức trong ngoặc đơn thông thường nếu $x \geq a$:

$$w(x) = 0 \text{ với } x < a$$

Và $w(x) = w_0$ với $x \geq a$.

Từ liên hệ giữa tải trọng và lực cắt (6.4), ta có thể xác định lực cắt bằng cách tích phân biểu thức $-w(x)$:



Để ý rằng $V = \frac{1}{4} w_0 a$ khi $x = a$, ta có:

$$V(x) - V(0) = - \int_0^x w(x) dx = - \int_0^x w_0 \langle x - a \rangle^0 dx$$

$$V(x) - \frac{1}{4} w_0 a = - w_0 \langle x - a \rangle^1$$

Ta có thể rút ra biểu thức lực cắt như sau:

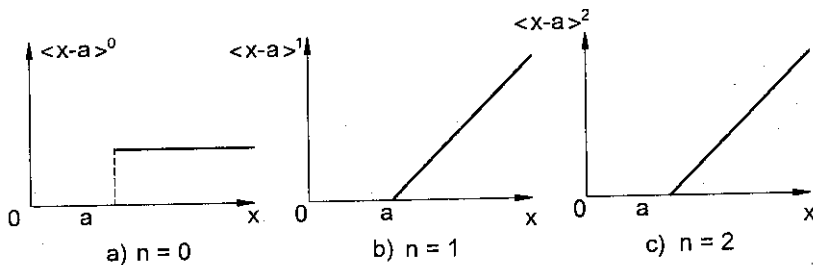
$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x - a \rangle^1$$

Các biểu thức $\langle x - a \rangle^0$, $\langle x - a \rangle^1$, $\langle x - a \rangle^2$... được gọi là hàm gián đoạn, được định nghĩa như sau:

Với $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{khi } x \geq a \\ 0 & \text{khi } x < a \end{cases} \quad (6.38)$$

Ta thấy khi biểu thức trong ngoặc là dương hay bằng không, dấu ngoặc có thể thay thế bằng ngoặc đơn thông thường, còn khi biểu thức âm, nó được thay bằng không.



Hình 6.20

Trên hình 6.20 là đồ thị của ba hàm gián đoạn tương ứng với $n = 0$, $n = 1$, và $n = 2$. Ta thấy hàm số $\langle x - a \rangle^0$ bị gián đoạn (loại 1) tại điểm $x = a$, và có dạng “bước nhảy”. Vì thế nó còn được gọi là hàm “bước nhảy” (*step function*). Theo công thức (6.38), với quy ước lũy thừa bậc 0 của 0 bằng một, ta có:

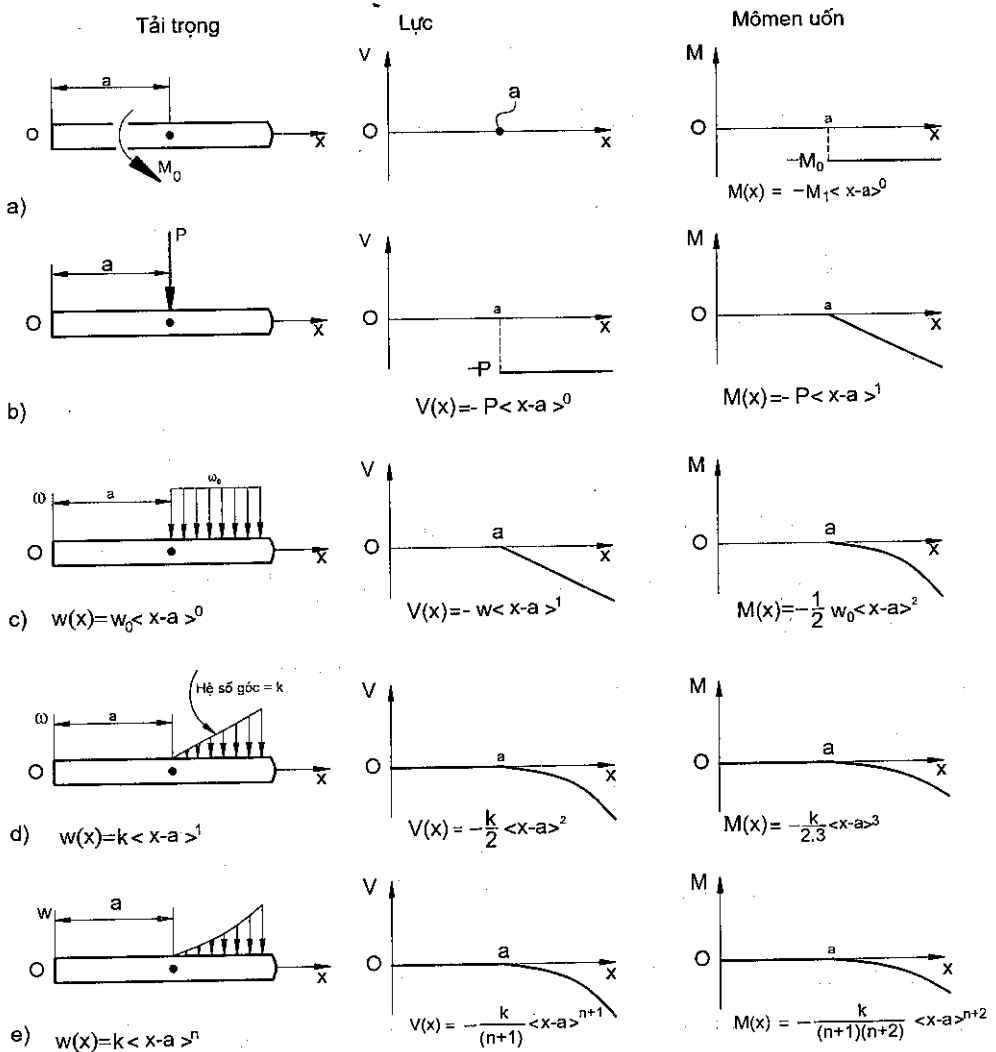
$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq a \\ 0 & \text{khi } x < a \end{cases}$$

Từ định nghĩa của hàm gián đoạn, ta có các tính chất sau:



$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1} \quad \text{với } n > 0 \quad (6.39)$$

$$\text{Và } \frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1} \quad \text{khi } n \geq 1 \quad (6.40)$$



Hình 6.21. Các trường hợp chịu tải trọng cơ bản và đồ thị lực cắt, mômen uốn biểu diễn qua hàm gián đoạn

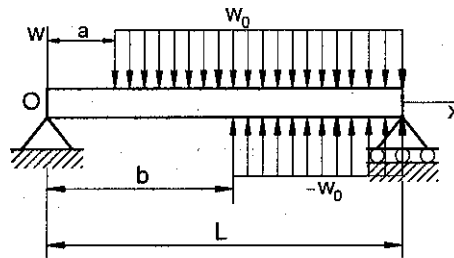
Hầu hết các dầm chịu tải trọng trong thực tế kỹ thuật có thể phân tích thành các trường hợp cơ bản như hình 6.21. Khi sử dụng, các hàm số tải

trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn $w(x)$, $V(x)$, $M(x)$ được biểu diễn dưới dạng hàm gián đoạn và được tô theo các màu sắc nền khác nhau. Màu đậm của nền để chỉ loại tải trọng nào hay dùng đến hoặc để dễ nhớ.

$$V(x) = -\frac{k}{(n+1)} \langle x-a \rangle^{n+1}$$

$$M(x) = -\frac{k}{(n+1)(n+2)} \langle x-a \rangle^{n+2}$$

Sau khi phân tích dầm thành các trường hợp chịu lực cơ bản và biểu diễn $V(x)$, $M(x)$ bằng hàm gián đoạn, ta áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để biểu diễn lực cắt và mômen uốn thành một biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài của dầm (coi phản lực và mômen phản lực liên kết như là lực tập trung và mômen tập trung ngoại lực). Đối với trường hợp tải trọng phân bố, khi nó không kết thúc ở đầu mút phải của dầm, ta cần thay thế chúng bằng hệ tải trọng phân bố tương đương (hình 6.22).

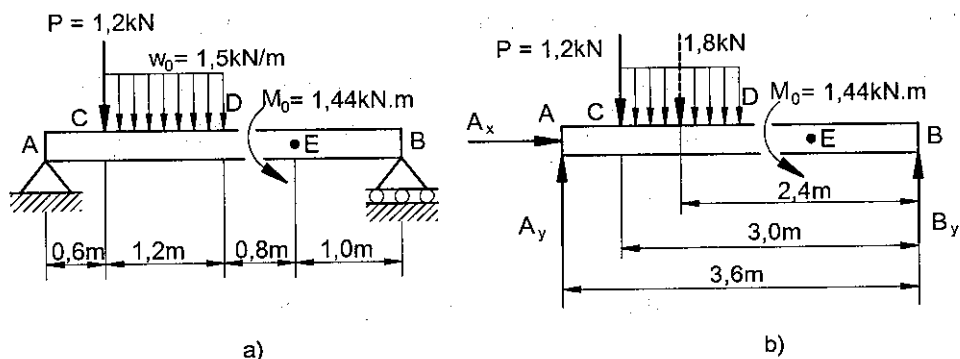


Hình 6.22

Ví dụ 6.10: Cho dầm chịu tải trọng như hình 6.23a.

a) Hãy biểu diễn lực cắt và mômen uốn bằng hàm gián đoạn theo khoảng cách x từ gối trái A;

b) Xác định lực cắt và mômen uốn tại điểm giữa D.



Hình 6.23

Giải: a) Ta giải phóng liên kết và xác định phản lực tại gối tựa A:

$$\pm \sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0: -A_y(3,6\text{m}) + (1,2\text{kN})(3\text{m}) + (1,8\text{kN})(2,4\text{m}) + 1,44\text{kN.m} = 0$$

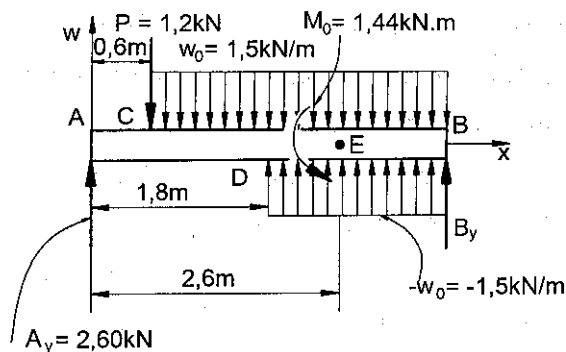
$$A_y = 2,60\text{kN}$$

Tiếp theo ta thay tải trọng phân bố đều trên CD bằng hai đoạn CB và DB chịu tải trọng phân bố tương đương (hình 6.23c). Ta có hàm $w(x)$ được biểu diễn bằng: $w(x) = +w_0 \langle x - 0,6 \rangle^0 - w_0 \langle x - 1,8 \rangle^0$,

Hàm $V(x)$ thu được bằng cách tích phân $w(x)$, chú ý đổi dấu của $w(x)$, do $dV(x)/dx = -w(x)$, và cộng thêm phản lực liên kết A_y , lực tập trung $-P \langle x - 0,6 \rangle^0$ (chú ý rằng không có hằng số tích phân nào được thêm vào $V(x)$), ta có: $V(x) = -w_0 \langle x - 0,6 \rangle^1 + w_0 \langle x - 1,8 \rangle^1 + A_y x - P \langle x - 0,6 \rangle^0$

Tương tự, mômen uốn được xác định bằng cách tích phân hàm $V(x)$ và thêm vào mômen tập trung: $-M_0 \langle x - 2,6 \rangle^0$, ta có:

$$M(x) = -\frac{1}{2} w_0 \langle x - 0,6 \rangle^2 + \frac{1}{2} w_0 \langle x - 1,8 \rangle^2 + A_y x - P \langle x - 0,6 \rangle^1 - M_0 \langle x - 2,6 \rangle^0$$



Hình 6.23c

Thay thế giá trị của phản lực liên kết và các tải trọng tác dụng lên dầm, ta có: biểu thức lực cắt và mômen tại điểm bất kỳ trên dầm là :

$$V(x) = -1,5\langle x - 0,6 \rangle^1 + 1,5\langle x - 1,8 \rangle^1 + 2,6 - 1,2\langle x - 0,6 \rangle^0$$

$$M(x) = -0,75\langle x - 0,6 \rangle^2 + 0,75\langle x - 1,8 \rangle^2 + 2,6x - 1,2\langle x - 0,6 \rangle^1 - 1,44\langle x - 2,6 \rangle^0$$

b) Bây giờ ta tính giá trị của lực cắt và mômen uốn tại điểm D. Thay $x = 1,8\text{m}$ vào biểu thức trên của $V(x)$ và $M(x)$, ta thu được:

$$V(1,8) = -1,5\langle 1,2 \rangle^1 + 1,5\langle 0 \rangle^1 + 2,6 - 1,2\langle 1,2 \rangle^0$$

$$M(1,8) = -0,75\langle 1,2 \rangle^2 + 0,75\langle 0 \rangle^2 + 2,6(1,8) - 1,2\langle 1,2 \rangle^1 - 1,44\langle -0,8 \rangle^0$$

Chú ý quy ước của hàm gián đoạn, nếu biểu thức trong ngoặc dương hoặc bằng không thì thay thế bằng ngoặc đơn, còn nếu âm thì triệt tiêu, ta có:

$$\begin{aligned} V(1,8) &= -1,5\langle 1,2 \rangle^1 + 1,5\langle 0 \rangle^1 + 2,6 - 1,2\langle 1,2 \rangle^0 \\ &= -1,5(1,2) + 1,5(0) + 2,6 - 1,2(1) \\ &= -1,8 + 0 + 2,6 - 1,2 \end{aligned}$$

Vậy $V(1,8) = -0,4\text{kN}$

Tương tự:

$$\begin{aligned} M(1,8) &= -0,75(1,2)^2 + 0,75(0)^2 + 2,6(1,8) - 1,2(1,2) - 1,44(-0,8)^0 \\ &= -1,08 + 0 + 4,68 - 1,44 - 0 \end{aligned}$$

$M(1,8) = +2,16\text{kN.m}$

Áp dụng tin học để lập chương trình máy tính: Ưu điểm nổi bật của phương pháp hàm gián đoạn là:



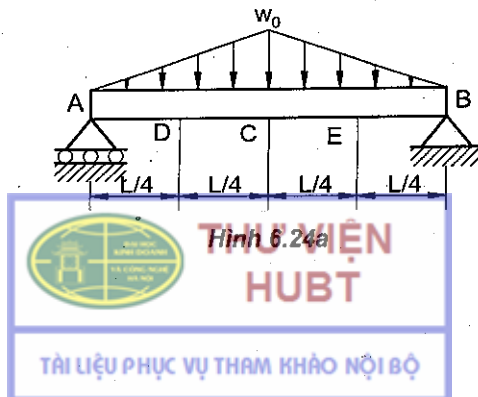
- Rất dễ sử dụng và có thể *tin học hóa* để giảm bớt công sức tính toán.
- Có thể áp dụng với *đa số dạng tải trọng* (lực tập trung, mômen tập trung, lực phân bố theo hàm lũy thừa).
- Biểu thức lực cắt và mômen uốn là *duy nhất* trên toàn chiều dài, do đó khi tính độ võng, góc xoay sẽ chỉ cần xác định *hai hằng số tích phân* từ điều kiện liên kết của dầm, mà không phải giải hệ phương trình n ẩn số (trong trường hợp dầm gồm n đoạn khác nhau). Trong chương 8 ta sẽ đề cập đến vấn đề này.
- Có thể áp dụng cho cả thanh chịu *kéo (nén)* và *xoắn* để biểu diễn nội lực thành hàm duy nhất trên toàn chiều dài, từ đó xác định được biên dạng bằng tích phân các biểu thức tương ứng.

- Có thể áp dụng cho bài toán *tĩnh định* lẫn bài toán *siêu tĩnh*.

Ta có thể thực hiện việc lập trình để tính hàm gián đoạn như sau: Hàm $\langle x - a \rangle^0$, được ký hiệu bởi STP, có thể xác định nhờ toán tử IF/THEN/ELSE và sẽ bằng 1 nếu $x \geq a$ và bằng 0 khi $x < a$. Các hàm khác có dạng $\langle x - a \rangle^n$, với $n \geq 1$, có thể biểu diễn bằng tích của hàm mũ thông thường $(x - a)^n$ và hàm $\langle x - a \rangle^0 : \langle x - a \rangle^n = (x - a)^n \cdot \langle x - a \rangle^0$

Nếu có k hàm gián đoạn dạng $\langle x - a_i \rangle^n$, ($i = 1, 2, \dots, k$) thì các hàm “bước nhảy” tương ứng STP(i), ($i = 1, 2, \dots, k$) có thể được xác định bằng vòng lặp với toán tử IF/THEN/ELSE .

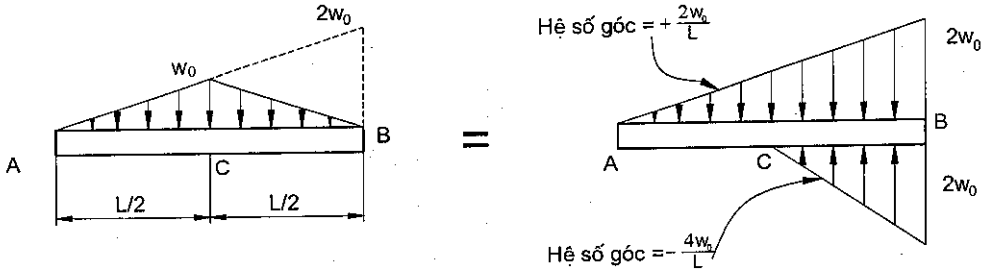
Ví dụ 6.11: Xác định : a) Phương trình của lực cắt và mômen uốn tại điểm bất kỳ; b) lực cắt và mômen uốn tại các điểm C, D, và E của dầm chịu lực như hình 6.24a.



Giải:

Ta xác định các phản lực liên kết, do tính đối xứng của tải trọng nên

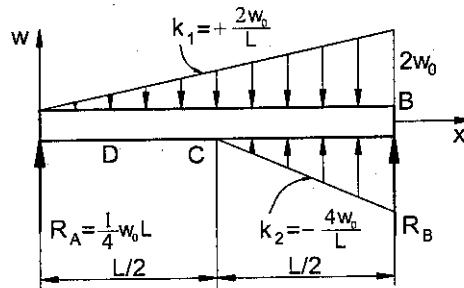
$$R_A = R_B = \frac{1}{4} w_0 L.$$



Hình 6.24b

Ta thay thế tải trọng theo hình tam giác thành hai hình tương đương (hình 6.24b), áp dụng hàm gián đoạn ta có:

$$w(x) = k_1 x + k_2 \left\langle x - \frac{1}{2} L \right\rangle^1 = \frac{2w_0}{L} x - \frac{4w_0}{L} \left\langle x - \frac{1}{2} L \right\rangle^1 \quad (a)$$



Hình 6.24c

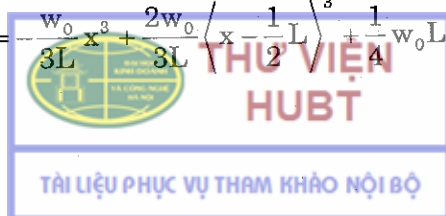
a) Phương trình lực cắt và mômen uốn (hình 6.24c)

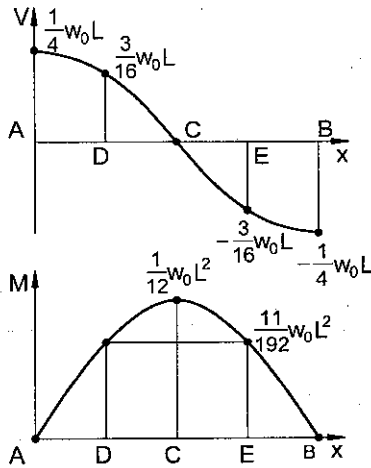
$V(x)$ xác định bằng cách tích phân biểu thức (a) rồi đổi dấu, và cộng thêm phản lực liên kết R_A :

$$V(x) = -\frac{w_0}{L} x^2 + \frac{2w_0}{L} \left\langle x - \frac{1}{2} L \right\rangle^2 + \frac{1}{4} w_0 L \quad (b)$$

Tương tự $M(x)$ xác định bằng tích phân (b), do không có mômen tập trung nên không cần cộng thêm số hạng nào:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L} x^3 + \frac{2w_0}{3L} \left\langle x - \frac{1}{2} L \right\rangle^3 + \frac{1}{4} w_0 L x \quad (c)$$





Hình 6.24d

b) Lực cắt và mômen uốn tại C, D, và E

Tại C: Thay $x = \frac{1}{2}L$ vào (b) và (c), nhớ rằng khi giá trị trong ngoặc không âm, ta thay thế bằng ngoặc đơn, ta có:

$$V_C = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{1}{2}L \right)^2 + \frac{2w_0}{L} \langle 0 \rangle^2 + \frac{1}{4} w_0 L$$

$$\text{Vậy } V_C = 0; M_C = -\frac{w_0}{3L} \left(\frac{1}{2}L \right)^3 + \frac{2w_0}{3L} \langle 0 \rangle^3 + \frac{1}{4} w_0 L \left(\frac{1}{2}L \right)$$

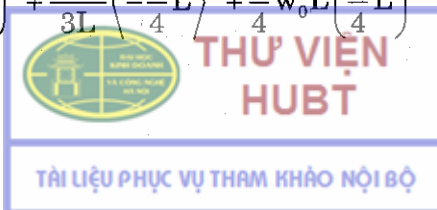
$$\text{Hay: } M_C = \frac{1}{12} w_0 L^2$$

Tại D: Thay $x = \frac{1}{4}L$ vào (b) và (c), nhớ rằng khi biểu thức trong ngoặc âm thì bị triệt tiêu, ta có:

$$V_D = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{1}{4}L \right)^2 + \frac{2w_0}{L} \left\langle -\frac{1}{4}L \right\rangle^2 + \frac{1}{4} w_0 L$$

$$\text{Vậy: } V_D = \frac{3}{16} w_0 L$$

$$M_D = -\frac{w_0}{3L} \left(\frac{1}{4}L \right)^3 + \frac{2w_0}{3L} \left\langle -\frac{1}{4}L \right\rangle^3 + \frac{1}{4} w_0 L \left(\frac{1}{4}L \right)$$



Hay: $M_D = \frac{11}{192} w_0 L^2$

Tại E: Thay $x = \frac{3}{4}L$ vào (b) và (c) ta có:

$$V_E = -\frac{w_0}{L} \left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{2w_0}{L} \left\langle \frac{1}{4}L \right\rangle^2 + \frac{1}{4} w_0 L$$

Hay: $V_E = -\frac{3}{16} w_0 L$

$$M_E = -\frac{w_0}{3L} \left(\frac{3}{4}L\right)^3 + \frac{2w_0}{3L} \left\langle \frac{1}{4}L \right\rangle^3 + \frac{1}{4} w_0 L \left(\frac{3}{4}L\right)$$

Vậy: $M_E = \frac{11}{192} w_0 L^2$

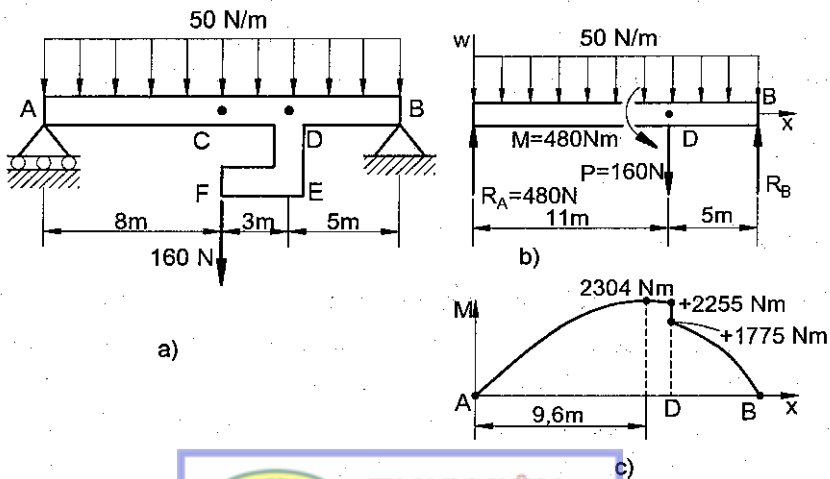
Vi dụ 6.12: Thanh cứng tuyệt đối DEF được hàn với dầm AB tại D (hình 6.25a) chịu lực như hình vẽ. Xác định:

- a) Phương trình lực cắt và mômen uốn tại điểm bất kỳ;
- b) Vị trí và giá trị lớn nhất của mômen uốn.

Giải:

Giải phóng liên kết, thay tác dụng của lực P bằng mômen tập trung tại D (hình 6.25b): $M_D = 480\text{Nm}$, và chú ý tính chất đối xứng ta có: $R_A = R_B = 480\text{N}$.

Biểu thức của tải trọng phân bố: $w(x) = 50 \langle x - 0 \rangle^0$ (a)



a) Phương trình của lực cắt và mômen uốn: $V(x)$ xác định từ tích phân (a) và đổi dấu, cộng thêm phản lực liên kết R_A và lực tập trung P , áp dụng hàm gián đoạn, ta có:

$$V(x) = -50x + 480 - 160\langle x - 11 \rangle^0 \quad (b)$$

Tương tự $M(x)$ thu được từ tích phân (b), cộng thêm tác dụng của mômen tập trung M_D :

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11 \rangle^1 - 480\langle x - 11 \rangle^0 \quad (c)$$

b) Vị trí và độ lớn của mômen uốn lớn nhất (hình 6.25c): tại $x = 9,60\text{m}$ (nơi có lực cắt bằng không) từ (c) ta có: $M_{\max} = 2304\text{Nm}$

6.5. THIẾT KẾ DẦM CHỊU UỐN

Việc thiết kế dầm có mặt cắt ngang chữ nhật, hình tròn, hoặc thanh thành mỏng hình dạng khác nhau chịu uốn được xét đến với yêu cầu về độ bền và kinh tế. Điều đó có nghĩa là trong số các dầm có cùng hình dáng và vật liệu, cùng tải trọng và điều kiện liên kết như nhau, dầm nào có trọng lượng trên một đơn vị chiều dài nhỏ nhất, hay kích thước mặt cắt ngang nhỏ nhất sẽ được chọn để có giá thành rẻ nhất.

Để đạt mục đích trên, ta cần thiết kế dầm theo các bước cơ bản sau:

Bước 1: Xác định ứng suất cho phép đối với từng vật liệu (sử dụng bảng trong phụ lục), hoặc theo yêu cầu thiết kế.

Bước 2: Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn, từ đó xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của lực cắt $|Q_{\max}|$ và mômen uốn $|M_{\max}|$ trên toàn chiều dài dầm.

Bước 3: Xác định giá trị nhỏ nhất của mômen chống uốn S_{\min} của mặt cắt ngang:

$$S_{\min} = \frac{|M_{\max}|}{\sigma_{\text{all}}} \quad (6.41)$$

Chú ý rằng: $S = \frac{I}{c} \quad (6.42)$

Với c là khoảng cách lớn nhất đến trục trung hòa, I là mômen quán tính của mặt cắt ngang, do đó (6.41) thỏa mãn có nghĩa là ta chọn $I = I_{\min}$.

Bước 4: Xác định kích thước của mặt cắt ngang: Đối với dầm lẳng trụ, từ giá trị nhỏ nhất của mômen chống uốn, hoặc với mặt cắt ngang là thép định hình thì chọn mặt cắt có trọng lượng nhỏ nhất trên một đơn vị chiều dài (từ bảng phụ lục).



Chú ý rằng bước 3 sẽ thay đổi nếu vật liệu là *giòn*, vì *ứng suất cho phép khi kéo và nén là khác nhau*. Trong trường hợp đó cần so sánh giá trị tuyệt đối của M_{\max} và M_{\min} rồi tìm *mômen chống uốn nhỏ nhất*.

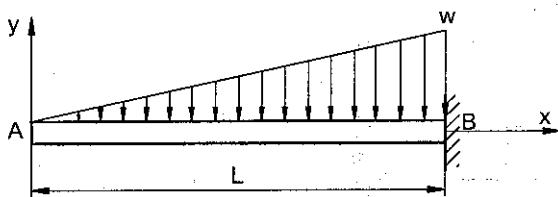
Một điều quan trọng cần chú ý là *đối với dầm có chiều dài lớn, ta chỉ cần xác định ứng suất pháp*. Còn đối với dầm ngắn, *ảnh hưởng của lực cắt lớn nên cần tính đến ứng suất tiếp*. Đặc biệt là với mặt cắt ngang thành mỏng, ứng suất pháp và tiếp tại điểm tiếp giáp giữa lòng và đế rất lớn, do đó cần xác định ứng suất chính (trong chương 7 ta sẽ xét sau) rồi sử dụng các tiêu chuẩn tương ứng về bền.

Thiết kế dầm lằng trụ với việc xác định mặt cắt nguy hiểm nhất (nội lực lớn nhất) dẫn đến chọn kích thước mặt cắt lớn hơn thực tế, còn đối với thanh thành mỏng, ta thấy bước 4 đảm bảo được tiết kiệm vật liệu. Vì vậy cần thiết kế dầm có *độ bền đều, để dung hòa được yêu cầu về độ bền và về kinh tế*. Đối với chi tiết máy hay kết cấu bằng kim loại đúc, có thể cho mặt cắt thay đổi theo chiều dài để giảm bớt chi phí vật liệu. Còn với dầm gỗ, hay dầm mặt cắt thành mỏng ta không thể làm như vậy được, tuy nhiên vẫn có thể tiết kiệm vật liệu bằng cách ghép dán các mảnh gỗ với các chiều dài hợp lý, rồi sử dụng tấm gia cường tại nơi có mômen uốn lớn nhất.

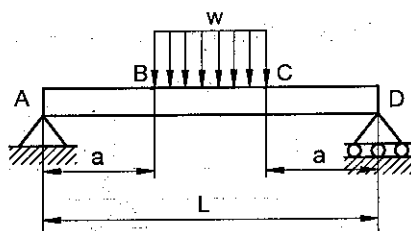
BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1 – 6.3. Hình BT 6.1 – 6.3.

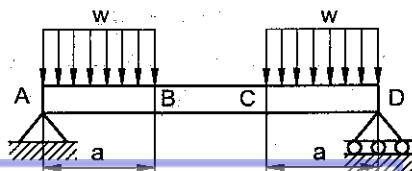
- Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn.
- Viết phương trình của lực cắt và mômen uốn



Hình BT 6.1



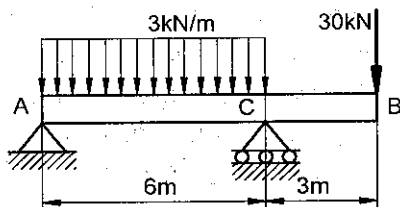
Hình BT 6.2



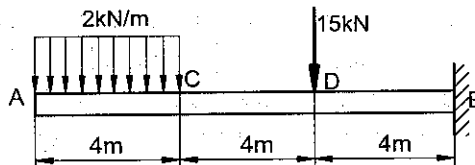
Hình BT 6.3



6.4 – 6.5. Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn (hình BT 6.4 – 6.5). Xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của : a) Lực cắt; b) Mômen uốn.



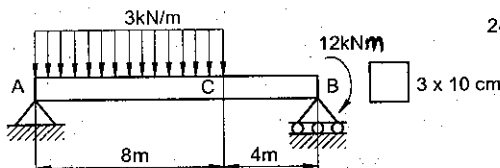
Hình BT 6.4



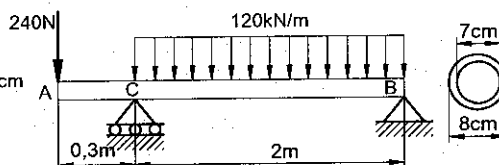
Hình BT 6.5

6.6. Hình BT 6.6.

- Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn;
- Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất trên dầm.



Hình BT 6.6



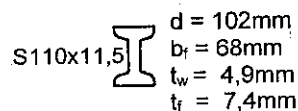
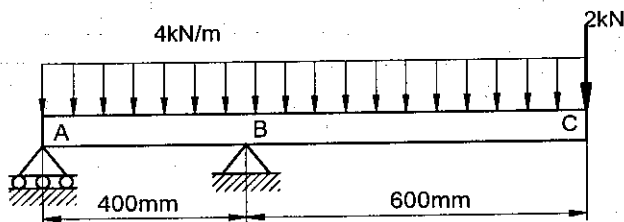
Hình BT 6.7

6.7. Hình BT 6.7.

- Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn;
- Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất trên dầm.

6.8. Hình BT 6.8.

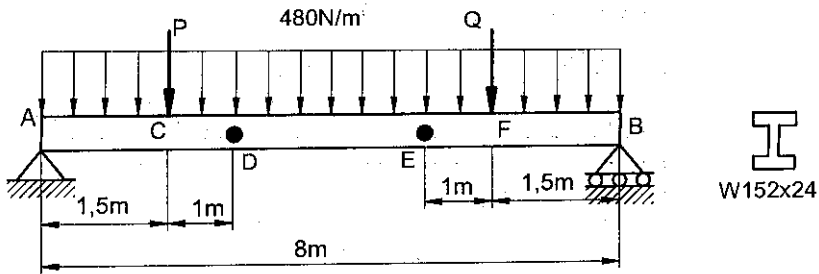
- Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn;
- Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất trên dầm.



Hình BT 6.8

6.9. Dầm AB chịu tải trọng phân bố đều cường độ 480N/m và hai lực tập trung P, Q, ứng suất pháp tại mép dưới của mặt cắt ngang là +14kN/cm² tại D và +10kN/cm² tại E (hình BT 6.9).

- Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn ;
- Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất trên dầm.

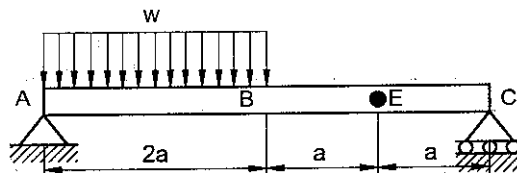


Hình BT 6.9

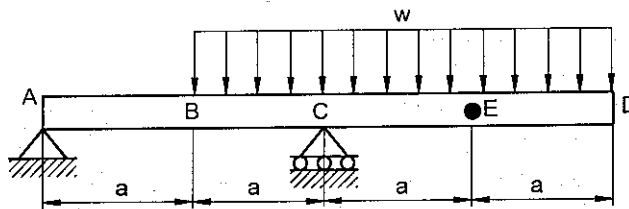
6.10 – 6.11. Hình BT 6.10 – 6.11.

a) Sử dụng hàm gián đoạn, viết phương trình của lực cắt và mômen uốn trên dầm chịu lực như hình vẽ ;

b) Xác định mômen uốn tại E, kiểm tra lại bằng phương pháp mặt cắt.



Hình BT 6.10

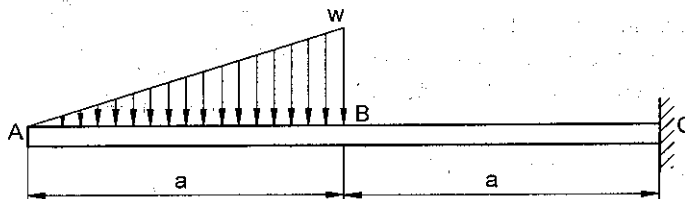


Hình BT 6.11

6.12. Hình BT 6.12.

a) Sử dụng hàm gián đoạn, viết phương trình của lực cắt và mômen uốn trên dầm chịu lực như hình vẽ

b) Xác định mômen uốn tại C, kiểm tra lại bằng phương pháp mặt cắt.



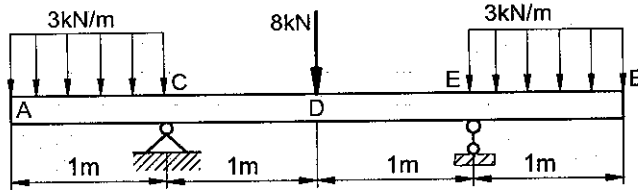
Hình BT 6.12

6.13. Hình BT 6.13.

a) Sử dụng hàm gián đoạn, viết phương trình của lực cắt và mômen uốn trên dầm chịu lực như hình vẽ.



b) Xác định mômen uốn lớn nhất trên dầm.

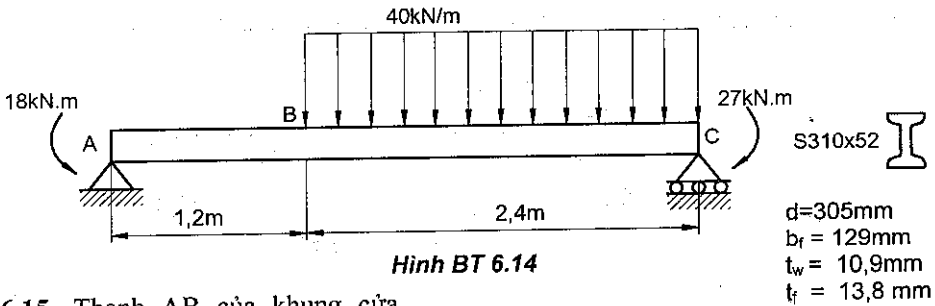


Hình BT 6.13

6.14. Hình BT 6.14.

a) Sử dụng hàm gián đoạn, tìm độ lớn và vị trí của mômen uốn lớn nhất trên dầm chịu tải trọng như hình vẽ.

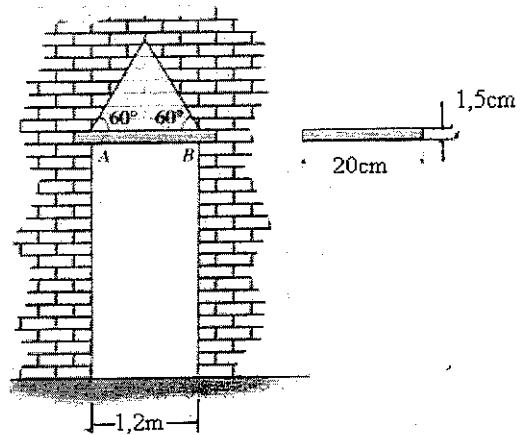
b) Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất của dầm.



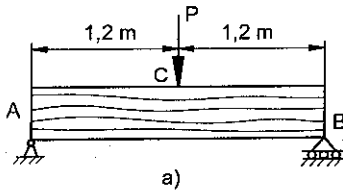
Hình BT 6.14

6.15. Thanh AB của khung cửa như hình BT 6.15 có mặt cắt ngang chữ nhật kích thước $1,5 \times 20$ cm. Tường gạch coi là chịu tải trọng phân bố theo quy luật hình tam giác. Biết rằng toàn bộ trọng lượng tác dụng lên dầm là 2500N và coi dầm đặt trên hai gối tựa, xác định giá trị và vị trí của ứng suất pháp và tiếp lớn nhất.

6.16 – 6.17. Dầm mặt cắt ngang chữ nhật 50×200 mm liên kết khớp ở hai đầu, chịu tải trọng như hình BT 6.16 – 6.17a. Người ta thay thế dầm bằng 4 thanh cùng vật liệu của dầm, kích thước mặt cắt 50×50 mm ghép lại như hình BT 6.16b – 6.17b. Xác định chiều dài l của hai thanh bên ngoài sao cho có hệ số an toàn giống như dầm đã cho.



Hình BT 6.15

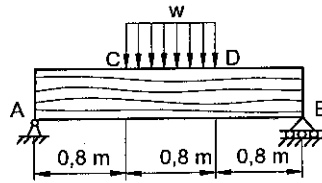


a)

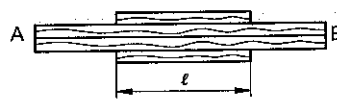


b)

Hình BT 6.16



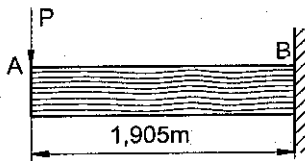
a)



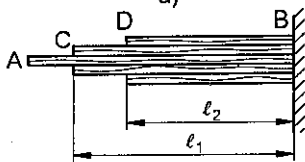
b)

Hình BT 6.17

6.18 – 6.19. Dầm công-xôn mặt cắt ngang chữ nhật $50,8 \times 254\text{mm}$, chịu tải trọng như hình vẽ BT 6.18a – 6.19a. Người ta thay thế dầm bằng 5 thanh cùng vật liệu của dầm, kích thước mặt cắt $50 \times 250\text{mm}$ ghép lại như hình BT 6.18b – 6.19b. Xác định chiều dài l_1 và l_2 của hai thanh bên trong và bên ngoài sao cho có hệ số an toàn giống như dầm đã cho.

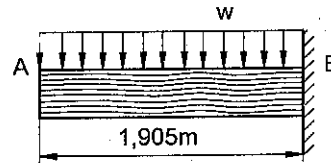


a)

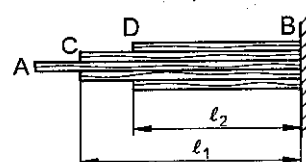


b)

Hình BT 6.18



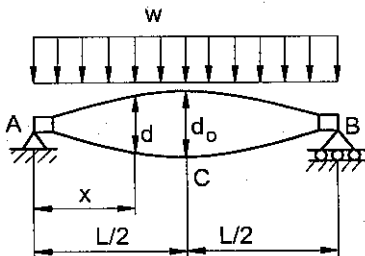
a)



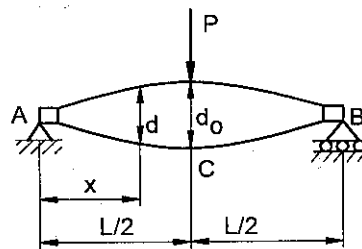
b)

Hình BT 6.19

6.20. Chi tiết máy được làm bằng hợp kim nhôm có đường kính d của mặt cắt ngang thay đổi, chịu lực như hình BT 6.20. Biết chi tiết được thiết kế có độ bền đều, hãy biểu diễn d theo x , L và d_0 .



a)



b)


THƯ VIỆN HUBT
 Hình BT 6.20
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

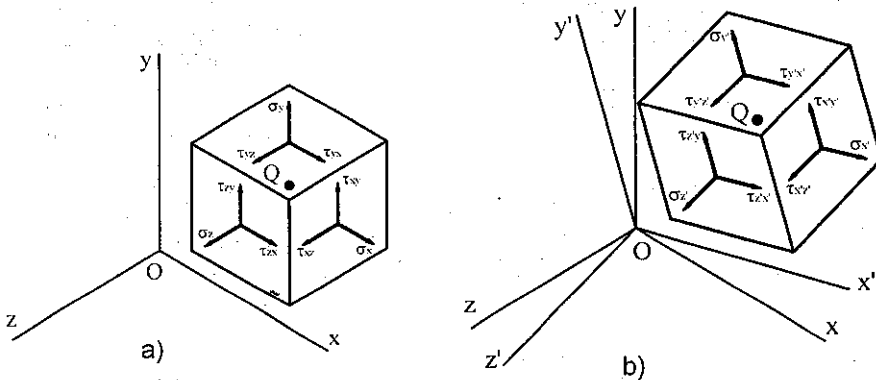
Chương 7

ỨNG SUẤT – BIẾN DẠNG TRONG TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

7.1. KHÁI NIỆM

Trong chương này ta xét đến ứng suất và biến dạng trên mặt nghiêng bất kỳ và xác định các *ứng suất chính* – tức là các *ứng suất pháp cực trị* tại điểm đang xét. Từ đó ta sẽ xác định trạng thái ứng suất và các thuyết bền tương ứng với vật liệu khác nhau để kiểm tra điều kiện bền.

Trên hình 7.1a, ta xét phân tố hình lập phương với các thành phần ứng suất trên các mặt song song với các trục tọa độ. Khi xoay hệ trục tọa độ đi một góc bất kỳ, phân tố đó có dạng như hình 7.1b. Ta sẽ xét sự biến đổi của ứng suất khi xoay trục tọa độ và khảo sát để tìm góc xoay nào sẽ cho *ứng suất lớn nhất* trên phân tố đó.



Hình 7.1

Trong thực tế có nhiều kết cấu chịu tác động của các dạng tải trọng khác nhau. Ví dụ như bảng tín hiệu giao thông trên đường cao tốc sẽ vừa chịu nén, vừa chịu uốn do trọng lượng bản thân và do tải trọng gió gây nên. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu ứng suất do *tải trọng phức tạp* tác dụng lên kết cấu hay chi tiết máy, trong đó kể đến ảnh hưởng cả ứng suất pháp và

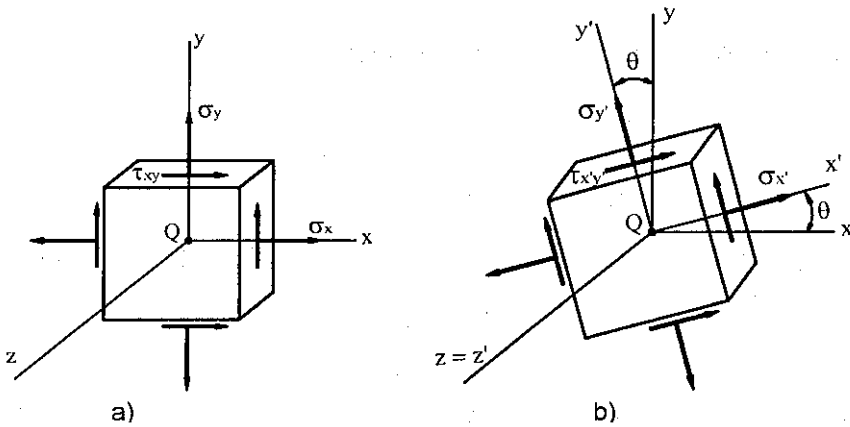
ứng suất tiếp. Từ đó bằng phương pháp cộng tác dụng sẽ tính được *ứng suất tương đương* và áp dụng các *thuyết bền phù hợp* với các loại vật liệu khác nhau để kiểm tra điều kiện bền.

7.2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

7.2.1. Công thức biến đổi ứng suất

Xét trạng thái ứng suất phẳng (hình 7.2a), có nghĩa là khi hai mặt phẳng đối diện của phân tố hình lập phương không chịu tác dụng của ngoại lực. Tại điểm Q bất kỳ, ta có: $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

Ta sẽ xác định các ứng suất $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ của phân tố khi xoay hệ trục tọa độ một góc θ quanh trục z (hình 7.2b).



Hình 7.2

Ta viết phương trình cân bằng tĩnh học tổng hình chiếu theo phương x' và y' :

$$\sum F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (7.1)$$

$$\sum F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (7.2)$$

Áp dụng tính chất hàm lượng giác:

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta; \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (7.3)$$

Công thức (7.1), (7.2) viết lại dưới dạng:



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7.4)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (7.5)$$

Thay θ bằng $\theta + 90^\circ$, ta thu được thành phần ứng suất pháp còn lại:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7.6)$$

Từ (7.4) và (7.6) ta có :

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (7.7)$$

Do trạng thái ứng suất phẳng nên: $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, ta có thể kết luận rằng *tổng các ứng suất pháp tác dụng lên phân tử là không đổi* với mọi phép biến đổi tọa độ.

7.2.2. Ứng suất chính, phương chính

Từ (7.4) và (7.6), ta rút ra::

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7.8)$$

Bình phương cả hai vế của (7.8) và (7.5), rồi cộng chúng lại với nhau,

$$\text{ta có : } \left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (7.9)$$

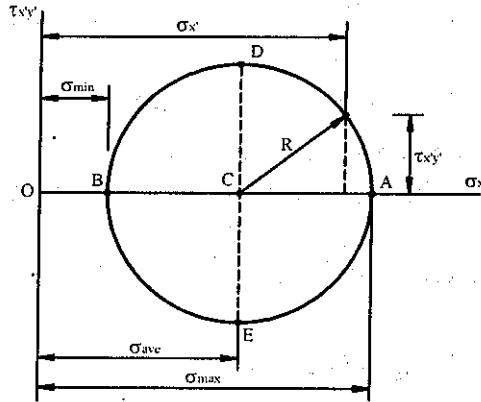
$$\text{Đặt } \sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ và } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7.10)$$

Ta viết (7.9) dưới dạng sau:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{tb})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (7.11)$$

Đó chính là phương trình của đường tròn tâm C (σ_{tb} ; 0) bán kính R (hình 7.3). Để xác định bán kính R, ta kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ σ_y và trên đó lấy điểm P có tung độ bằng τ_{xy} . Nối hai điểm P và C, độ dài của đoạn PC chính là bán kính R. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính R, tọa độ hai giao điểm của nó với trục x chính là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất pháp. Mặt khác, chúng có tung độ $\tau_{x'y'}$ bằng không. Vì vậy, giá trị của góc θ_p lập bởi PA, PB với trục x có thể thu được bằng cách cho $\tau_{x'y'} = 0$ trong phương trình (7.5) :

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7.12)$$



Hình 7.3

Mặt phẳng của phân tử chịu lực sao cho trên đó không có ứng suất tiếp gọi là *mặt chính*, ứng suất pháp trên mặt đó gọi là *ứng suất chính*, phương của nó gọi là *phương chính*. Thay thế giá trị của θ_p từ (7.12) vào (7.4) ta có các ứng suất chính: $\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + R$, $\sigma_{\min} = \sigma_{tb} - R$

$$\text{Hay: } \sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7.13)$$

Các giá trị ứng suất tiếp lớn nhất tương ứng với điểm D và E trên hình 7.3 xác định bởi: $\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (7.14)

Hoành độ của điểm D và E là: $\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, góc θ_s tương ứng với các điểm trên thu được bằng cách cho giá trị $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ trong (7.4). Chú ý rằng tổng của hai số hạng cuối trong (7.4) khi đó phải bằng 0, ta có khi $\theta = \theta_s$:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_s + \tau_{xy} \sin 2\theta_s = 0 \quad (7.15)$$

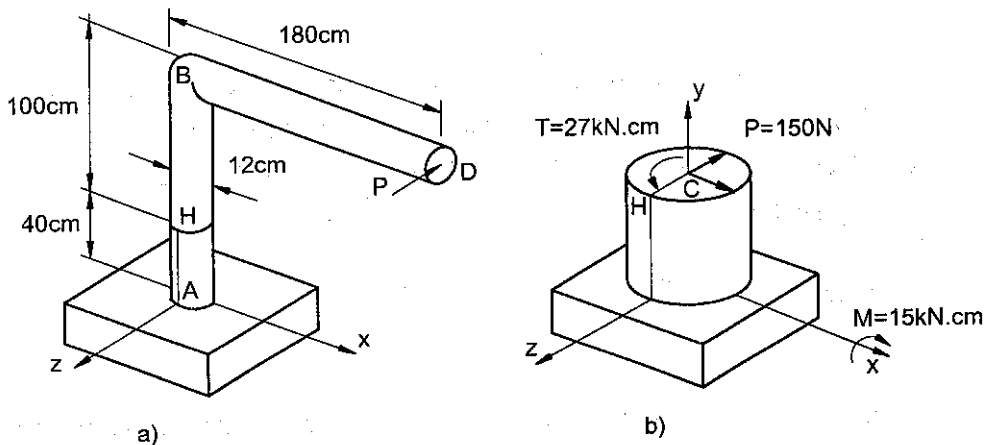
$$\text{Hay : } \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (7.16)$$

So sánh (7.12) và (7.16), ta thấy $\tan 2\theta_s$ có dấu ngược lại $\tan 2\theta_p$. Điều đó có nghĩa là hai góc θ_s và θ_p chênh nhau 45° , hay *mặt có ứng suất tiếp lớn nhất nghiêng một góc bằng 45° với mặt chính*.

Ví dụ 7.1: Thanh gấp khúc nằm ở đầu A, tại điểm D chịu lực $P=150\text{N}$ như hình 7.4a. Biết đường kính của mặt cắt ngang tại đoạn AB là 12cm, xác định:

a) Ứng suất pháp và tiếp trên phân tử tại điểm H có các mặt song song với trục x và y;

b) Mặt chính và ứng suất chính tại H.



Hình 7.4

Giải : Thay thế ngoại lực tác dụng tại D bằng hệ lực – mômen tại mặt cắt đi qua H (hình 7.4b):

$$P = 150\text{N}; T = (150\text{N}) \cdot (180\text{cm}) = 27\text{kN.cm}$$

$$M_x = (150\text{N}) \cdot (100\text{cm}) = 15\text{kN.cm}$$

a) Ứng suất pháp và tiếp tại điểm H : Áp dụng quy ước về dấu của mômen uốn và xoắn, ta xác định chiều và dấu của các ứng suất như sau:

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = \frac{M_x \cdot c}{I} = \frac{(15\text{kN.cm}) \cdot (6\text{cm})}{\frac{1}{4} \pi (6\text{cm})^4} = +88,4\text{kN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{(27\text{kN.cm}) \cdot (6\text{cm})}{\frac{1}{2} \pi (6\text{cm})^4} = +79,6\text{kN/cm}^2$$

Chú ý rằng lực cắt P không gây nên ứng suất tiếp tại H vì lực đó có phương theo trục z, trong khi ta cần tính ứng suất trong mặt phẳng xy.

b) Mặt chính và ứng suất chính : Thay các giá trị ứng suất ở trên vào (7.12), ta tìm được các phương chính:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (79,6 \text{ kN/cm}^2)}{(0 - 88,4) \text{ (kN/cm}^2)} = -1,80 ;$$

$$2\theta_p = -61,0^\circ \text{ và } 2\theta_p = 180^\circ - 61,0^\circ = +119^\circ ;$$

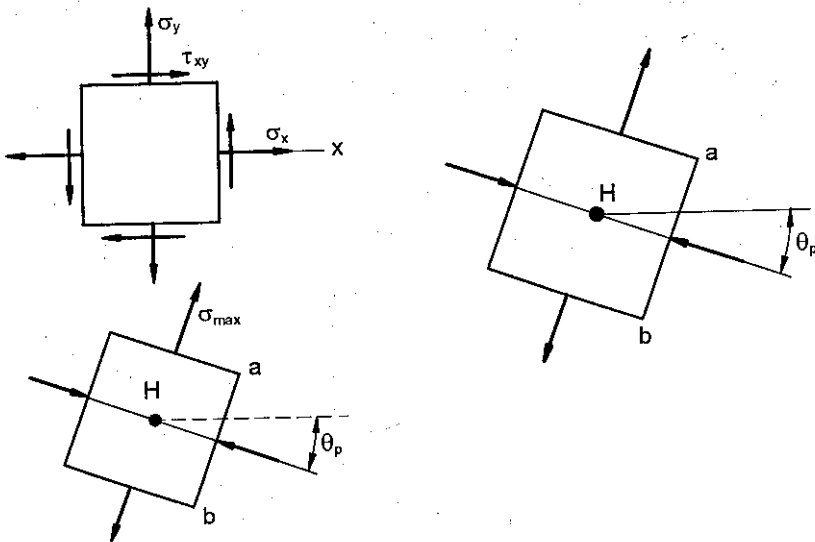
Hay: $\theta_p = -30,5^\circ$ và $\theta_p = +59,5^\circ$

Thế các giá trị của góc θ_p vào (7.13), ta có các ứng suất chính là:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 88,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 88,4}{2}\right)^2 + (79,6)^2} = +44,2 \pm 91,0 = \begin{bmatrix} 135,2 \text{ (kN/cm}^2) \\ -46,8 \text{ (kN/cm}^2) \end{bmatrix} ;$$

Vậy $\sigma_{\max} = +135,2 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\min} = -46,8 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 7.5

Xét mặt ab của phân tử trên hình 7.5, thay $\theta_p = -30,5^\circ$ vào (7.4) ta tìm được $\sigma_x = -46,8 \text{ kN/cm}^2$. Các ứng suất chính và phương chính của phân tử H biểu diễn như trên hình 7.5.

7.2.3. Vòng tròn Mohr's ứng suất

Vòng tròn tâm C ($\sigma_{tb}, 0$) bán kính R xác định bởi (7.10) được gọi là vòng tròn Mo ứng suất (Mohr 1835–1918) trong mặt phẳng. Ta có thể dùng vòng tròn Mo để xác định ứng suất chính, phương chính, cũng như ứng suất trên mặt nghiêng một góc θ với trục x.

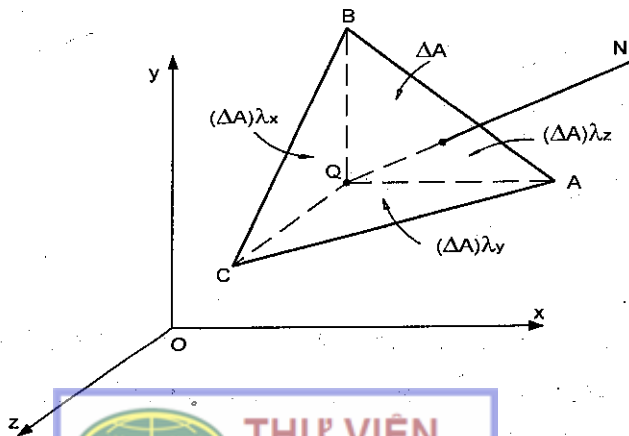
Khi xây dựng vòng tròn Mohr's, điều quan trọng cần chú ý là quy ước dấu của các thành phần ứng suất: *Ứng suất pháp có giá trị dương* khi có hướng từ mặt cắt ra ngoài (kéo) và *nằm bên phải trục τ* , còn ứng suất nén có *giá trị âm và nằm bên trái*. Ứng suất tiếp có xu hướng làm mặt của phân tố *quay theo chiều kim đồng hồ thì có dấu (+)* và trên vòng tròn Mohr sẽ tương ứng với điểm *nằm bên trên trục hoành σ* , nếu nó làm mặt của phân tố *quay ngược chiều kim đồng hồ thì có dấu (-)* và tương ứng với điểm ở trên vòng tròn Mohr *nằm bên dưới trục σ* .

7.3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI

Xét phân tố hình tứ diện có ba mặt song song với các mặt tọa độ, mặt thứ tư vuông góc với đường QN (hình 7.6). Ký hiệu ΔA là diện tích của mặt ABC, và $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ là các cosin chỉ phương của đường QN. Ta viết phương trình tổng hình chiếu các lực tác dụng lên phân tố đó theo phương QN:

$$\sum F_n = 0;$$

$$\sigma_n \Delta A - (\sigma_x \Delta A \lambda_x) \lambda_x - (\tau_{xy} \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{xz} \Delta A \lambda_z) \lambda_z - (\tau_{yx} \Delta A \lambda_y) \lambda_x - (\sigma_y \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{yz} \Delta A \lambda_z) \lambda_z - (\tau_{zx} \Delta A \lambda_z) \lambda_x - (\tau_{zy} \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\sigma_z \Delta A \lambda_z) \lambda_z = 0$$



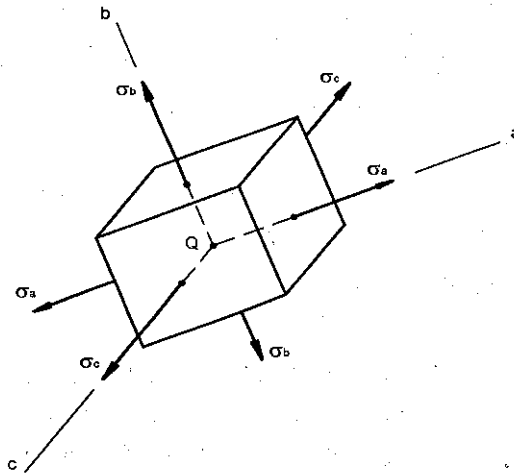
Chia hai vế cho ΔA và giải đối với σ_n , ta có :

$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (7.17)$$

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các số hạng bên phải của (7.17) chỉ chứa bình phương của các cosin chỉ phương, khi đó ký hiệu ứng suất pháp theo các phương của hệ trục tọa độ là $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ và cosin chỉ phương của QN là $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ ta có:

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2 \quad (7.18)$$

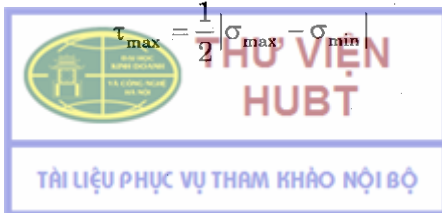
Các trục tọa độ sẽ trùng với các phương chính, còn các ứng suất pháp là các ứng suất chính tại điểm Q (hình 7.7).



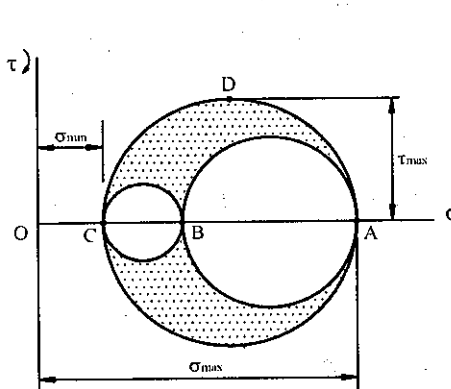
Hình 7.7

Bây giờ ta xoay phân tố trên hình 7.7 quanh một trong các phương chính, ví dụ trục c, sự thay đổi của ứng suất pháp có thể phân tích qua vòng tròn Mo như đối với biến đổi trong mặt phẳng. Vòng tròn đường kính AB (hình 7.8) áp dụng để xác định ứng suất pháp và tiếp trên các mặt của phân tố. Tương tự, các vòng tròn đường kính BC và AC có thể sử dụng để xác định ứng suất trên phân tố khi quay quanh trục a hoặc trục b tương ứng. Đối với phép biến đổi tọa độ bất kỳ, có thể chỉ ra rằng ứng suất của phân tố đang xét được biểu diễn bằng các điểm nằm trong *diện tích giới hạn bởi ba vòng tròn Mo* (hình 7.8). Ứng suất tiếp lớn nhất bằng bán kính của vòng tròn lớn nhất:

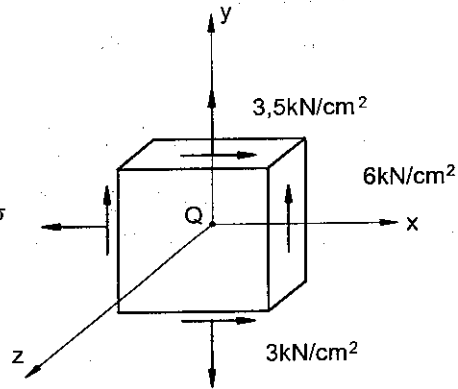
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| \quad (7.19)$$



Trong đó σ_{\max} và σ_{\min} là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất pháp tại điểm Q. Nếu hai điểm A và B ở về hai phía gốc tọa độ O, các ứng suất chính là ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất tại Q, còn ứng suất tiếp lớn nhất bằng giá trị ứng suất tiếp lớn nhất trong “trạng thái phẳng”.



Hình 7.8



Hình 7.9

Ví dụ 7.2: Cho phân tử chịu các thành phần ứng suất như hình 7.9, xác định:

- Ứng suất chính và phương chính
- Ứng suất tiếp lớn nhất.

Giải:

a) Ta vẽ vòng tròn Mo ứng suất trong mặt phẳng xy (hình 7.10a). Điểm X có tọa độ (6; 3), điểm Y có tọa độ (3,5; 3). Nối đường thẳng XY, ta xác định tọa độ của tâm C vòng tròn Mo đối với mặt phẳng xy là:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6 + 3,5}{2} = 4,75 \text{ kN/cm}^2$$

Do đoạn CF = 6 - 4,75 = 1,25 kN/cm², đoạn FX = 3 kN/cm², bán kính R của vòng tròn Mo bằng:

$$R = CX = \sqrt{(1,25)^2 + 3^2} = 3,25 \text{ kN/cm}^2$$

Các ứng suất chính đối với trạng thái ứng suất phẳng là:

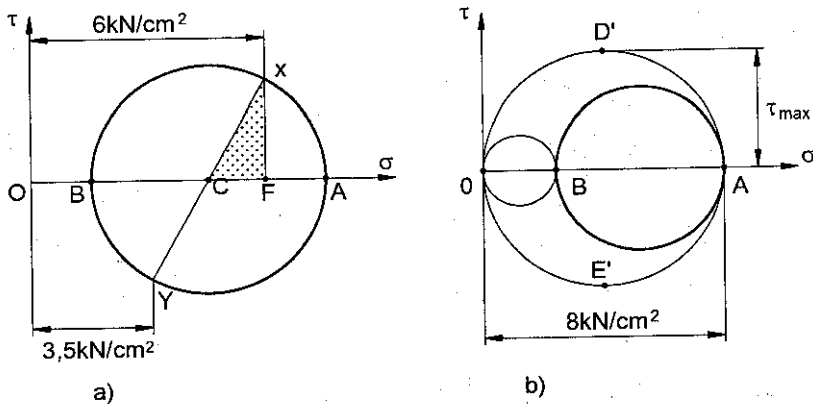
$$\sigma_a = OA = OC + CA = 4,75 + 3,25 = 8,00 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_b = OB = OC - BC = 4,75 - 3,25 = 1,50 \text{ kN/cm}^2$$

Góc θ_p khi phân tử xoay quanh trục z xác định bởi công thức:

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{1,25}; \quad 2\theta_p = 67,4^\circ; \quad \theta_p = 33,7^\circ$$





Hình 7.10

b) Ta vẽ các đường tròn đường kính OB và OA, tương ứng khi xoay phân tố quanh trục a và trục b (hình 7.10b). Chú ý rằng ứng suất tiếp lớn nhất bằng bán kính của vòng tròn đường kính OA, ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_a}{2} = \frac{8,00\text{kN/cm}^2}{2} = 4,00\text{kN/cm}^2$$

Mặt có ứng suất tiếp lớn nhất ở tại vị trí hai đầu mút D', E' của đường kính theo phương thẳng đứng của vòng tròn (hình 7.10b).

7.4. TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG

7.4.1. Biến dạng trong mặt phẳng

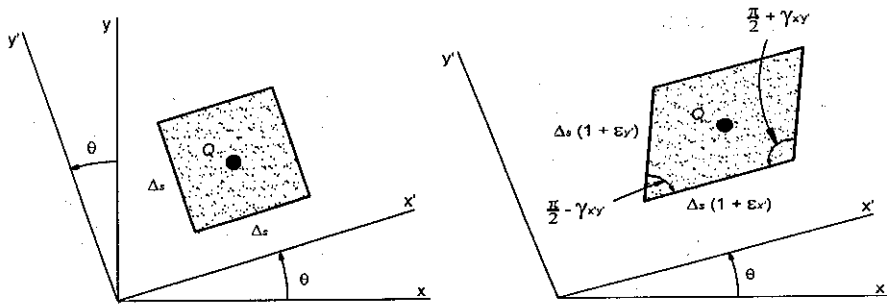
Tương tự như đối với trường hợp ứng suất trong mặt phẳng, ta có thể thu được biến dạng khi xoay phân tố tại điểm Q một góc θ (hình 7.11):

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (7.20)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (7.21)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (7.22)$$

Từ (7.20), (7.21), ta có: $\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$, có nghĩa là tổng biến dạng dài theo các phương vuông góc cũng là đại lượng không đổi khi biến đổi hệ trục tọa độ.



Hình 7.11

7.4.2. Vòng tròn Mohr's biến dạng

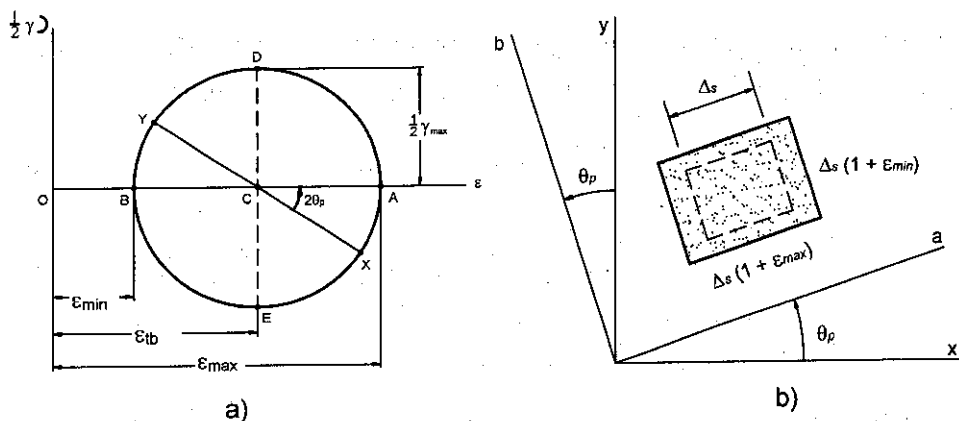
Hoàn toàn giống như trường hợp ứng suất phẳng, ta có thể vẽ vòng tròn có tâm: $C(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}; 0)$; Bán kính: $R = \sqrt{(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$ (hình 7.12).

Các biến dạng chính có giá trị :

$$\epsilon_{\max} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}; \quad \epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (7.23)$$

Phương chính biến dạng xác định bởi đặt :

$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_p = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (7.24)$$



Hình 7.12

Bằng cách áp dụng định luật Húc tổng quát, thay các thành phần biến dạng trong (7.24) bằng các thành phần ứng suất, ta thấy phương chính ứng

suất và phương chính biến dạng của vật liệu đồng nhất và đẳng hướng là trùng nhau.

7.4.3. Trạng thái biến dạng khối

Trạng thái biến dạng khối được xác định bằng cách sử dụng vòng tròn Mohr khi xoay phân tố quanh các trục chính (tương tự như đối với trạng thái ứng suất khối – hình 7.7). Biến dạng góc lớn nhất γ_{\max} bằng đường kính của vòng tròn lớn nhất trong ba vòng tròn biến dạng:

$$\gamma_{\max} = |\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}|$$

với ε_{\max} và ε_{\min} xác định bởi (7.23)

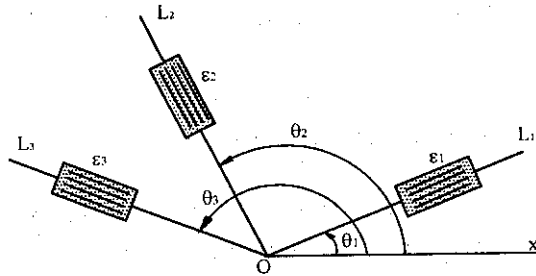
Áp dụng định luật Húc tổng quát, ta có thể thu được các ứng suất chính qua biến dạng chính trong trường hợp bài toán phẳng bằng cách cho $\sigma_c = 0$:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E}; \quad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E} - \frac{\nu\sigma_a}{E}; \quad \varepsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (7.25)$$

7.4.4. Đo biến dạng bằng cảm biến

Các biến dạng dài tỷ đối có thể được xác định trên mặt có phương bất kỳ của thành phần kết cấu bằng cách gắn hai thanh cảm biến theo phương của biến dạng và đo chiều dài của đoạn thanh cảm biến trước và sau khi chịu tải. Nếu L là chiều dài trước biến dạng của đoạn cảm biến, và δ là sự thay đổi chiều dài của nó, ta có biến dạng dài tỷ đối bằng: $\varepsilon = \delta / L$.

Một phương pháp tiện lợi hơn và chính xác hơn để đo biến dạng dài là sử dụng bộ cảm biến điện (hình 7.13). Đó là thiết bị gồm sợi dây dẫn điện mảnh được ghép giữa hai mẫu giấy. Khi vật liệu bị kéo dài, sợi dây kim loại sẽ dẫn ra, còn mặt cắt ngang sẽ co lại, gây nên điện trở của cảm biến bị tăng lên. Bằng cách đo cường độ dòng điện chạy qua cảm biến được cân bằng, biến dạng ε có thể xác định một cách chính xác và liên tục khi tải trọng tăng lên.



Hình 7.13

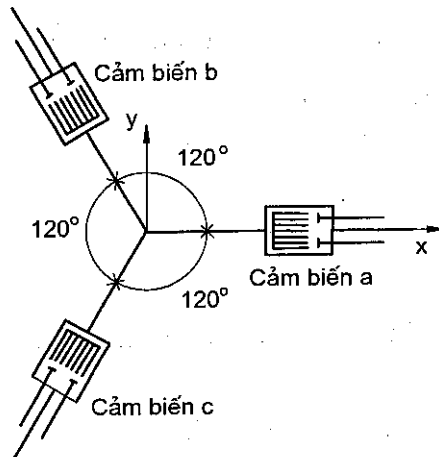
Mặt khác ta còn có thể xác định các thành phần biến dạng ε_x , ε_y , γ_{xy} tại điểm cho trước bằng cách đo biến dạng trên ba đường thẳng đi qua điểm đó (hình 7.13). Ký hiệu $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ là góc tương ứng giữa các đường thẳng đó và các trục tọa độ x, y, z ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ là các biến dạng đo được theo các phương, ta có:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_2 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_3 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3\end{aligned}\quad (7.26)$$

Ta có thể giải hệ phương trình trên để tìm $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Sự sắp xếp các cảm biến điện để đo biến dạng dài tỷ đối $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ được gọi là “*strain rosettes*”. Đo biến dạng theo 3 phương bất kỳ trên phân tử của vật liệu, ta có thể xác định biến dạng dài theo các phương x, y , biến dạng trên đường phân giác của góc giữa hai cảm biến được dùng để tính biến dạng góc γ_{xy} .

Ví dụ 7.3. Người ta gắn các cảm biến điện theo 3 phương làm thành góc 120° với nhau trên bộ phận máy như hình 7.14. Biết biến dạng đo được lần lượt là: $\varepsilon_a = -555$; $\varepsilon_b = 925$; $\varepsilon_c = 740$, hệ số Poát-xông là $\nu = 0,30$, xác định:

- Biến dạng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ tại điểm đó;
- Các biến dạng chính và biến dạng góc lớn nhất tại điểm đó.



Hình 7.14

Giải: Thay các giá trị của biến dạng và góc θ giữa các nhánh vào hệ (7.26), ta tìm được biến dạng $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$:

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ$$

$$\epsilon_b = \epsilon_x \cos^2 120^\circ + \epsilon_y \sin^2 120^\circ + \gamma_{xy} \sin 120^\circ \cos 120^\circ$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2 240^\circ + \epsilon_y \sin^2 240^\circ + \gamma_{xy} \sin 240^\circ \cos 240^\circ$$

Giải ra ta có: $\epsilon_x = -555$; $\epsilon_y = 1295$; $\gamma_{xy} = -213,6$.

Các biến dạng chính xác định bởi (7.23) và có giá trị:

$$\epsilon_{\max} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}; \quad \epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

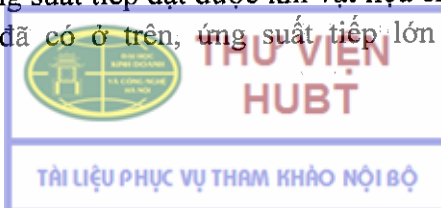
$$\epsilon_{\max} = 1301,14; \quad \epsilon_{\min} = -561,14$$

Biến dạng góc lớn nhất: $\gamma_{\max} = |\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}| = 1862,28$.

7.5. CÁC THUYẾT BỀN

7.5.1. Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất

Thuyết bền này dựa trên sự quan sát rằng giới hạn chảy của vật liệu dẻo là do sự trượt của vật liệu trên mặt nghiêng và chủ yếu do ứng suất tiếp gây nên. Theo thuyết bền trên, kết cấu sẽ đủ bền nếu như giá trị lớn nhất của ứng suất tiếp nhỏ hơn ứng suất tiếp đạt được khi vật liệu chịu thử kéo và đạt giới hạn chảy. Như ta đã có ở trên, ứng suất tiếp lớn nhất có giá trị bằng



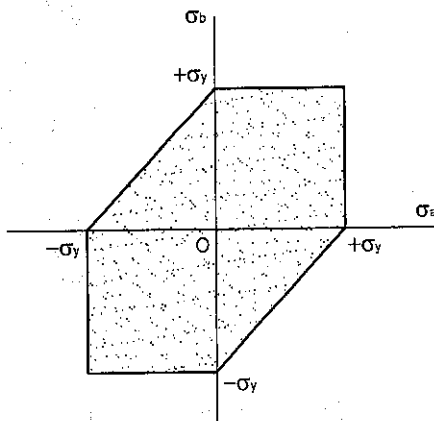
$\frac{1}{2}|\sigma_{\max}|$ nếu các ứng suất chính cùng dấu và bằng $\frac{1}{2}|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$ nếu ứng suất lớn nhất là dương, còn ứng suất nhỏ nhất là âm.

Công thức của thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất biểu diễn như sau:

$|\sigma_a| < \sigma_y, |\sigma_b| < \sigma_y$, nếu các ứng suất chính cùng dấu.

$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_y$, nếu các ứng suất chính ngược dấu. (7.27)

Trên hình 7.15 biểu diễn hình lục giác Treska (Treska H.E.1814 – 1885), với bất kỳ điểm có tọa độ (σ_a, σ_b) nằm trong hình lục giác đó, kết cấu sẽ đủ bền.



Hình 7.15

7.5.2. Thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng

Thuyết bền này dựa trên xác định thế năng biến dạng trong vật liệu hay năng lượng để biến đổi hình dạng của vật liệu. Thuyết bền mang tên Von – Mises (1883 – 1953), theo đó kết cấu sẽ đủ bền nếu giá trị lớn nhất của thế năng biến dạng trên một đơn vị thể tích luôn nhỏ hơn thế năng biến dạng trên một đơn vị thể tích cần để đạt được giới hạn chảy của mẫu chịu kéo :

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \quad (7.28)$$

Trong đó σ_a, σ_b là các ứng suất chính, G là môđun trượt của vật liệu. Trong trường hợp đặc biệt đối với mẫu đạt giới hạn chảy khi chịu kéo, ta có: $\sigma_a = \sigma_y$, và $\sigma_b = 0$, nên ta có:

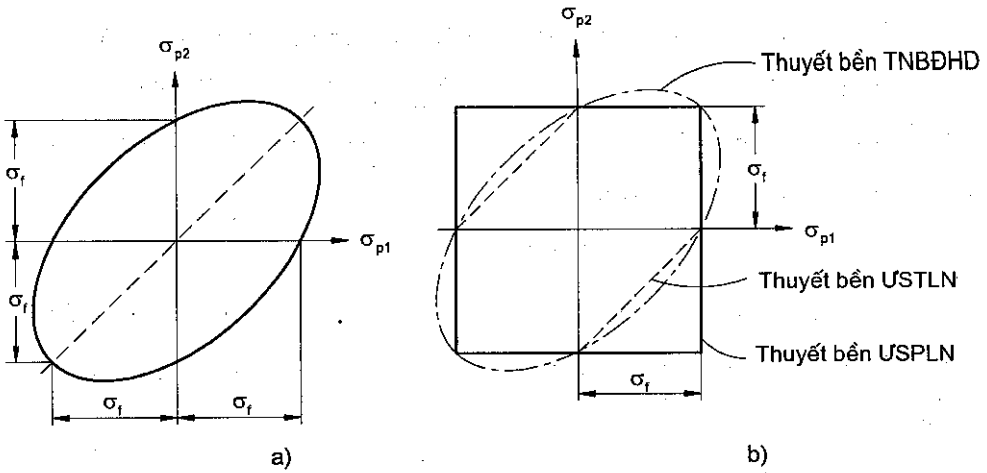
$$(u_d)_y = \frac{1}{6G}(\sigma_y^2)$$

Do đó, thuyết bền trên chỉ ra rằng kết cấu sẽ an toàn nếu :

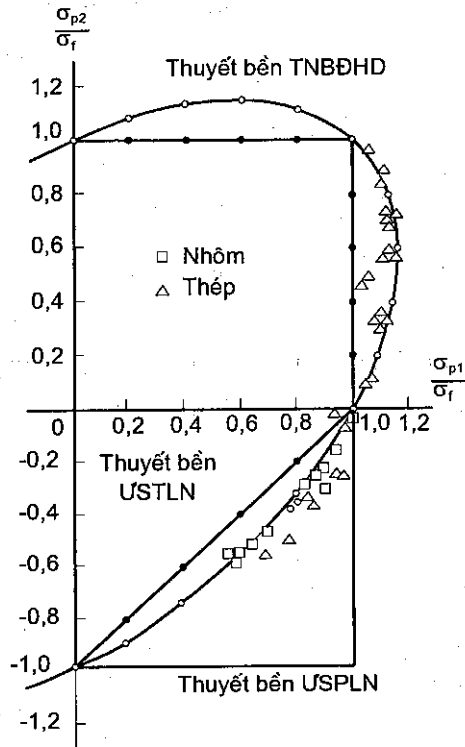
$$u_d < (u_d)_y, \text{ hay: } \sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2} < \sigma_y \quad (7.29)$$

Có nghĩa là mọi điểm có tọa độ (σ_a, σ_b) sẽ nằm trong miền phẳng giới hạn bởi elip như trong hình 7.16a.

Hình 7.16b so sánh giữa các thuyết bền “ứng suất pháp lớn nhất” “ứng suất tiếp lớn nhất” và “thế năng biến đổi hình dạng”.

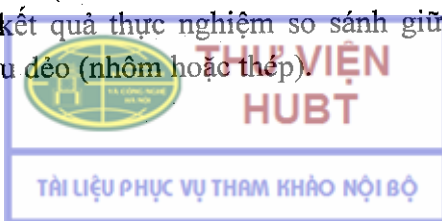


Hình 7.16



Hình 7.17

Hình 7.17 cho kết quả thực nghiệm so sánh giữa các thuyết bền của cùng một loại vật liệu dẻo (nhôm hoặc thép).



7.5.3. Thuyết bền đối với vật liệu giòn

a) Thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất (Coulomb's criterion 1736–1806)

Theo thuyết bền này kết cấu sẽ bị phá hủy khi ứng suất pháp lớn nhất đạt giá trị nguy hiểm σ_U đối với mẫu thử kéo của cùng loại vật liệu, ta có điều kiện bền của vật liệu khi:

$$|\sigma_a| < \sigma_U ; \quad |\sigma_b| < \sigma_U \quad (7.30)$$

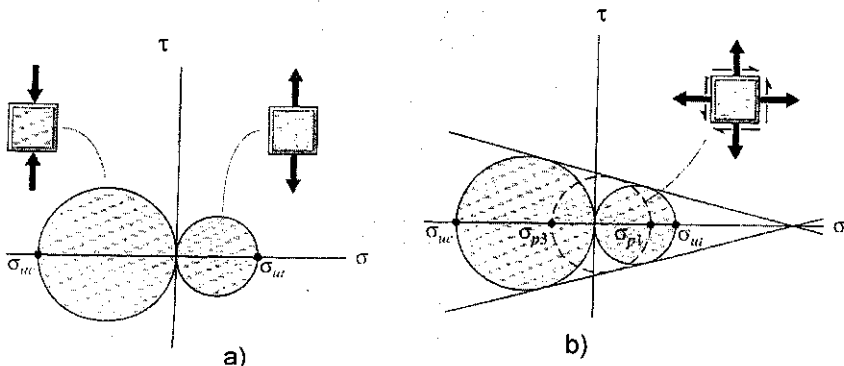
Trong đó: σ_a, σ_b là ứng suất lớn nhất khi kéo và khi nén. Nếu điểm có ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất σ_a, σ_b nằm trong hình vuông như trên hình 7.16b, kết cấu sẽ đủ bền.

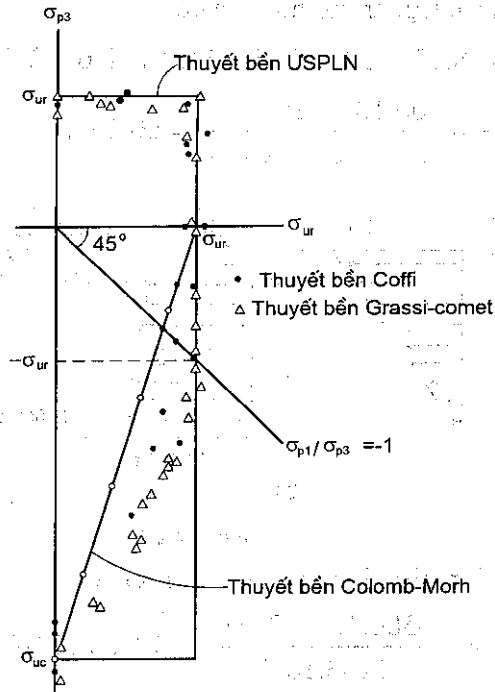
b) Thuyết bền Mohr's

Theo thuyết bền này, nếu vật liệu giòn có ứng suất pháp lớn nhất khi kéo mẫu nhỏ hơn ứng suất nguy hiểm khi kéo, thì đủ bền:

$$\sigma_a - \frac{\sigma_{UT}}{\sigma_{UC}} \sigma_b < \sigma_{UT} \quad (7.31)$$

Trong đó σ_{UT}, σ_{UC} là ứng suất phá hủy khi kéo và khi nén mẫu. Chú ý rằng trong công thức (7.31), ta so sánh về trái với ứng suất bền khi kéo vì nó nhỏ hơn ứng suất bền khi nén, để kết cấu được an toàn hơn. Hình 7.18 biểu diễn vòng tròn Mohr ứng suất khi vật liệu giòn chịu nén, hoặc kéo (hình 7.18a) theo một phương, hay chịu kéo đồng thời theo hai phương (hình 7.18b).





Hình 7.19

Trên hình 7.19 là kết quả thực nghiệm so sánh giữa các thuyết bền của cùng một vật liệu.

Ví dụ 7.4: Dầm công-xôn mặt cắt có số hiệu W610×145 (hình 7.20a, $I = 1243.10^6 \text{mm}^4$, $S = 4079.10^3 \text{mm}^3$) chịu tải trọng phân bố đều cường độ 160kN/m trên chiều dài $L = 2,5 \text{m}$.

- Xác định ứng suất pháp và tiếp lớn nhất trên dầm?
- Kiểm tra điều kiện bền của dầm trong trường hợp: dầm làm bằng vật liệu dẻo ($\sigma_Y = 30 \text{kN/cm}^2$), và vật liệu giòn ($\sigma_{UT} = 6 \text{kN/cm}^2$, $\sigma_{UC} = 18 \text{kN/cm}^2$), biết hệ số an toàn bằng 2.

Giải :

a) Lực cắt và mômen uốn lớn nhất đạt tại ngàm và có giá trị như sau:

$$M = -\frac{wL^2}{2} = -\frac{160 \cdot (2,5)^2}{2} = -500 \text{kN.m}$$

$$V = wL = 160(2,5) = 400 \text{kN}$$

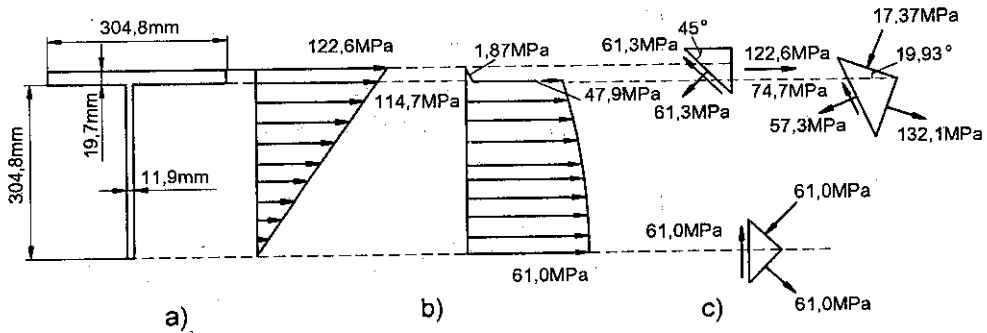
Trên hình 7.20b biểu diễn sự phân bố ứng suất pháp và tiếp tại nửa phía trên của mặt cắt ngang chữ I.



Tại điểm nằm trên trục trung hòa, ta có:

$$Q_{N.A} = 304,8 \cdot 19,7 \cdot 7.295 + 285,1 \cdot 11,9 \cdot 9.142,6 = 2,255 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 2,255 \cdot 10^{-3}}{1243 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0119} = 60,98 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 61 \text{ MPa}$$



Hình 7.20

Tại điểm tiếp giáp giữa lòng và đế chữ I, ta có:

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -\frac{-500 \cdot 10^3 \cdot 0,2851}{1243 \cdot 10^{-6}} = 114,68 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 114,7 \text{ MPa}$$

$$Q_{N.A} = 304,8 \cdot 19,7 \cdot 7.295 = 1,771 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 1,771 \cdot 10^{-3}}{1243 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0119} = 47,89 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 47,9 \text{ MPa}$$

Tại mép trên của mặt cắt ngang ứng suất tiếp bằng không, còn ứng suất pháp có giá trị lớn nhất bằng:

$$\sigma_{\max} = -\frac{My}{I} = -\frac{M}{S} = -\frac{-500 \cdot 10^3}{4079 \cdot 10^{-6}} = 122,58 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 122,6 \text{ MPa}$$

b) Ứng suất chính tại các điểm nguy hiểm trên mặt cắt ngang bằng:

- Trên trục trung hòa: $\sigma_{p_1}^{(N.A)} = -\sigma_{p_2}^{(N.A)} = 61,0 \text{ MPa}$; $\tau_{\max} = 61,0 \text{ MPa}$

Tại mép trên mặt cắt ngang: $\sigma_{p_1} = 122,6 \text{ MPa}$; $\sigma_{p_2} = 0$; $\tau_{\max} = 61,3 \text{ MPa}$

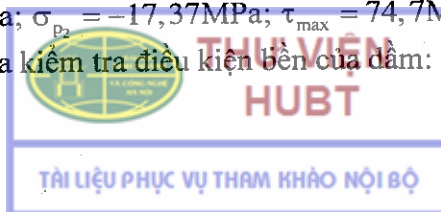
Tại điểm tiếp giáp giữa lòng và đế chữ I:

$$\sigma_{p_1, p_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{114,68 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{114,68 - 0}{2}\right)^2 + (-47,89)^2}$$

$$= 57,34 \pm 74,71$$

$$\sigma_{p_1} = 132,05 \text{ MPa}; \sigma_{p_2} = -17,37 \text{ MPa}; \tau_{\max} = 74,7 \text{ MPa}$$

Từ kết quả trên ta kiểm tra điều kiện bền của dầm:



– Nếu dầm làm bằng vật liệu dẻo:

$$\sigma_{p1} = 132,05\text{MPa} \leq \frac{\sigma_Y}{F.S} = \frac{300\text{MPa}}{2} = 150\text{MPa} \Rightarrow \text{ta thấy dầm đủ bền.}$$

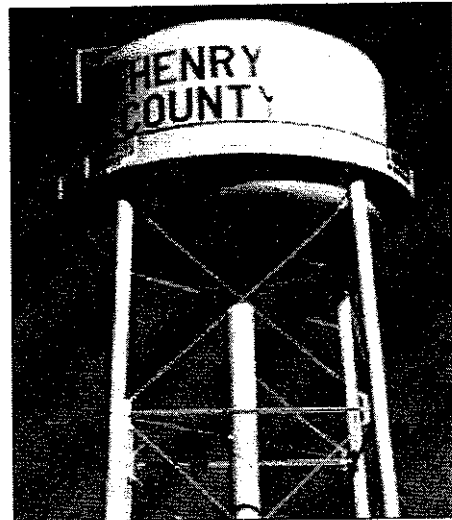
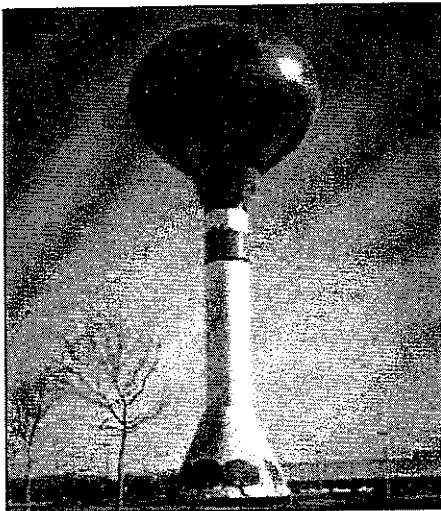
– Nếu dầm làm bằng vật liệu giòn, ta cần thỏa mãn hệ bất đẳng thức:

$$\begin{cases} 132,05\text{MPa} \leq \frac{\sigma_U^T}{F.S} = \frac{60\text{MPa}}{2} \\ 61\text{MPa} \leq \frac{\sigma_U^C}{F.S} = \frac{180\text{MPa}}{2} \end{cases}$$

Ta thấy không thỏa mãn đối với miền chịu kéo, vậy dầm không đảm bảo điều kiện bền.

7.6. ỨNG SUẤT TRONG VỎ MỎNG CHỊU ÁP SUẤT BÊN TRONG

Vỏ mỏng chịu áp suất bên trong có ứng dụng quan trọng trong xây dựng hay dân dụng (bồn chứa xăng, bể nước sinh hoạt hay đường ống dẫn dầu khí...). Trong phần này ta nghiên cứu ứng suất trong hai loại vỏ mỏng thường gặp trong thực tiễn : vỏ trụ và vỏ cầu (hình 7.21).

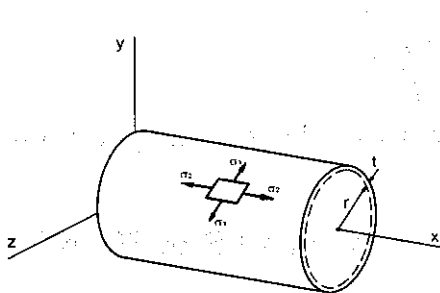


Hình 7.21. Bể chứa nước hình cầu và hình trụ

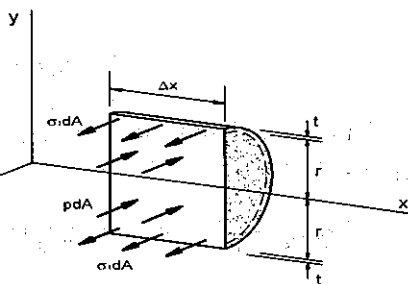
Xét vỏ trụ có bán kính trong r và bề dày của thành là t (hình 7.22) chịu áp suất của chất lỏng bên trong p . Ký hiệu ứng suất pháp theo kinh tuyến (đọc trực) là σ_2 , và ứng suất vĩ tuyến (theo phương vòng) là σ_1 , ta tách ra

một phần vỏ giới hạn bởi mặt phẳng xy và hai mặt phẳng song song với mặt yz , cách nhau khoảng cách bằng Δx (hình 7.23), ta có phương trình cân bằng tĩnh học: $\sum F_z = 0; \sigma_1(2t\Delta x) - p(2r\Delta x) = 0$

$$\text{Suy ra: } \sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad (7.32)$$



Hình 7.22



Hình 7.23

Bây giờ ta cắt vỏ bằng mặt cắt vuông góc với trục x và xét sự cân bằng của phần bên trái mặt cắt (hình 7.24):

$$\sum F_x = 0; \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0;$$

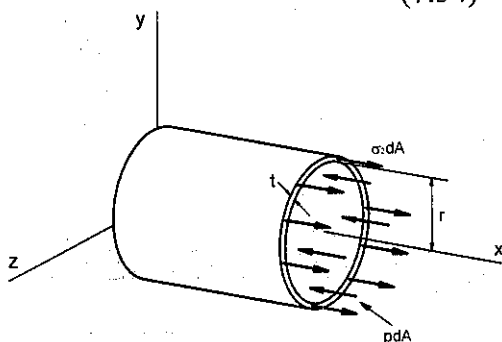
$$\text{Ta thu được: } \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (7.33)$$

Ta thấy: $\sigma_1 = 2 \sigma_2$, từ vòng tròn Mo ứng suất (hình 7.25) ta có thể thu được ứng suất tiếp lớn nhất của vỏ bằng:

$$\tau_{\max} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (7.34)$$

Đối với vỏ mỏng hình cầu có bán kính trong là r và bề dày của thành là t , chịu áp suất chất lỏng p , ta thấy do tính chất đối xứng, ứng suất trên các mặt của phần tử vỏ theo phương kinh tuyến và vĩ tuyến là bằng nhau:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (7.35)$$

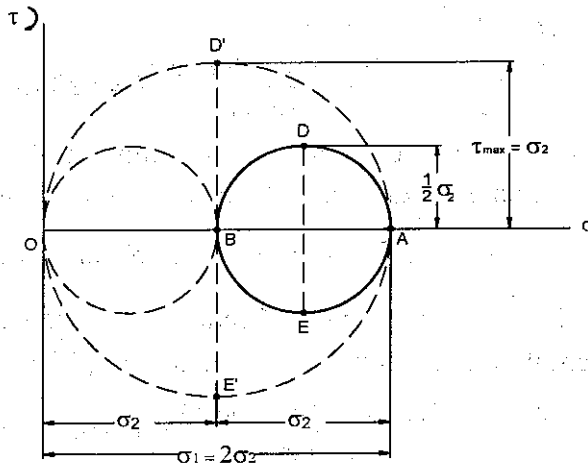


Hình 7.24

Khi đó, ứng suất tiếp lớn nhất của vỏ cầu có giá trị:



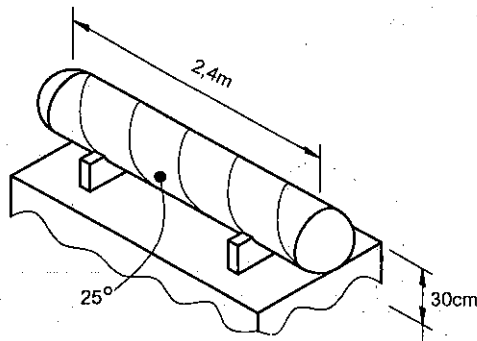
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t} \quad (7.36)$$



Hình 7.25. Ứng suất chính trong vỏ mỏng hình trụ

Ví dụ 7.5. Vỏ chứa khí nén được đặt trên hai giá đỡ như hình 7.26, các giá đỡ được thiết kế sao cho không có lực tác dụng lên thành vỏ. Đường kính ngoài của vỏ là 30cm được chế tạo từ tấm thép có chiều dày 3/8 cm và được hàn theo đường xoắn ốc tạo thành 25° với mặt cắt ngang. Hai nắp có hình bán cầu bề dày 5/16cm. Biết áp suất khí nén là 18N/cm^2 , xác định:

- Ứng suất pháp và ứng suất tiếp lớn nhất trên nắp bán cầu?
- Ứng suất theo phương vuông góc và phương song song với đường hàn xoắn ốc?



Hình 7.26

Giải:

a) Nắp bán cầu có: $t = 5/16\text{cm} = 0,3125\text{cm}$; $r = 150 - 0,3125 = 146,88\text{cm}$
 Áp dụng công thức (7.35), ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(18\text{N/cm}^2)(146,88\text{cm})}{2(0,3125\text{cm})} = 4230\text{N/cm}^2$$

Chú ý rằng trên bề mặt của nắp ứng suất chính thứ ba bằng không, ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt nghiêng một góc 45° với nắp bằng:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}(4230\text{N/cm}^2) = 2115\text{N/cm}^2$$

c) Thân vỏ hình trụ: $t = 3/8\text{cm} = 0,375\text{cm}$; $r = 150 - 0,375 = 146,25\text{cm}$
 Ứng suất chính trên thành vỏ được xác định từ (7.32, 7.33)

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(18\text{N/cm}^2)(146,25\text{cm})}{(0,375\text{cm})} = 7020\text{N/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 = 3510\text{N/cm}^2; \quad \sigma_{\text{ave}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 5265\text{N/cm}^2;$$

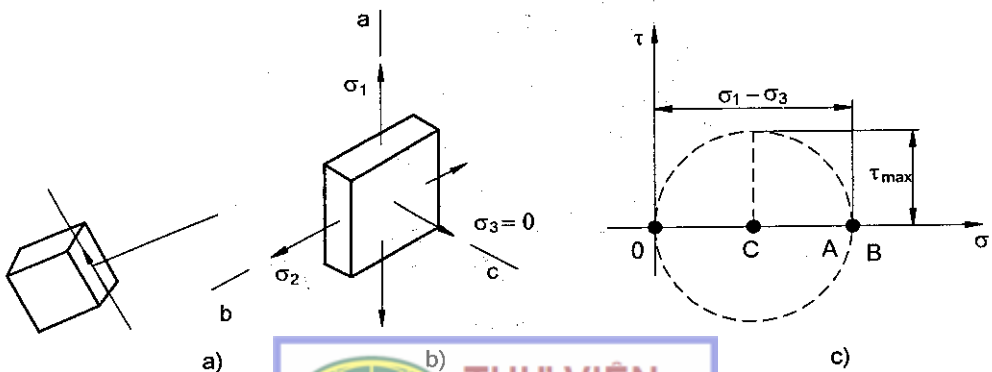
Bán kính vòng tròn Mohr ứng suất là: $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 1755\text{N/cm}^2;$

Phân tử có mặt song song với đường hàn thu được bằng cách quay mặt vuông góc với trục vỏ ngược chiều kim đồng hồ một góc $2\theta = 50^\circ$, ta có ứng suất pháp tại mỗi hàn:

$$\sigma_{\text{hàn}} = \sigma_{\text{tb}} - R \cdot \cos 50^\circ = 5265 - 1755 \cdot \cos 50^\circ = 4140\text{N/cm}^2$$

$$\tau_{\text{hàn}} = R \cdot \sin 50^\circ = 1755 \cdot \sin 50^\circ = 1344\text{N/cm}^2$$

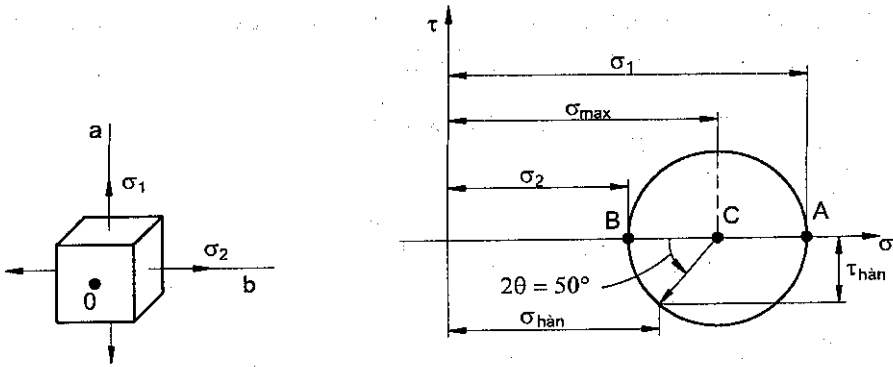
Từ các kết quả trên, ta có thể kiểm tra điều kiện bền của vỏ theo thuyết bền Tresca hay Von Mises.



THƯ VIỆN
HUBT

Hình 7.27

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



Hình 7.28

Trạng thái ứng suất của nắp, thân và mối hàn vỏ được biểu diễn trên hình 7.27 – 7.28.

Ví dụ 7.6. Một thùng hình trụ chứa khí nén có bán kính trong bằng 24cm, bề dày thành bình 3/4 cm. Biến dạng đo được trên cảm biến gắn theo phương vuông góc và song song với trục vỏ là $\epsilon_1 = 255 \cdot 10^{-6}$ và $\epsilon_2 = 60 \cdot 10^{-6}$ tương ứng. Biết rằng thí nghiệm về xoắn cho thấy mô đun trượt của vật liệu vỏ bằng $G = 11,2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$, xác định :

- Áp suất khí bên trong vỏ;
- Ứng suất chính và ứng suất tiếp lớn nhất trên thành vỏ.

Giải : a) Ta nhận thấy các biến dạng đo được là các biến dạng chính của vỏ. Đặt các giá trị biến dạng đó tương ứng với điểm A và B trên trục hoành (hình 7.29) ta vẽ được vòng tròn Mo biến dạng của vỏ, biến dạng góc lớn nhất bằng đường kính của vòng tròn :

$$\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \cdot 10^{-6} - 60 \cdot 10^{-6} = 195 \cdot 10^{-6} \text{ (rad.)}$$

Từ định luật Húc, ta rút ra ứng suất tiếp lớn nhất trên thành vỏ:

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max} = 2184 \text{ N/cm}^2 = 2,184 \text{ kN/cm}^2$$

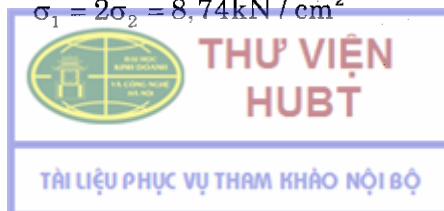
Thay thế các giá trị trên vào công thức (7.34), ta thu được:

$$\tau_{\max} = \frac{pr}{2t} = 2184 \text{ N/cm}^2; p = 1365 \text{ N/cm}^2$$

b) Đối với vỏ hình trụ, ta có các ứng suất chính $\sigma_1 = 2\sigma_2$, ta vẽ vòng tròn Mo ứng suất (hình 7.30) :

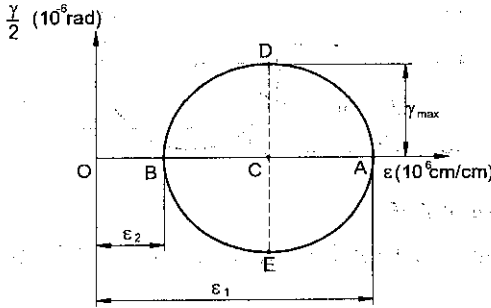
$$\sigma_2 = 2\tau_{\max} = 2(2,184 \text{ kN/cm}^2) = 4,368 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 8,74 \text{ kN/cm}^2$$

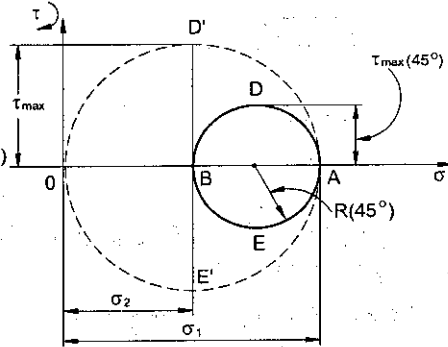


Ứng suất tiếp lớn nhất bằng bán kính của vòng tròn đường kính AB ứng với góc bằng 45° so với trục hoành (hình 7.30) :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \sigma_2 = 4,37 \text{ kN / cm}^2$$



Hình 7.29



Hình 7.30

7.7. ỨNG SUẤT TRONG THANH CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Trong chương 6 ta đã xét đến dầm chịu uốn ngang phẳng, khi đó trên mặt cắt ngang sẽ có ứng suất pháp σ_x và ứng suất tiếp τ_{xy} xác định từ công thức:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \quad (7.37)$$

Trong đó : V và M là lực cắt và mômen uốn tương ứng; I là mômen quán tính trung tâm của mặt cắt ngang; y là khoảng cách từ điểm đang xét đến trục trung hòa; Q là mômen tĩnh của phần mặt cắt bên trên lát cắt đi qua điểm đang xét; và t là chiều rộng của mặt cắt tại điểm đó.

Từ (7.37) ta có ứng suất pháp lớn nhất đạt được tại mép ngoài cùng của mặt cắt ngang, còn ứng suất tiếp lớn nhất đạt được trên trục trung hòa:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} ; \quad \tau_m = \frac{VQ}{It} \quad (7.38)$$

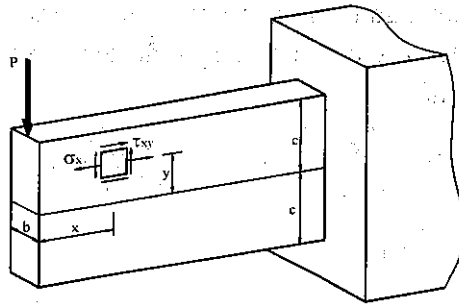
Từ đó ta có thể xác định các ứng suất chính rồi áp dụng thuyết bền tương ứng với vật liệu của dầm để kiểm tra điều kiện bền.

Xét dầm công-xôn có mặt cắt ngang chữ nhật, chịu lực tập trung p tại đầu tự do (hình 7.31), ta có :

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{bh^3} = 3 \frac{Pxy}{Ac^2} \quad (7.39)$$



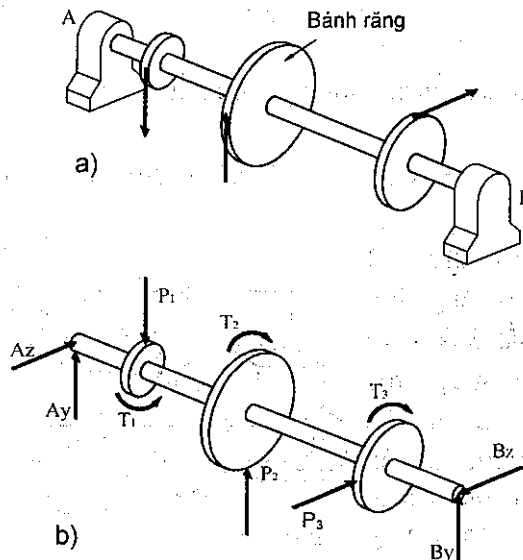
$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (7.40)$$



Hình 7.31

Trong đó : A là diện tích mặt cắt ngang; c là khoảng cách lớn nhất đến trục trung hòa. Sử dụng công thức biến đổi ứng suất trong mặt phẳng (7.13) ta có thể xác định các ứng suất chính σ_{max} và σ_{min} tại mặt cắt nguy hiểm (đầu ngàm), từ đó kiểm tra điều kiện bền của dầm và xác định kích thước hợp lý của mặt cắt ngang.

7.8. TRỤC CHỊU UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI



Hình 7.32

Khi công suất truyền chuyển động từ mô tơ đến trục bằng các bánh răng hay đĩa xích (hình 7.32), trục sẽ chịu uốn ngang phẳng đồng thời với xoắn .



Ứng suất tiếp do lực cắt gây nên thường nhỏ hơn rất nhiều so với ứng suất tiếp do mômen xoắn gây nên, do đó ta có thể bỏ qua khi tính trục. Nhắc lại rằng đối với mặt cắt ngang tròn, mômen quán tính độc cực J gấp hai lần mômen quán tính, ta có giá trị của ứng suất tiếp lớn nhất bằng bán kính của vòng tròn M_0 ứng suất:

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} \quad (7.41)$$

$$\text{Hay: } \tau_{\max} = \frac{c}{J} \sqrt{M^2 + T^2} \quad (7.42)$$

Trong đó: M là mômen tổng của hai mômen uốn M_y và M_z , T là mômen xoắn tác dụng lên trục. Ký hiệu τ_{all} là ứng suất tiếp lớn nhất, ta viết tỷ số nhỏ nhất cho phép J/c của mặt cắt ngang (gọi là mômen chống xoắn):

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\max}}{\tau_{\text{all}}} \quad (7.43)$$

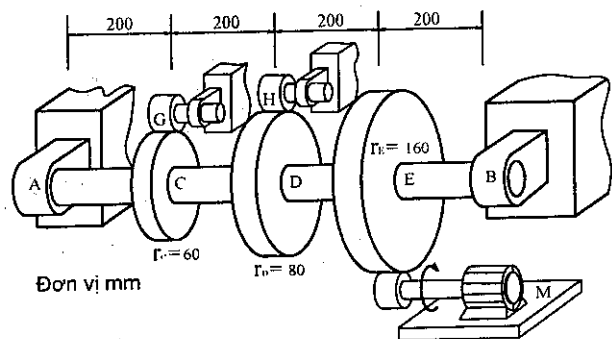
Từ số của vế phải là giá trị lớn nhất của *mômen tương đương*, ta viết lại (7.43) dưới dạng:

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2})_{\max}}{\tau_{\text{all}}} \quad (7.44)$$

Độ lớn của mômen tương đương lớn nhất có thể xác định từ biểu đồ nội lực của trục.

Các công thức (7.43) và (7.44) có thể sử dụng đối với cả mặt cắt ngang đặc và rỗng.

Ví dụ 7.7. Trục đặc AB quay với vận tốc 480 vòng/phút và truyền công suất 30kW từ môtor M đến máy công cụ được nối với bánh răng G và H; trong đó 20kW được truyền cho bánh răng G và 10kW cho bánh H (hình 7.33a). Biết $\tau_{\text{all}} = 50\text{MPa}$, xác định đường kính nhỏ nhất cho phép của trục AB?



Hình 7.33a

Giải : Mômen xoắn tác động lên các bánh răng:

Từ vận tốc quay của trục $n = 480$ vòng/phút, ta có tần số :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n\pi / 30}{2\pi} = \frac{480}{2 \cdot 30} = 8\text{Hz}$$

Mômen xoắn tác dụng lên bánh răng E là:

$$T_E = \frac{30\text{kW}}{2\pi(8\text{Hz})} = 597\text{Nm}$$

Lực tiếp tuyến tác dụng lên bánh răng E là:

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597\text{Nm}}{0,16\text{m}} = 3,73\text{kN}$$

Tương tự với bánh răng C và D ta có:

$$T_C = \frac{20\text{kW}}{2\pi(8\text{Hz})} = 398\text{Nm}; F_C = 6,63\text{kN}$$

$$T_D = \frac{10\text{kW}}{2\pi(8\text{Hz})} = 199\text{Nm}; F_D = 2,49\text{kN}$$

Thay thế các lực tác dụng lên bánh răng bằng hệ lực – ngẫu lực tương đương (hình 7.33 b,c).

Biểu đồ mômen uốn và xoắn:

Từ biểu đồ mômen uốn (hình 7.33e, g) ta thấy tại bánh răng E, mômen uốn M_z đạt giá trị lớn nhất, trong khi M_y lớn nhất đạt tại C. Từ biểu đồ mômen xoắn (hình 7.33h, k), ta thấy giá trị T lớn nhất đạt được ở phần trục giữa bánh răng D và E.

Mặt cắt nguy hiểm nhất: Từ mômen tương đương tính tại các mặt cắt C, E và D, ta tìm được giá trị lớn nhất đạt được tại bên phải điểm D:

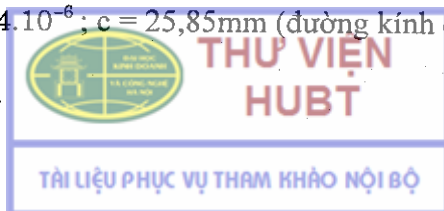
$$\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T_{\max}^2} = \sqrt{(1160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1357\text{Nm}$$

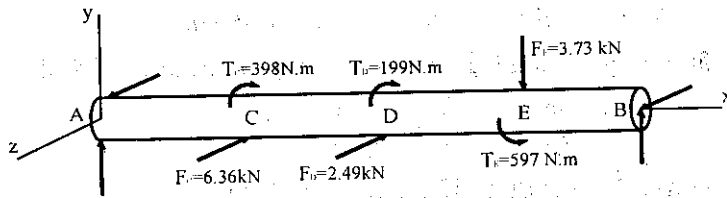
Đường kính cho phép của trục: Với $\tau_{\text{all}} = 50\text{MPa}$, áp dụng (7.44), ta có:

$$\frac{J}{c} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T_{\max}^2}}{\tau_{\text{all}}} = \frac{1357\text{Nm}}{50\text{MPa}} = 27,14 \cdot 10^{-6} \text{m}^3$$

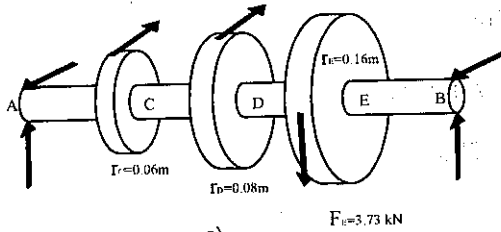
Do đó, giá trị nhỏ nhất cho phép của bán kính c xác định bởi:

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^3 = 27,14 \cdot 10^{-6}; c = 25,85\text{mm} \text{ (đường kính } d = 2c = 51,7\text{mm)}$$

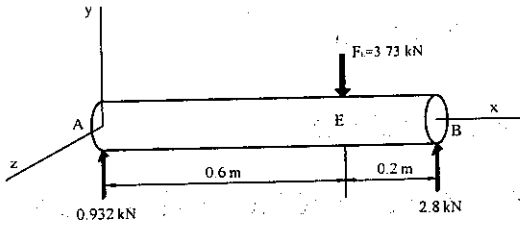




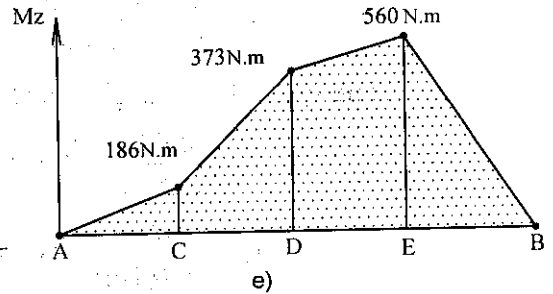
b)



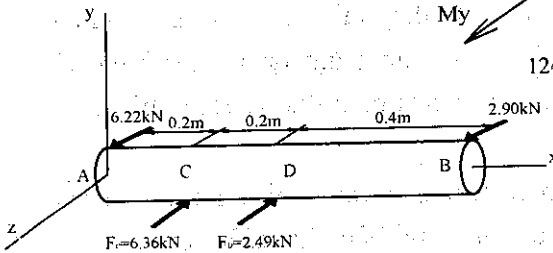
c)



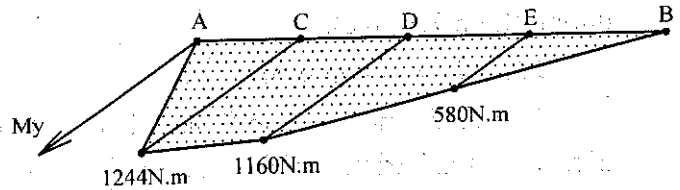
d)



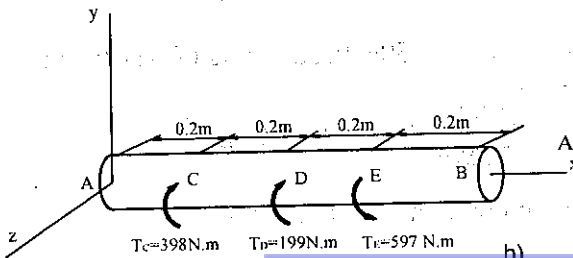
e)



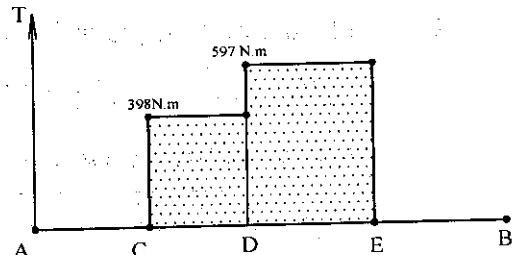
f)



g)



h)



k)

Hình 7.33

THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

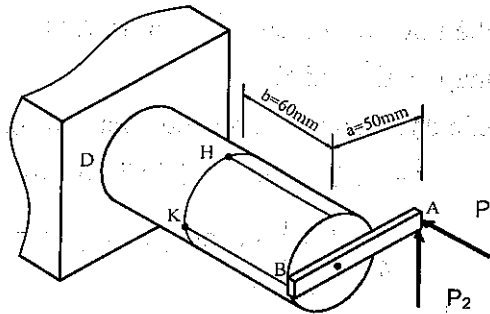
b) Giải phóng liên kết; c) sơ đồ hệ lực tác dụng lên trục; d), e): Biểu đồ mômen uốn M_x ; f), g): Biểu đồ mômen uốn M_y ; h), k) Biểu đồ mômen xoắn T .

7.9. ỨNG SUẤT TRONG TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

Trong chương 5 và 6 ta đã xác định ứng suất khi chịu tác dụng của lực vuông góc với trục thanh. Mặt khác, mômen xoắn T gây nên ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang. Các ứng suất chính tìm được theo công thức trong mục 7.8. Các kết quả thu được có hiệu lực khi nguyên lý cộng tác dụng và nguyên lý Saint– Venant’s được áp dụng. Điều đó có nghĩa là ứng suất gây nên trong hệ không được vượt quá giới hạn tỷ lệ của vật liệu, và biến dạng do một yếu tố ngoại lực nào đó không ảnh hưởng đến ứng suất do các yếu tố ngoại lực khác gây nên; đồng thời mặt cắt ngang khi tính ứng suất không ở gần điểm tác dụng của lực.

Ví dụ 7.8. Hai lực $P_1 = 15\text{kN}$ và $P_2 = 18\text{kN}$ tác dụng lên trục như hình 7.34a. Thanh tuyệt đối cứng AB được hàn với trục BD có bán kính $c = 20\text{mm}$. Biết khoảng cách từ điểm A đến trọng tâm trục BD là $a = 50\text{mm}$, coi ứng suất chưa đạt đến giới hạn tỷ lệ của vật liệu. Xác định :

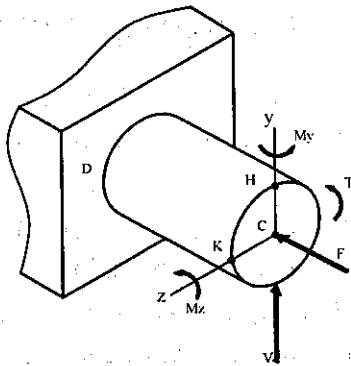
- Ứng suất pháp và tiếp tại điểm K của trục BD với khoảng cách $b = 60\text{mm}$ đến điểm B ;
- Phương chính và ứng suất chính tại điểm K ;
- Ứng suất tiếp lớn nhất tại K .



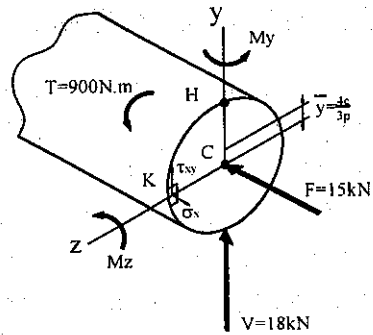
Hình 7.34a

Giải : Nội lực trên mặt cắt tại K :

Ta thay thế các lực P_1 và P_2 bằng hệ lực, mômen tương đương tại trọng tâm C của mặt cắt ngang chứa điểm K (hình 7.34b). Hệ lực đó bao gồm các thành phần sau:



Hình 7.34b



Hình 7.34c

– Lực đúng tâm F cân bằng với P_1 :

$$F = P_1 = 15\text{kN}$$

– Lực cắt V cân bằng với P_2 : $V = P_2 = 18\text{kN}$

– Mômen xoắn T bằng mômen do P_2 gây nên đối với trục của BD:

$$T = P_2 \cdot a = (18\text{kN})(50\text{mm}) = 900\text{Nm}$$

– Mômen uốn M_y bằng mômen do P_1 gây nên đối với trục thẳng đứng đi qua C: $M_y = P_1 \cdot a = (15\text{kN})(50\text{mm}) = 750\text{Nm}$

– Mômen uốn M_z bằng mômen do P_2 gây nên đối với trục nằm ngang đi qua C: $M_z = P_2 \cdot b = (18\text{kN})(60\text{mm}) = 1080\text{Nm}$

Các kết quả phân tích trên biểu diễn ở hình 7.34c:

a) Ứng suất pháp và tiếp tại K

Ta xác định các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang trục:

$$A = \pi c^2 = \pi(0,020\text{m})^2 = 1,257 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2;$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi(0,020\text{m})^4 = 125,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_c = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi(0,020\text{m})^4 = 251,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

Mômen tĩnh Q và chiều rộng t của lát cắt trên trục z xác định bởi công thức:

$$Q = \left(\frac{1}{2} \pi c^2\right) \left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3} c^3 = \frac{2}{3} (0,020\text{m})^3 = 5,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

và: $t = 2c = 0,040\text{mm}$

Ứng suất pháp lớn nhất xác định từ:



$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11,9\text{MPa} + \frac{(750\text{Nm})(0,020\text{m})}{125,7 \cdot 10^{-9}\text{m}^4}$$

$$= -11,9\text{MPa} + 119,3\text{MPa} = 107,4\text{MPa}$$

Ứng suất tiếp do lực cắt V và mômen xoắn T xác định từ:

$$(\tau_{xy})_V = \frac{VQ}{I_z t} = \frac{(18 \cdot 10^3 \text{N})(5,33 \cdot 10^{-6} \text{m}^3)}{(125,7 \cdot 10^{-9} \text{m}^4)(0,040\text{m})} = 19,1\text{MPa}$$

$$(\tau_{xy})_T = -\frac{Tc}{J_c} = \frac{(900\text{Nm})(0,020\text{m})}{(251,3 \cdot 10^{-9} \text{m}^4)} = -71,6\text{MPa}$$

Tổng hợp các ứng suất trên, ta có ứng suất tiếp tổng hợp tại K là :

$$(\tau_{xy}) = -52,5\text{MPa}$$

b) Ứng suất chính và mặt phẳng chính tại K

Ứng suất chính trong mặt phẳng thu được là:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = 128,8\text{MPa};$$

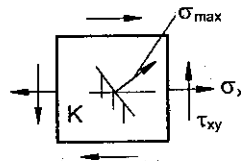
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = -21,4\text{MPa};$$

c) Phương chính tại K: Phương chính xác định bởi góc θ_p :

$$\tan 2\theta_p = \frac{52,5}{53,7} = 0,97765 ; \theta_p = 22,2^\circ \text{ (cùng chiều kim đồng hồ).}$$

$$\theta_s = 22,8^\circ \text{ (ngược chiều kim đồng hồ)}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất tại K : $\tau_{\max} = R = 75,1\text{MPa}$

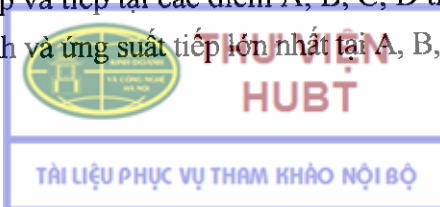


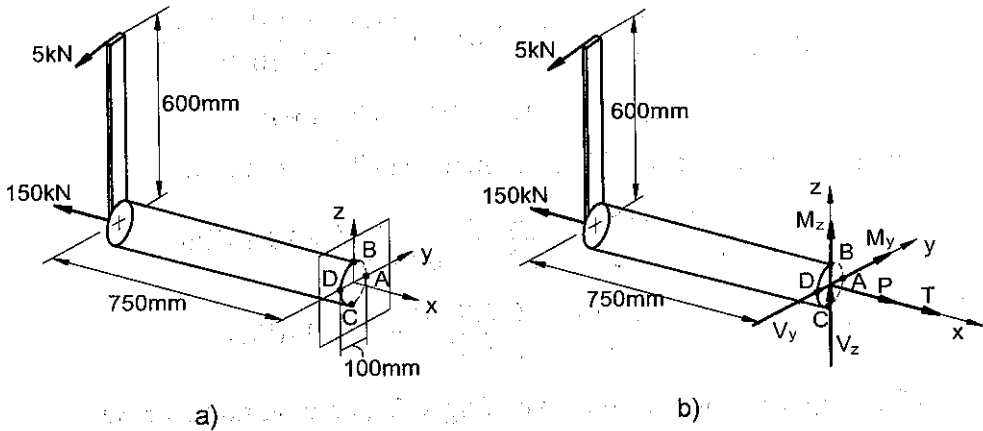
Hình 7.35. Trạng thái ứng suất tại K

Ví dụ 7.9: Một trục có đường kính 100 mm chịu liên kết và lực tác dụng như hình 7.36a. Hãy xác định :

a) Ứng suất pháp và tiếp tại các điểm A, B, C, D trên mặt cắt tại ngàm.

b) Ứng suất chính và ứng suất tiếp lớn nhất tại A, B, C, D của mặt cắt đó.





Hình 7.36

Giải: Giải phóng liên kết tại ngàm (hình 7.36b) và xét sự cân bằng của trục, ta có :

$$\sum F_x = P - 150 = 0 \Rightarrow P = 150(\text{kN})$$

$$\sum F_y = V_y - 5 = 0 \Rightarrow V_y = 5(\text{kN})$$

$$\sum F_z = V_z = 0$$

$$\sum M_x = T + 5 \cdot (0,6) = 0 \Rightarrow T = -3(\text{kNm})$$

$$\sum M_y = M_y = 0$$

$$\sum M_z = M_z + 5 \cdot (0,75) = 0 \Rightarrow M_z = -3,75(\text{kNm})$$

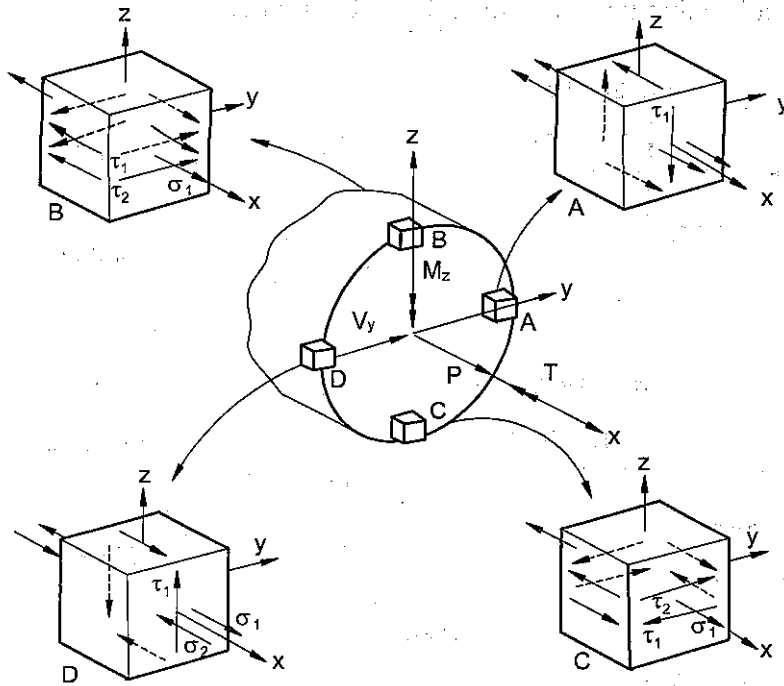
Các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang xác định theo công thức:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(100)^2}{4} = 7854 \text{ mm}^2 = 7854 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$Q = \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{2r^3}{3} = \frac{2(50)^3}{3} = 83,33 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 83,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(50)^4}{4} = 4,909 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 4,909 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = 9,817 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 9,817 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$



Hình 7.37

a) Ứng suất pháp do lực kéo P gây nên bằng:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{150 \cdot 10^3}{7854 \cdot 10^{-6}} = 19,099 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) \approx 19,1 \text{MPa}$$

Ứng suất pháp do mô men M_z gây nên có giá trị bằng:

$$\sigma_2 = \frac{M_z \cdot c}{I} = \frac{3,75 \cdot 10^3 \cdot (50 \cdot 10^{-3})}{4,909 \cdot 10^{-6}} = 38,195 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) \approx 38,2 \text{MPa}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất do mômen xoắn T gây nên bằng:

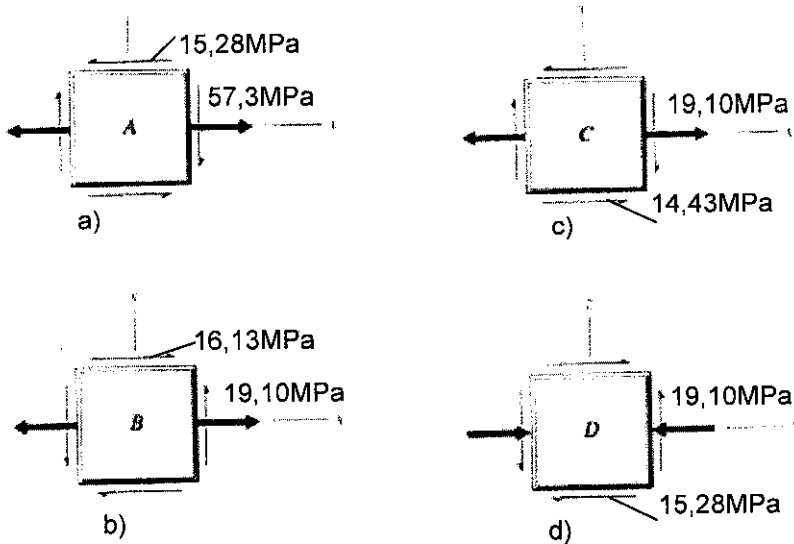
$$\tau_1 = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot (50 \cdot 10^{-3})}{9,817 \cdot 10^{-6}} = 15,280 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) = 15,28 \text{MPa}$$

Ứng suất tiếp do lực cắt V_y gây nên xác định theo công thức:

$$\tau_2 = \frac{V_y \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot (83,33 \cdot 10^{-6})}{4,909 \cdot 10^{-6} \cdot (100 \cdot 10^{-3})} = 0,8487 \cdot 10^6 (\text{N} / \text{m}^2) \approx 0,85 \text{MPa}$$

Trên hình 7.3 biểu diễn trạng thái ứng suất tại các điểm A, B, C, D tại ngầm.

b) Ứng suất chính tại các điểm A, B, C, D (hình 7.38):



Hình 7.38

Đối với điểm A ta có:

$$\sigma_{p1,p2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{57,3 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{57,3 - 0}{2}\right)^2 + (-15,28)^2}$$

$$= 28,65 \pm 32,47$$

$$\sigma_{p1}^{(A)} = 61,12\text{MPa}; \sigma_{p2}^{(A)} = -3,82\text{MPa}; \sigma_{p3}^{(A)} = 0$$

Ứng suất tiếp lớn nhất xác định theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{61,12 - (-3,82)}{2} = 32,47\text{MPa}$$

Tương tự đối với các điểm B,C,D ta có:

$$\sigma_{p1}^{(B)} = 28,3\text{MPa}; \sigma_{p2}^{(B)} = -9,20\text{MPa}; \tau_{\max} = 18,75\text{MPa}$$

$$\sigma_{p1}^{(C)} = 26,9\text{MPa}; \sigma_{p2}^{(C)} = -7,75\text{MPa}; \tau_{\max} = 17,30\text{MPa}$$

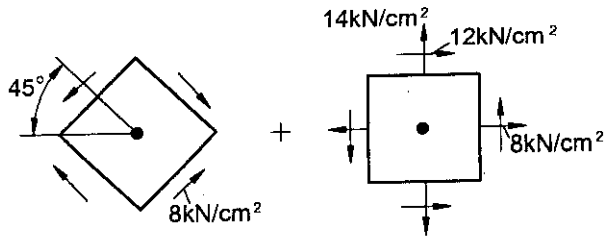
$$\sigma_{p1}^{(D)} = 8,47\text{MPa}; \sigma_{p2}^{(D)} = -27,6\text{MPa}; \tau_{\max} = 18,02\text{MPa}$$

Nhận xét: Ta thấy ứng suất kéo tại điểm A là lớn nhất, ứng suất nén tại điểm D là lớn nhất, còn ứng suất tiếp lớn nhất đạt giá trị tại điểm A.

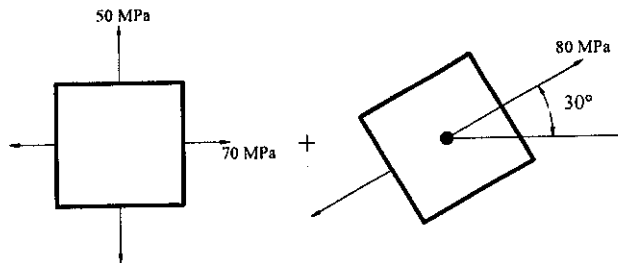


BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1 – 7.2. Xác định phương chính và ứng suất chính của trạng thái ứng suất là tổng của hai trạng thái như hình BT7.1 – 7.2

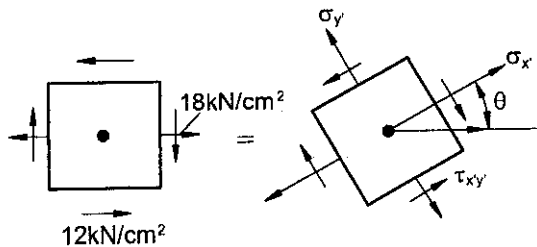


Hình BT 7.1



Hình BT 7.2

7.3. Cho trạng thái ứng suất như hình BT7.3, xác định khoảng biến thiên của góc θ sao cho ứng suất pháp σ_x bằng hoặc nhỏ hơn 20 kN/cm^2 .



Hình BT 7.3

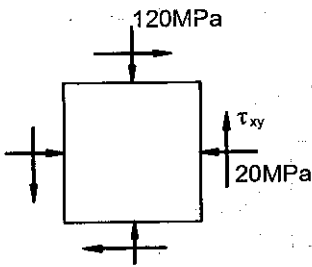
7.4. Đối với phân tử chịu ứng suất như hình BT7.4, xác định miền giá trị của τ_{xy} sao cho ứng suất kéo lớn nhất bằng hoặc nhỏ hơn 60 MPa .

7.5. Cho trạng thái ứng suất như hình BT7.5, xác định ứng suất tiếp lớn nhất khi:
a) $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$; b) $\sigma_y = 140 \text{ MPa}$.

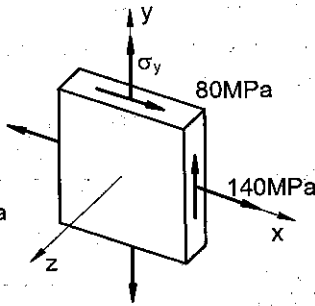
7.6. Với trạng thái ứng suất như hình BT7.6, xác định ứng suất tiếp lớn nhất khi:
a) $\sigma_y = 40 \text{ MPa}$; b) $\sigma_y = 120 \text{ MPa}$.

7.7. Với trạng thái ứng suất như hình BT7.7, xác định ứng suất tiếp lớn nhất khi:
a) $\sigma_x = 30 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 90 \text{ MPa}$; b) $\sigma_x = 70 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$.

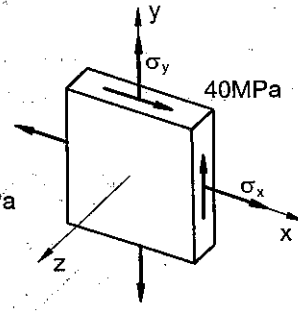
7.8. Với trạng thái ứng suất như hình BT7.8, xác định ứng suất tiếp lớn nhất khi:
a) $\sigma_x = 0$ và $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$; b) $\sigma_x = 105 \text{ MPa}$ và $\sigma_y = 45 \text{ MPa}$.



Hình BT7.4



Hình BT7.5



Hình BT 7.6 – 7.7 – 7.8

7.9. Các biến dạng đo được khi thử mẫu trên bộ phận của máy (hình BT7.9) có giá trị sau: $\epsilon_1 = +600$; $\epsilon_2 = +450$; $\epsilon_3 = -75$. Xác định :

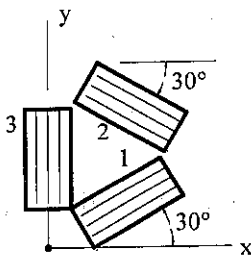
- Biến dạng chính trong mặt phẳng;
- Biến dạng góc lớn nhất.

7.10. Xác định biến dạng ϵ_x biết các cảm biến đo được trị số của các biến dạng theo ba phương (hình BT7.10) làm thành góc 45° là:

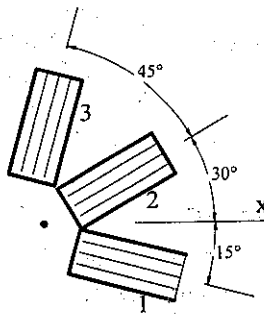
$$\epsilon_1 = +480 \times 10^{-6}; \epsilon_2 = -120 \times 10^{-6}; \epsilon_3 = +80 \times 10^{-6}.$$

7.11. Các biến dạng đo được theo phương 1, 2 và 4 trên bề mặt của móc treo cân cầu (hình BT7.11) có giá trị sau: $\epsilon_1 = +420$; $\epsilon_2 = -45$; $\epsilon_4 = +165$

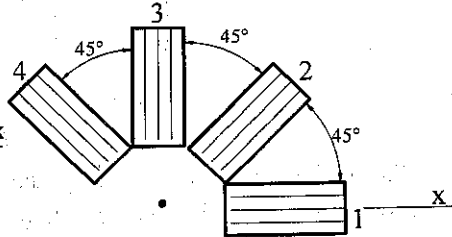
- Biến dạng theo phương 3 là bao nhiêu?
- Xác định biến dạng chính và biến dạng góc lớn nhất trong mặt phẳng.



Hình BT7.9



Hình BT7.10

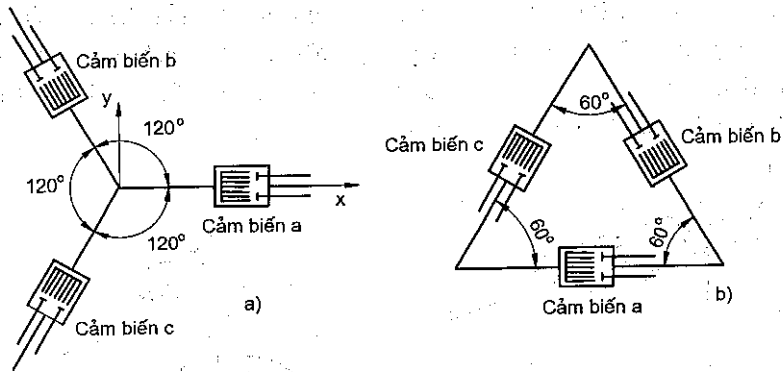


Hình BT7.11

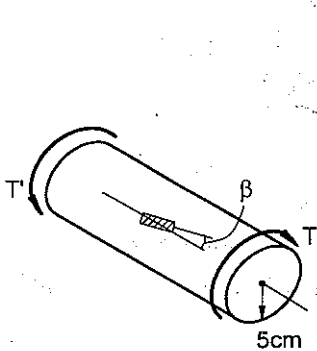
7.12. Các biến dạng đo được theo phương a, b và c trên bề mặt của móc treo cân cầu (hình BT 7.12a,b) có giá trị sau: $\epsilon_a = 780$; $\epsilon_b = 345$; $\epsilon_c = -332$, hệ số Poát-xông $\nu = 0,33$.

- Tính các biến dạng ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy}
- Xác định biến dạng chính và biến dạng góc lớn nhất trong mặt phẳng.

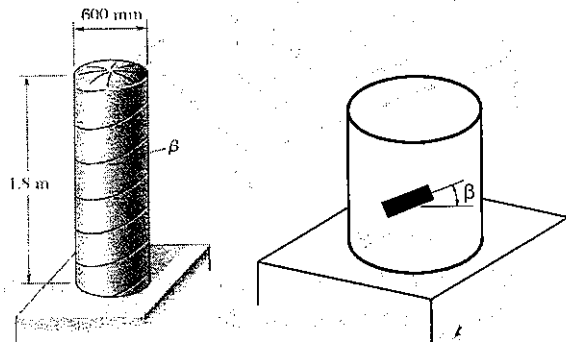
7.13. Cảm biến gắn trên bề mặt của trục đặc bằng thép đường kính 10cm theo phương làm thành góc $\beta = 25^\circ$ với trục của thanh (hình BT7.13). Biết môđun trượt của vật liệu $G = 8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, xác định mômen xoắn T tương ứng với số đo biến dạng là 300×10^{-6} .



Hình BT7.12



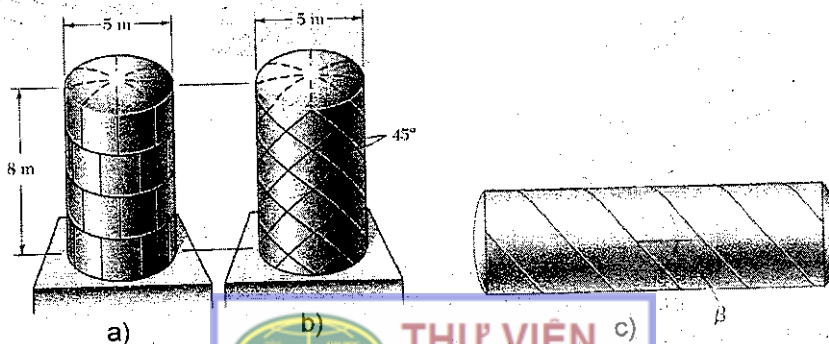
Hình BT 7.13



Hình BT7.14

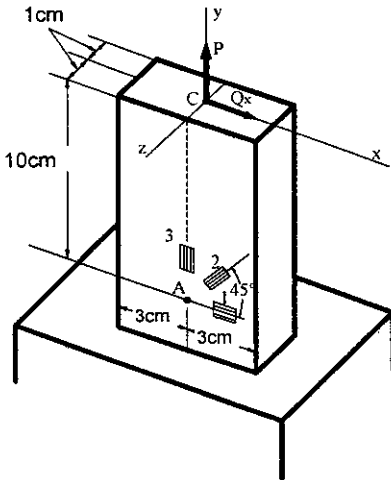
7.14. Cảm biến gắn trên bề mặt của vỏ trụ để đo áp suất của khí nén làm thành góc $\beta = 18^\circ$ với mặt phẳng ngang. Thành vỏ dày 6mm, đường kính trong của vỏ là 600mm. Biết vật liệu có $E = 200\text{GPa}$; $\nu = 0,30$. Xác định áp suất bên trong vỏ nếu số đo biến dạng là 280.

7.15. Vỏ hình trụ có đường kính bên ngoài $D = 5\text{m}$ được chế tạo từ tấm thép có chiều dày 15mm và hàn theo góc $\beta = 90^\circ$ (hình BT 7.15a), $\beta = 45^\circ$ (hình BT 7.15b), và $\beta = 30^\circ$ (hình BT7.15c) với trục vỏ. Xác định ứng suất pháp vuông góc với mỗi hàn và ứng suất tiếp song với mỗi hàn, biết áp suất bên trong vỏ là 1500kPa.

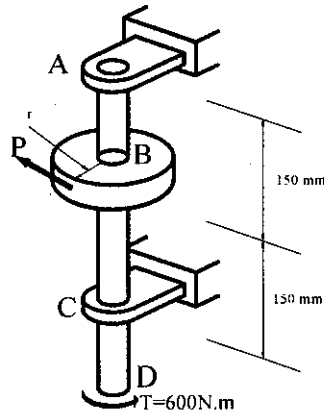


Hình BT7.15

7.16. Lực dọc trục P và lực theo phương ngang Q tác dụng tại điểm C của dầm mặt cắt ngang chữ nhật (hình BT7.16). Cảm biến gắn theo phương 45° trên bề mặt của thanh tại điểm A có các trị số sau: $\varepsilon_1 = -75 \cdot 10^{-6}$; $\varepsilon_2 = +300 \cdot 10^{-6}$; $\varepsilon_3 = +250 \cdot 10^{-6}$. Biết $E = 29 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$; $\nu = 0,30$, xác định độ lớn của lực P và Q .



Hình BT7.16

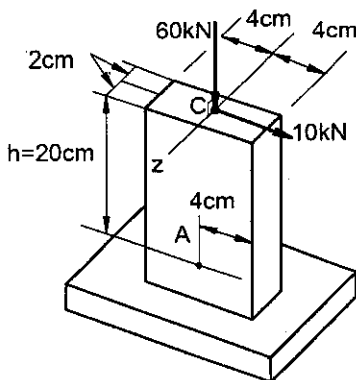


Hình BT7.17

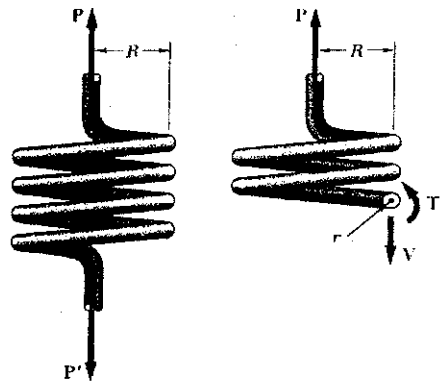
7.17. Xác định đường kính nhỏ nhất của trục đặc ABCD (hình BT7.17), biết $\tau_{\text{all}} = 60 \text{ MPa}$ và bán kính của đĩa B là $r = 80 \text{ mm}$.

7.18. Hai lực tác dụng lên thanh như hình BT7.18. Xác định:

- Ứng suất chính và phương chính tại điểm A;
- Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm đó.



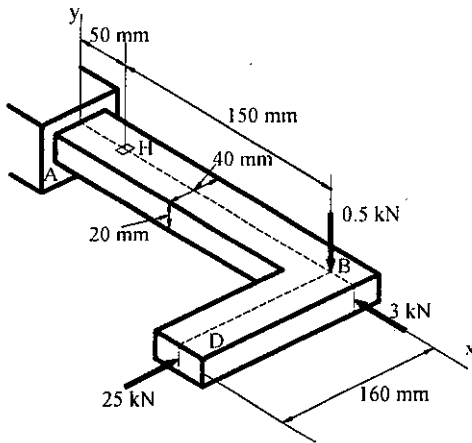
Hình BT7.18



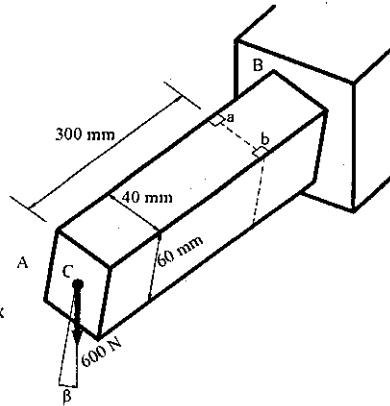
Hình BT7.19

7.19. Một lò xo hình trụ bước ngắn được làm từ sợi thép có bán kính r tạo thành hình xoắn ốc với bán kính R (hình BT7.19). Xác định ứng suất tiếp lớn nhất do hai lực bằng nhau về độ lớn nhưng ngược chiều P và P' tác dụng dọc trục lò xo gây nên.

7.20. Ba lực tác dụng lên một bộ phận máy ABD như hình BT7.20. Biết kích thước mặt cắt ngang chứa điểm H là 20×40 mm, xác định ứng suất chính và ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm H.



Hình BT7.20

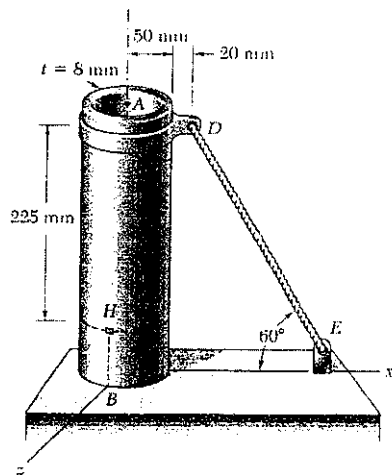


Hình BT7.21

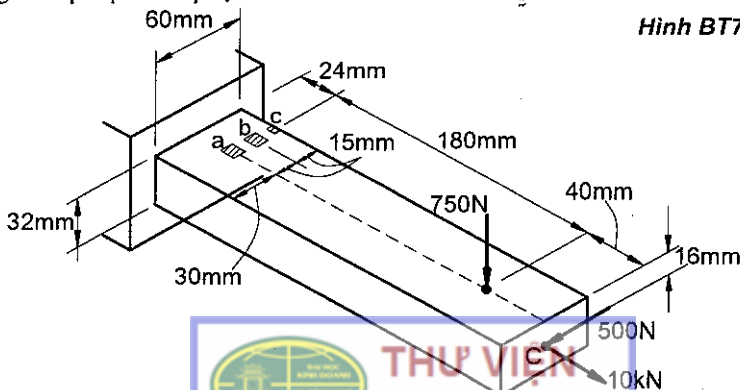
7.21. Dầm công-xôn AB được dựng lên sao cho cạnh 60mm tạo thành góc β từ 0° đến 90° với phương thẳng đứng. Biết lực bằng 600N tác dụng tại đầu tự do của dầm theo phương thẳng đứng (hình BT7.21). Xác định ứng suất pháp tại điểm a và b khi:

a) $\beta = 0$; b) $\beta = 90^\circ$; c) Xác định góc β sao cho ứng suất pháp tại a là lớn nhất và tính trị số của ứng suất đó.

7.22. Thanh AB bằng thép có đường kính ngoài 100mm, bề dày $t = 8$ mm, biết lực kéo trong dây cáp DE là 40kN (hình BT7.22), xác định ứng suất pháp và tiếp tại điểm H.



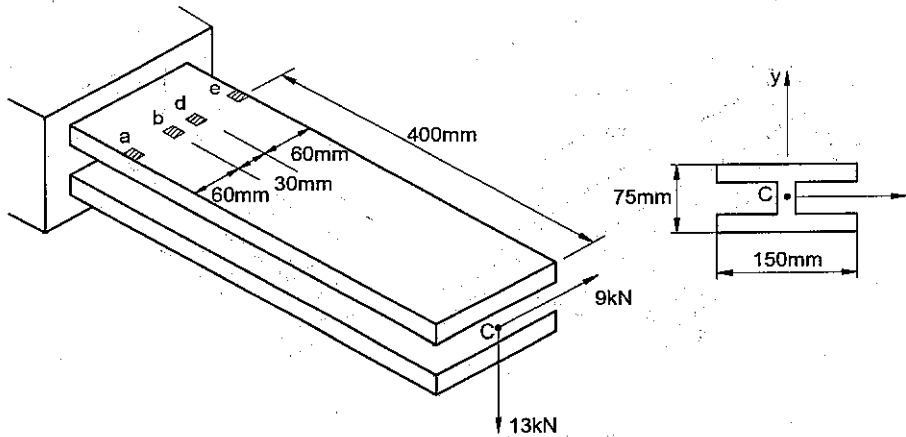
Hình BT7.22




THƯ VIỆN HUBT
 Hình BT7.23
 TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

7.23. Dầm công-xôn chịu tác dụng của ba lực như hình BT7.23. Xác định ứng suất pháp và tiếp tại các điểm a, b, c.

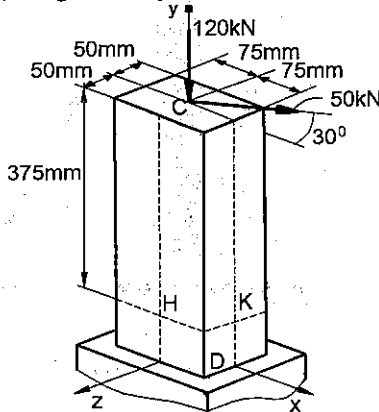
7.24. Dầm công-xôn chịu tác dụng của hai lực như hình BT7.24. Xác định ứng suất pháp và tiếp tại các điểm a, b, c, d.



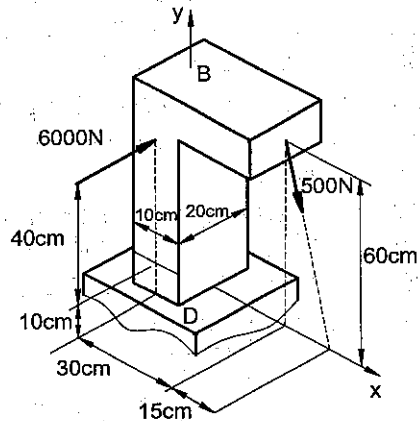
Hình BT7.24

7.25. Cho thanh chịu lực như hình vẽ, xác định:

- Ứng suất chính và phương chính tại điểm H và K (hình BT7.25a);
- Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm H (hình BT7.25b).

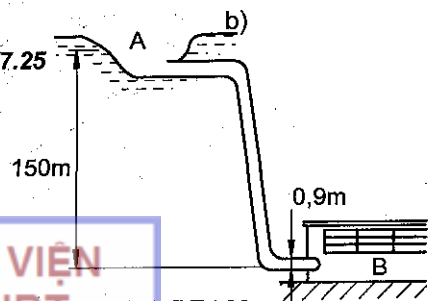


a)



Hình BT7.25

7.26. Đường ống dẫn nước tưới từ trạm bơm B có đường kính 0,9m, bề dày 1,5cm nối với bể chứa A (hình BT7.26). Biết trọng lượng riêng của nước là 10^4 N/m^3 ; xác định ứng suất pháp và tiếp trong đường ống dưới tác dụng của lực thủy tĩnh.



Hình BT7.26

Chương 8

BIẾN DẠNG CỦA DÂY CHỊU UỐN

8.1. KHÁI NIỆM

Khi thiết kế cầu dây văng chịu uốn, ta cần kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng – đó là độ võng lớn nhất của cầu không được vượt quá giá trị cho phép. Trong chương 5 ta đã có liên hệ giữa bán kính cong của dầm và mômen uốn biểu diễn theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.1)$$

Trong đó: $M(x)$ là mômen uốn; E là môđun đàn hồi của vật liệu; và I là mômen quán tính đối với trục trung hòa của mặt cắt ngang. Để xác định góc xoay và độ võng của dầm tại mặt cắt bất kỳ, ta thiết lập phương trình vi phân độ võng của dầm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.2)$$

Phương trình đó thu được từ biểu thức độ cong của đường đàn hồi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (8.3)$$

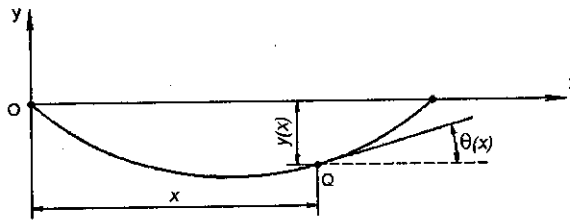
với giả thiết góc xoay của dầm dy/dx là rất bé.

Nếu mômen uốn có thể biểu diễn thành một biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài của dầm, góc xoay $\theta = dy/dx$ và độ võng y tại mặt cắt bất kỳ có thể thu được bằng cách tích phân liên tiếp hai lần phương trình (8.2). Hai hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên của dầm. Bằng phương pháp Hàm gián đoạn (đã đề cập ở chương 5), ta có thể biểu diễn mômen uốn thành biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài dầm, cho dù tải trọng tác dụng trên các đoạn dầm là khác nhau.



THƯ VIỆN
HUBT

8.2. BIẾN DẠNG CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG



Hình 8.1

Trên hình 8.1, ký hiệu $y(x)$ là độ võng tại mặt cắt Q có khoảng cách x từ đầu bên trái, còn $\theta(x)$ là góc giữa tiếp tuyến với đường đàn hồi và trục x ,

ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \theta(x) \quad (8.4)$$

Từ (8.2) ta có:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \quad (8.5)$$

Tích phân cả hai vế theo x , trong trường hợp độ cứng $EI = \text{const}$, ta nhận được :

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (8.6)$$

Hay:

$$EI \theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (8.6')$$

Tích phân hai vế theo x , ta có:

$$EI \cdot y(x) = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (8.7)$$

$$EI \cdot y(x) = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (8.8)$$

Với C_1, C_2 là các hằng số tích phân, xác định từ điều kiện biên của dầm. Đối với dầm công-xôn, độ võng và góc xoay tại ngàm phải bằng không, nếu dầm đặt trên hai gối đỡ, độ võng tại hai gối là bằng không.

8.3. XÁC ĐỊNH ĐỘ VỒNG TRỰC TIẾP TỪ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ

Ta có sự liên hệ vi phân giữa tải trọng phân bố $w(x)$, lực cắt $V(x)$ và mômen uốn $M(x)$:



$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \quad (8.9)$$

Đạo hàm cả hai vế:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI} \quad (8.10)$$

Nhân hai vế với EI và tích phân bốn lần liên tiếp, ta có:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$$

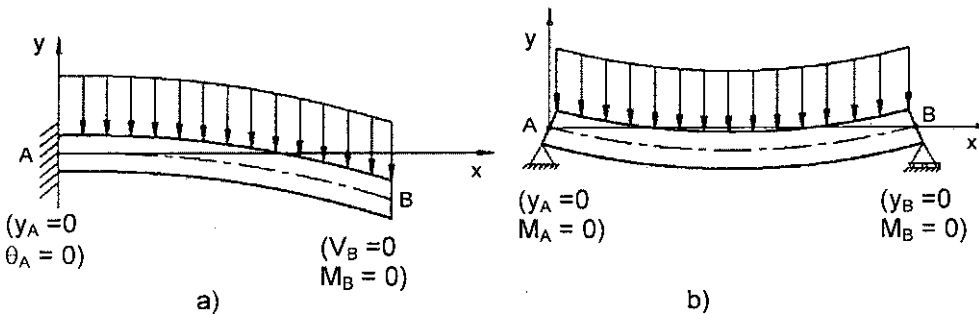
$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -\int w(x)dx + C_1$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\int dx \int w(x)dx + C_1x + C_2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta(x) = -\int dx \int dx \int w(x)dx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x)dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (8.11)$$

Bốn hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên, đó là: a) Điều kiện ràng buộc đối với độ võng, góc xoay tại các liên kết (hình 8.2a); b) Điều kiện lực cắt V và mômen uốn M tại đầu tự do của dầm công-xôn bằng không, hoặc M bằng không tại hai gối tựa (hình 8.2b).



Hình 8.2. Điều kiện biên

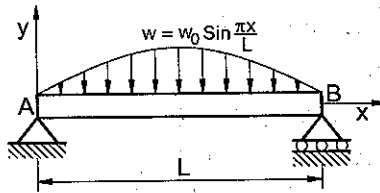
Ví dụ 8.1:

Cho dầm chịu tải trọng theo quy luật $w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ (hình 8.3) xác định:

- Phương trình góc xoay và độ võng tại mặt cắt bất kỳ;
- Góc xoay tại điểm A



c) Độ võng lớn nhất.



Hình 8.3

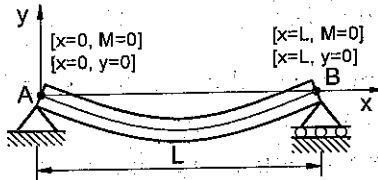
Giải: a) Phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Tích phân hai lần, ta có: $EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = w_0 \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2$$

Điều kiện biên (xem hình 8.4):



Hình 8.4

$x = 0, M = 0$; Ta rút ra: $C_2 = 0$

$x = L, M = 0$; $0 = w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \sin \pi + C_1 L$; $C_1 = 0$

Do đó: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = w_0 \frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$

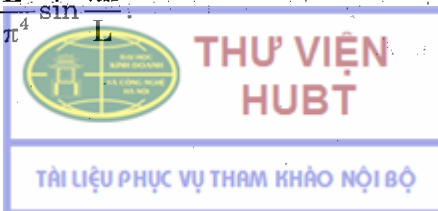
Tích phân hai lần, ta có:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -w_0 \frac{L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L} + C_3$$

$$EI y = EI\theta = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{L} + C_3 x + C_4$$

Điều kiện biên: $x = 0; y = 0; C_4 = 0$; $x = L; y = 0; C_3 = 0$. Phương trình

độ võng: $EI y = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{L}$

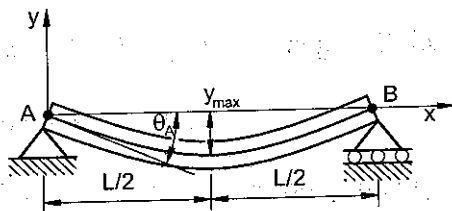


b) Góc xoay tại điểm A: tại $x = 0$ ta có:

$$EI\theta_A = -w_0 \frac{L^3}{\pi^3}, \text{ từ đó: } \theta_A = w_0 \frac{L^3}{\pi^3 EI} \text{ (theo chiều kim đồng hồ).}$$

c) Độ võng lớn nhất (hình 8.5): với $x = L/2$:

$$EIy_{\max} = -w_0 \frac{L^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi}{2} \text{ hay: } y_{\max} = \frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \downarrow$$



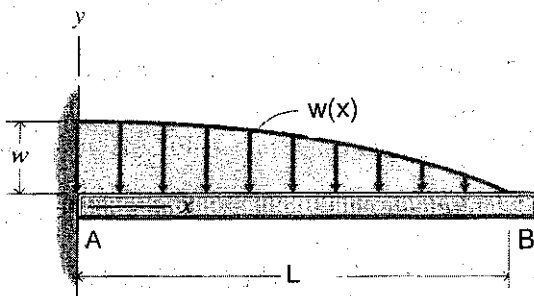
Hình 8.5

Ví dụ 8.2:

Cho dầm công-xôn chịu tải trọng theo quy luật $w = w_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$

(hình 8.6) biết độ cứng $EI = \text{const}$; xác định :

- Phương trình độ võng, góc xoay;
- Độ võng, góc xoay tại B;
- Phản lực liên kết tại A.



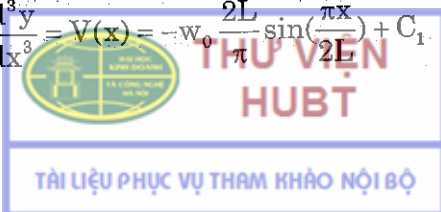
Hình 8.6

Giải: a) Phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

Tích phân liên tiếp hai vế, ta có:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -w_0 \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + C_1$$



$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = w_0 \frac{4L^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = w_0 \frac{8L^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIy = -w_0 \frac{16L^4}{\pi^4} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Điều kiện biên tại đầu ngàm: $x = 0; y = 0; C_4 = w_0 \frac{16L^4}{\pi^4}$

$$x = 0; \theta = 0; C_3 = 0$$

Điều kiện biên tại đầu tự do: $x = L; V = 0; C_1 = \frac{2w_0 L}{\pi}$

$$x = L; M = 0; C_2 = -w_0 \frac{2L^2}{\pi}$$

Phương trình độ võng:

$$y = -\frac{w_0}{3\pi^4 EI} \left(48L^4 \cos\frac{\pi x}{2L} - \pi^3 L x^3 + 3\pi^3 L^2 x^2 - 48L^4 \right)$$

b) Góc xoay tại điểm B: tại $x = L$ ta có:

$$\theta_B = \frac{w_0 L^3}{EI \pi^3} (8 - \pi^2) < 0, \text{ (cùng chiều kim đồng hồ)}$$

Độ võng tại B: cho $x = L$ vào biểu thức của $y(x)$, ta có:

$$y_B = \frac{2w_0 L^4}{EI \pi^4} \left(8 - \frac{\pi^3}{3} \right) < 0 \text{ (hướng xuống dưới)}$$

c) Phản lực liên kết tại A: Thay $x = 0$ vào $V(x)$ và $M(x)$ ta có:

$$V_A = C_1 = w_0 \frac{2L}{\pi} > 0 \text{ (hướng lên trên)}$$

$$M_A = \frac{4w_0 L^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) < 0 \text{ (quay ngược chiều kim đồng hồ)}$$

Phương pháp tính độ võng trực tiếp trên có hiệu quả đối với dầm công-xôn hoặc dầm đặt trên hai gối tựa, chịu tải trọng phân bố trên chiều dài của dầm. Trong trường hợp dầm có đầu thừa (nghĩa là một đoạn dầm có một đầu tự do), phản lực liên kết sẽ gây nên sự gián đoạn của lực cắt – hay biểu

thức đạo hàm bậc ba của độ võng $y(x)$, do đó ta phải biểu diễn độ võng dưới dạng các hàm số khác nhau trên toàn chiều dài của dầm. Sử dụng hàm gián đoạn, ta có thể khắc phục được vấn đề đó và chỉ cần xác định hai hằng số tích phân từ điều kiện liên kết của dầm.

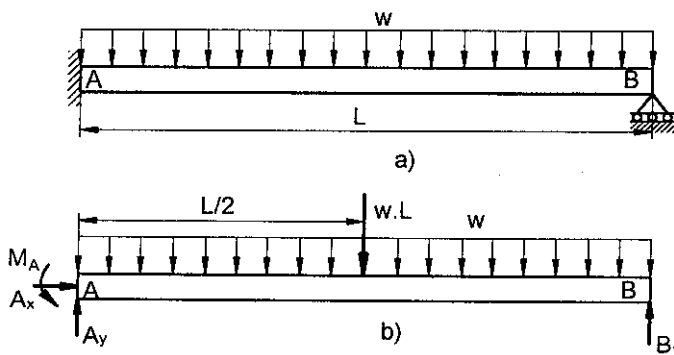
Tiếp theo ta sẽ xét trường hợp *dầm siêu tĩnh* chịu uốn, tức là khi số phản lực liên kết lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học, khi đó ta phải bổ sung thêm các phương trình tương thích biến dạng vào hệ phương trình cân bằng tĩnh học.

8.4. DẦM SIÊU TĨNH CHỊU UỐN

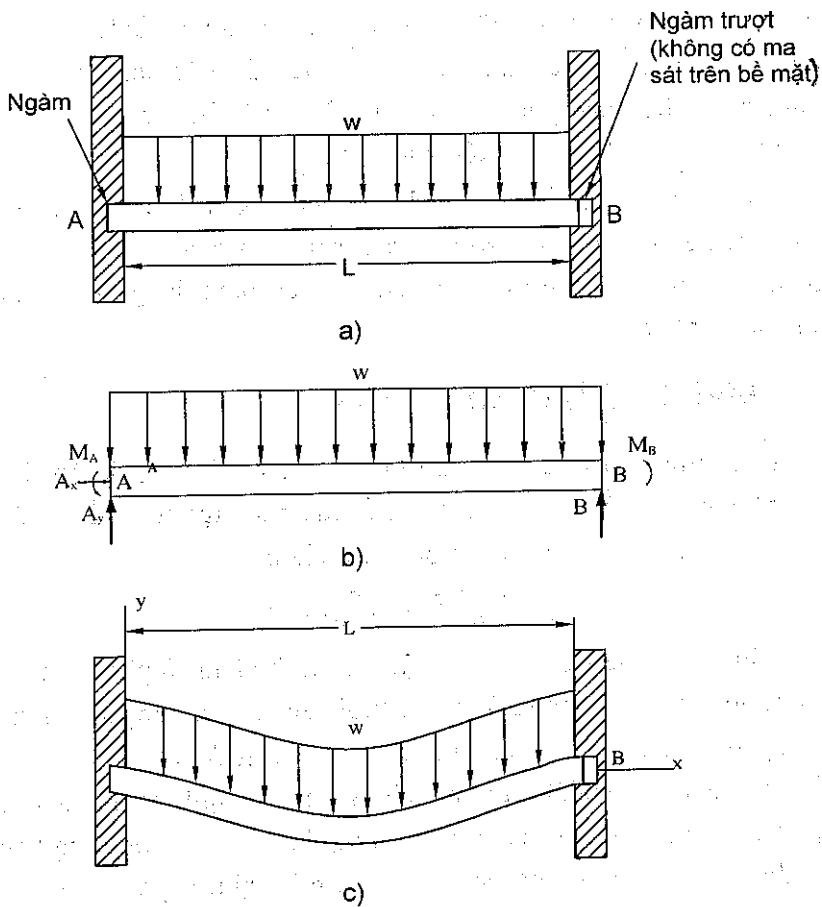
Trên hình 8.6 là dầm ngàm tại đầu A và liên kết khớp di động tại B. Giải phóng liên kết, ta có bốn ẩn số là các phản lực liên kết tại A và B, trong khi chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_A = 0 \quad (8.12)$$

Dầm gọi là hệ siêu tĩnh, số bậc siêu tĩnh bằng số phản lực liên kết trừ đi số phương trình cân bằng tĩnh học (nói cách khác, bằng *số phản lực liên kết đơn thừa*). Ta giải bài toán bằng cách sử dụng độ võng, góc xoay của dầm. Khi đó, ngoài bốn phản lực liên kết ta cần xác định hai hằng số tích phân là C_1 và C_2 . Như vậy ta sẽ có 6 ẩn số trong khi chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học. Ta bổ sung vào hệ (8.12) thêm ba phương trình tương thích biến dạng : độ võng và góc xoay tại A bằng không, và độ võng tại B bằng không.



Hình 8.6. Dầm siêu tĩnh bậc một



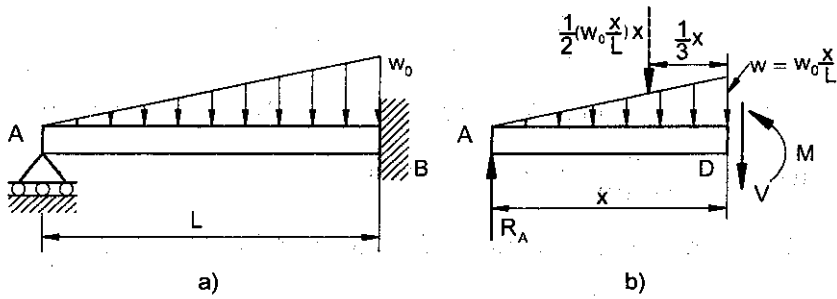
Hình 8.7. Dầm siêu tĩnh bậc hai

Trong ví dụ trên ta có một phản lực liên kết đơn thừa, do đó bậc siêu tĩnh bằng một. Trên hình 8.7a, ta có hệ siêu tĩnh bậc hai, do có năm ẩn số là các phản lực liên kết tại A và B (đầu B gọi là ngàm trượt) (hình 8.7b). Ta bổ sung thêm 4 phương trình biến dạng tại A và B vào hệ 3 phương trình cân bằng tĩnh học để xác định 7 ẩn số (trong đó 5 là số phản lực liên kết và 2 là các hằng số tích phân). Biến dạng của dầm khi chịu uốn biểu diễn trên hình 8.7c.

Ví dụ 8.3: Cho dầm AB có độ cứng không đổi chịu tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất (hình 8.8a).

- a) Tính phản lực liên kết tại A
- b) Xác định phương trình độ võng
- c) Tính góc xoay tại A.





Hình 8.8a,b

Giải : Giải phóng liên kết (hình 8.8b), ta có:

$$\sum M_D = 0 ; R_A x - \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 x^2}{L} \right) \frac{x}{3} - M = 0 ; M = R_A x - \frac{1}{6} \left(\frac{w_0 x^3}{L} \right)$$

Phương trình vi phân độ võng:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x - \frac{1}{6} \frac{w_0 x^3}{L}$$

Chú ý rằng độ cứng $EI = \text{const}$, tích phân liên tiếp hai lần, ta được:

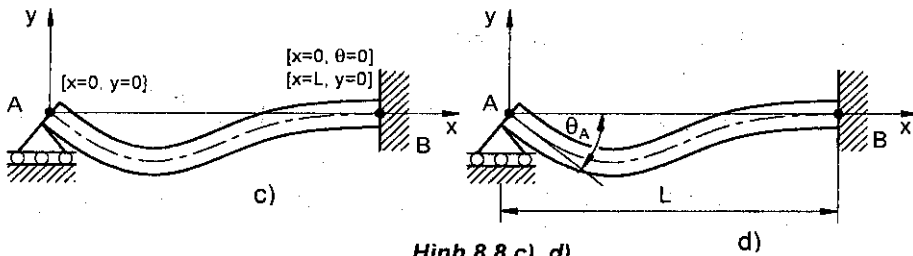
$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{24} \frac{w_0 x^4}{L} + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{120} \frac{w_0 x^5}{L} + C_1 x + C_2$$

Điều kiện biên (hình 8.8c,d): $x = 0, y = 0 ; C_2 = 0$

$$x = L, \theta = 0 ; \frac{1}{2} R_A L^2 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0$$

$$x = L ; y = 0 ; \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0$$



Hình 8.8 c, d)

a) Phản lực tại A: Giải hệ phương trình đối với điều kiện biên (hình 8.8c,d), ta thu được:



$$R_A = \frac{1}{10} w_0 L; C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3$$

b) Phương trình độ võng: Thay R_A, C_1, C_2 vào phương trình độ võng $y(x)$, ta có: $y = \frac{w_0}{120EI} (-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x)$

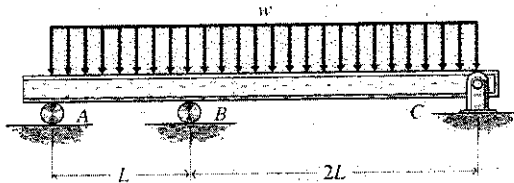
c) Góc xoay tại A: Đạo hàm biểu thức trên theo x , ta có:

$$\theta = \frac{w_0}{120EI} (-5x^4 + 6L^2 x^2 - L^4)$$

Cho $x = 0$, ta có: $\theta_A = -\frac{w_0 L^3}{120EI}$ (cùng chiều kim đồng hồ).

Ví dụ 8.4: Cho dầm chịu tải trọng như hình 8.9. Biết độ cứng $EI = \text{const}$, xác định:

- Phản lực liên kết tại các gối tựa.
- Phương trình độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kỳ.
- Góc xoay tại A.



Hình 8.9

Giải: Giải phóng liên kết tại các gối tựa, ta có hệ phương trình cân bằng tĩnh học:

$$\sum M_C = R_A \cdot 3L + R_B \cdot 2L - w \cdot 3L \cdot \frac{3L}{2} = 0; 3R_A + 2R_B = \frac{9wL}{2}; \quad (a)$$

$$\sum F_y = R_A + R_B + R_C - w3L = 0; \quad (b)$$

$$\sum M_A = R_C \cdot 3L + R_B \cdot L - w \cdot 3L \cdot \frac{3L}{2} = 0; R_B + 3R_C = \frac{9wL}{2}; \quad (c)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = R_A x - w \frac{x^2}{2} \Rightarrow V = R_A - wx; V_B = R_B = R_A - wL; (d)$$

Trong đó $0 \leq x \leq L$; Tích phân liên tiếp hai lần theo x , ta có:



$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = R_A \frac{x^2}{2} - w \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIy = R_A \frac{x^3}{6} - w \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2 \quad (e)$$

Điều kiện biên trên đoạn AB: $x = 0$; $y = 0$; $C_2 = 0$

$$x = L$$
 ; $y = 0$; $C_1 = -R_A \frac{L^2}{6} + w \frac{L^3}{24}$

Tương tự trên đoạn BC ($L \leq x \leq 3L$) ta có:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = R_A x + R_B (x - L) - w \frac{x^2}{2} \quad (g)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = R_A \frac{x^2}{2} + R_B \frac{(x - L)^2}{2} - w \frac{x^3}{6} + C_3 \quad (h)$$

$$EIy = R_A \frac{x^3}{6} + R_B \frac{(x - L)^3}{6} - w \frac{x^4}{24} + C_3x + C_4 \quad (i)$$

Điều kiện biên trên đoạn BC:

$$x = L$$
 ; $y = 0$; $C_3 = -R_A \frac{L^2}{6} + w \frac{L^3}{4}$;

$$x = 3L$$
 ; $y = 0$; $C_4 = -4R_A L^3 - R_B \frac{4L^3}{3} + \frac{21wL^4}{8}$

a) Xác định phản lực liên kết : Giải hệ (a) – (d) ta thu được :

$$R_A = \frac{13wL}{10} ; R_B = \frac{3wL}{10} ; R_C = \frac{7wL}{5} ; \text{(hướng lên trên)}$$

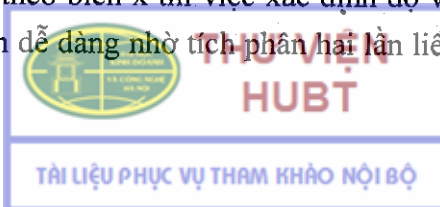
b) Phương trình độ võng, góc xoay : thu được bằng cách thay giá trị tìm được của $C_1, C_2, C_3, C_4, R_A, R_B$ vào biểu thức e) ; g) ; h) ; i).

c) Góc xoay tại A :

$$\theta_A = \frac{C_1}{EI} = -\frac{7wL^3}{40EI} \text{ (cùng chiều kim đồng hồ).}$$

8.5. ỨNG DỤNG HÀM GIÁN ĐOẠN XÁC ĐỊNH ĐỘ VỒNG, GÓC XOAY

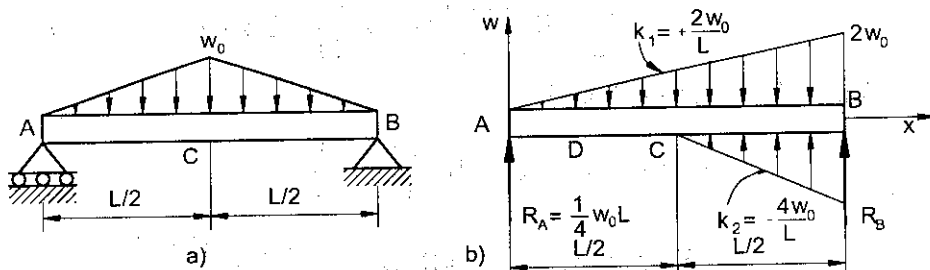
Như trên ta thấy, nếu mômen uốn tại mặt cắt bất kỳ được biểu diễn bởi một hàm số duy nhất theo biến x thì việc xác định độ võng và góc xoay có thể thực hiện một cách dễ dàng nhờ tích phân hai lần liên tiếp hàm số $M(x)$.



Tuy nhiên, khi dầm chịu tải trọng trên n đoạn khác nhau thì mômen uốn cũng thay đổi trên mỗi đoạn, do vậy ta sẽ có $2n$ hằng số tích phân; và phải giải hệ $2n$ phương trình (trong đó 2 phương trình là điều kiện biên và $(2n - 2)$ phương trình biểu diễn điều kiện liên tục về độ võng và góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai đoạn kề nhau). Phương pháp hàm gián đoạn có thể giải quyết vấn đề trên một cách đơn giản và tiết kiệm nhiều công sức tính toán.

Ví dụ 8.5: Cho dầm chịu lực phân bố theo quy luật tam giác như hình 8.10a, xác định:

- Phương trình độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kỳ.
- Góc xoay tại điểm A.
- Độ võng lớn nhất.



Hình 8.10a, b

Giải: Phương trình mômen uốn của dầm có thể thu được bằng cách sử dụng hàm gián đoạn, với định nghĩa và tính chất đã đề cập trong chương 5 (biểu đồ tải trọng được biểu diễn dưới dạng tương đương như hình 8.10b):

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^3 + \frac{1}{4}w_0Lx$$

a) Phương trình đường đàn hồi :

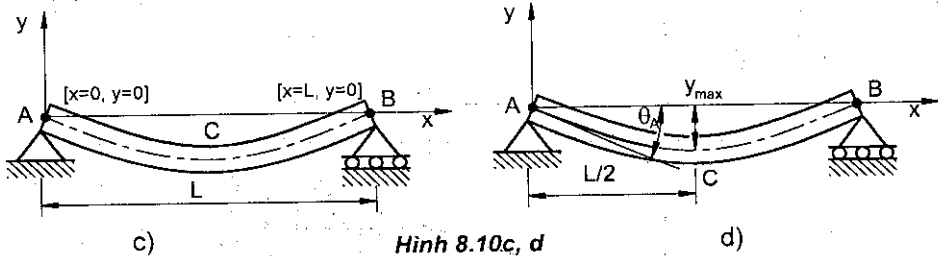
$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^3 + \frac{1}{4}w_0Lx$$

Tích phân hai lần liên tiếp:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI C_0 = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^4 + \frac{1}{8}w_0Lx^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^5 + \frac{1}{24}w_0Lx^3 + C_1x + C_2$$

Điều kiện biên (hình 8.10c): $x = 0, y = 0$; ta tìm được $C_2 = 0$;



$$x = L, y = 0; C_1 = -\frac{5}{192}w_0L^3$$

Thay C_1 và C_2 vào biểu thức của độ võng và góc xoay, ta có :

$$EI\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^4 + \frac{1}{8}w_0Lx^2 - \frac{5}{192}w_0L^3 \quad (*)$$

$$EIy = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\left\langle x - \frac{1}{2}L \right\rangle^5 + \frac{1}{24}w_0Lx^3 - \frac{5}{192}w_0L^3x \quad (**)$$

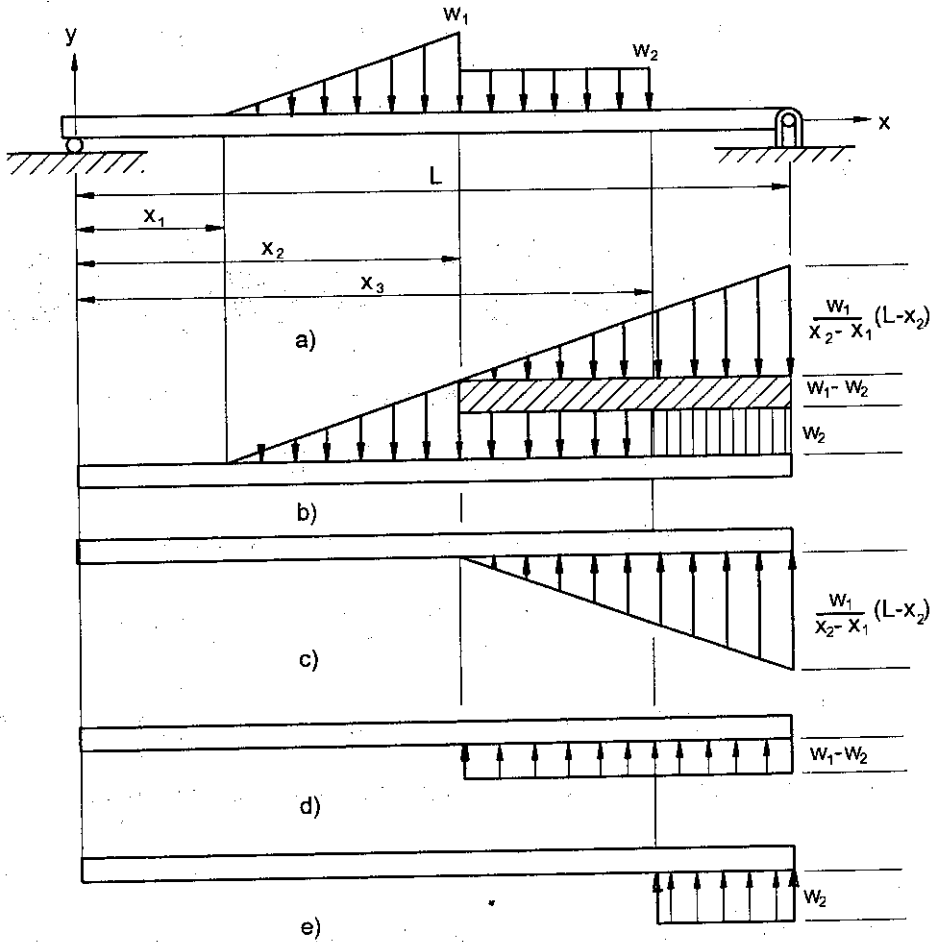
b) Góc xoay tại A: Cho $x = 0$ vào phương trình góc xoay, ta có :

$$\theta_A = -\frac{5}{192}w_0L^3 \quad (***)$$

c) Độ võng lớn, nhỏ nhất: Do tính đối xứng của liên kết và tải trọng nên độ võng lớn nhất đạt được tại giữa dầm (hình 8.10d).

$$\text{Thay } x = L/2 \text{ vào phương trình độ võng, ta có: } y_{\max} = \frac{w_0L^4}{120EI} \downarrow \quad (***)$$

Ví dụ 8.6: Cho dầm đặt trên hai gối tựa và chịu tải trọng như hình 8.11a, biết độ cứng $EI = \text{const}$; vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn và tính độ võng lớn nhất của dầm.



Hình 8.11

Giải: Tải trọng phân bố w_1, w_2 trên hai đoạn dầm có thể phân tích thành hai hàm số bậc nhất (hình 8.11b,c) và có dạng như sau:

$$w = \frac{w_1(x-x_1)}{x_2-x_1} \quad (x \geq x_1) \quad \text{và} \quad w = \frac{w_1(x-x_2)}{x_2-x_1} \quad (x \geq x_2)$$

Mômen uốn do tải trọng phân bố bậc nhất đối với $x \geq x_1$ xác định theo công thức:

$$M = -\frac{1}{2} \frac{w_1(x-x_1)}{x_2-x_1} (x-x_1) \frac{(x-x_1)}{3} = -\frac{w_1(x-x_1)^3}{6(x_2-x_1)}$$



Tải trọng phân bố đều $w_1 - w_2$ trên đoạn $x \geq x_1$ biểu diễn trên hình 8.11d, còn tải trọng phân bố đều w_2 biểu diễn trên hình 8.11e. Ta có biểu thức mômen uốn trên toàn dầm biểu diễn dưới dạng hàm gián đoạn như sau:

$$M(x) = R_1 \cdot x - \frac{w_1 \langle x - x_1 \rangle^3}{6(x_2 - x_1)} + \frac{w_1 \langle x - x_2 \rangle^3}{6(x_2 - x_1)} + \frac{(w_1 - w_2) \langle x - x_2 \rangle^2}{2} + \frac{w_2 \langle x - x_3 \rangle^2}{2}$$

Trong đó R_1 là phản lực liên kết tại gối tựa bên trái dầm và có giá trị :

$$R_1 = \frac{1}{2L} \left\{ w_1(x_2 - x_1) \cdot \left[L - \frac{1}{3}(2x_2 - x_1) \right] + w_2(x_3 - x_2) \cdot [2L - (x_3 + x_2)] \right\}$$

Đạo hàm biểu thức của $M(x)$ ta thu được lực cắt trên toàn dầm:

$$V(x) = R_1 - \frac{w_1 \langle x - x_1 \rangle^2}{2(x_2 - x_1)} + \frac{w_1 \langle x - x_2 \rangle^2}{2(x_2 - x_1)} + (w_1 - w_2) \langle x - x_2 \rangle + w_2 \langle x - x_3 \rangle$$

Tích phân hai lần liên tiếp $M(x)/EI$ ta được biểu thức của độ võng :

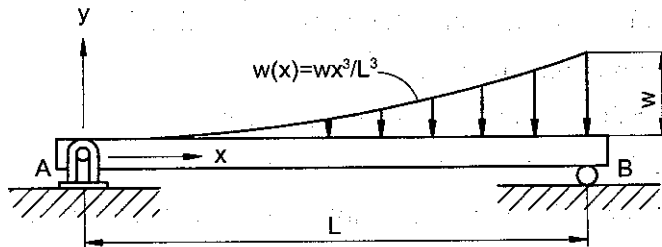
$$EIy(x) = R_1 \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{w_1 \langle x - x_1 \rangle^5}{120(x_2 - x_1)} + \frac{w_1 \langle x - x_2 \rangle^5}{120(x_2 - x_1)} + \frac{(w_1 - w_2) \langle x - x_2 \rangle^4}{24} + \frac{w_2 \langle x - x_3 \rangle^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2$$

Với C_1, C_2 là hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên của dầm:

$$x = 0 ; y = 0 ; x = L ; y = 0$$

Ví dụ 8.7: Cho dầm chịu tải trọng như hình 8.12;

- Xác định phản lực liên kết
- Viết biểu thức lực cắt, mômen uốn của dầm
- Tính độ võng tại giữa dầm, cho $EI = \text{const.}$



Hình 8.12



Giải:

a) Phân lực liên kết:

$$\sum M_B = R_A \cdot L - \frac{wL^5}{20L^3} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{wL}{20} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = R_A + R_B - \frac{wL^4}{4L^3} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{wL}{5} (\uparrow)$$

b) Tải trọng phân bố theo quy luật bậc 3 nên biểu thức mômen uốn và lực cắt có dạng :

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{wx^5}{20L^3}; V(x) = R_A - \frac{wx^4}{4L^3}$$

Thay vào phương trình vi phân độ võng :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = R_A \cdot x - \frac{wx^5}{20L^3}$$

Tích phân hai lần, ta có:

$$EI \frac{dy}{dx} = \theta(x) = R_A \frac{x^2}{2} - \frac{wx^6}{120L^3} + C_1$$

$$EI y = R_A \frac{x^3}{6} - \frac{wx^7}{840L^3} + C_1 x + C_2$$

$$x = 0 ; y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Điều kiện biên:

$$x = L ; y = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{140}$$

c) Thay C_1 , C_2 , R_A và cho $x = L/2$ vào biểu thức của $y(x)$ ta tính được độ võng tại giữa dầm: $y(L/2) = -\frac{17wL^4}{168.256EI} (\downarrow)$

Ví dụ 8.8 : Cho dầm chịu tải trọng như hình 8.13

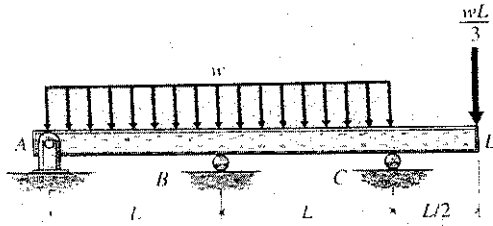
a) Xác định phân lực liên kết;

b) Viết biểu thức của lực cắt, mômen uốn;

c) Tính độ võng tại D, cho $EI = \text{const}$

Giải: Dầm siêu tĩnh (thừa một liên kết đơn), phương trình cân bằng tĩnh học:





Hình 8.13

$$\sum M_C = R_A \cdot 2L + R_B \cdot L - 2wL^2 + \frac{wL^2}{6} = 0$$

$$\sum M_B = R_A \cdot L - R_C \cdot L + \frac{wL^2}{2} = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = R_A + R_B + R_C - 2wL - \frac{wL}{3} = 0$$

Ta áp dụng hàm gián đoạn để viết biểu thức của mômen uốn :

$$M(x) = R_A \cdot x + R_B \langle x - L \rangle + R_C \langle x - 2L \rangle - \frac{wx^2}{2} + \frac{w \langle x - 2L \rangle^2}{2};$$

Đạo hàm $M(x)$ cho ta biểu thức lực cắt:

$$V(x) = R_A + R_B \langle x - L \rangle^0 + R_C \langle x - 2L \rangle^0 - wx + w \langle x - 2L \rangle^1;$$

Tích phân hai lần liên tiếp $M(x)/EI$ ta được biểu thức của độ võng:

$$EIy(x) = R_A \frac{x^3}{6} + R_B \frac{\langle x - L \rangle^3}{6} + R_C \frac{\langle x - 2L \rangle^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + \frac{w \langle x - 2L \rangle^4}{24} + C_1 x + C_2;$$

$$x = 0 ; y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Điều kiện biên : $x = L ; y = 0$

$$x = 2L ; y = 0$$

Hai điều kiện cuối cho ta hệ phương trình đối với R_A, R_B :

$$\begin{cases} R_A \frac{L^3}{6} - \frac{wL^4}{24} + C_1 L = 0 \\ R_A \frac{4L^3}{3} + R_B \frac{L^3}{6} - \frac{2wL^4}{3} + C_1 L = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Kết hợp (a) và (b) cho ta :



$$\begin{cases} R_A \frac{L^3}{6} - \frac{wL^4}{24} + C_1 L = 0 \\ R_A L^3 - \frac{13wL^4}{24} + 2C_1 L = 0 \end{cases} \quad (c)$$

Giải hệ (c) ta tìm được: $R_A = \frac{11wL}{16} (\uparrow); C_1 = -\frac{7wL^3}{96}$ (d)

Thay (d) vào (b) và (a) ta tìm được :

$$R_B = \frac{11wL}{24} (\uparrow); R_C = \frac{19wL}{16} (\uparrow) \quad (e)$$

Với các giá trị tìm được, biểu thức của mômen uốn và lực cắt trên toàn chiều dài dầm được xác định. Độ võng tại điểm D tính theo công thức:

$$y(5L/2) = R_A \cdot \frac{(5L)^3}{48} + R_B \frac{27L^3}{48} + R_C \frac{L^3}{48} - \frac{w(5L)^4}{16 \cdot 24} + \frac{wL^4}{16 \cdot 24} + C_1 \frac{5L}{2}$$

Thay giá trị của R_A, R_B, R_C, C_1 , ta có:

$$y(5L/2) = \frac{17}{64EI} wL^4 (\downarrow)$$

8.6. PHƯƠNG PHÁP MÔMEN DIỆN TÍCH

Trong phần này ta sẽ chỉ ra vai trò của đặc trưng hình học mặt cắt ngang trong việc xác định độ võng, góc xoay tại điểm khảo sát. Xét dầm AB chịu tác dụng của tải trọng bất kỳ (hình 8.14). Ta vẽ biểu đồ của đại lượng M/EI dọc theo chiều dài của dầm, chú ý rằng dạng của biểu đồ giống như của mômen uốn, khi độ cứng của dầm là hằng số. Từ phương trình (8.5), chú ý rằng $dy/dx = \theta$, ta có:

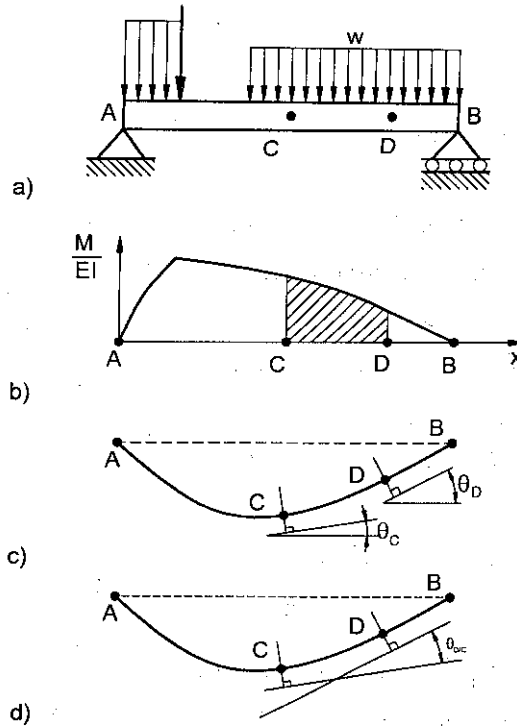
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Hay: $d\theta = \frac{M}{EI} dx$ (8.13)

Xét hai điểm bất kỳ C và D (hình 8.14) và tích phân cả hai vế (8.13) từ

C đến D, ta có: $\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$ (8.14)





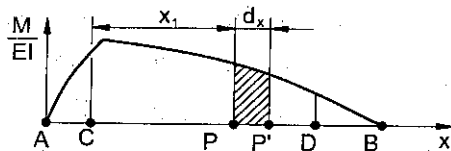
Hình 8.14

Với θ_C , θ_D là độ võng tương ứng tại C và D. Vẽ phải trong (8.14) biểu diễn diện tích hình phẳng giới hạn bởi biểu đồ (M/EI) giữa C và D, còn vẽ trái là góc giữa tiếp tuyến với đường đàn hồi tại hai điểm đó. Ký hiệu góc đó là $\theta_{D/C}$, ta có: $\theta_{D/C} = (\text{diện tích biểu đồ } (M/EI) \text{ giữa C và D})$ (8.15)

Đó chính là **định lý thứ nhất về mômen diện tích**. Bây giờ ta xét hai điểm P và P' trên đoạn CD, cách nhau một khoảng dx (hình 8.15). Tiếp tuyến tại các điểm đó với đường đàn hồi cắt trục thẳng đứng đi qua C một đoạn chắn bằng dt . Do góc xoay $d\theta$ giữa các tiếp tuyến là vô cùng bé nên ta có:

$$dt = x_1 d\theta$$

Thế $d\theta$ từ công thức (8.13) vào, ta được:



Hình 8.15

$$dt = x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (8.16)$$

Tích phân từ C đến D ta có: $t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (8.17)$

Vế trái của biểu thức (8.17) gọi là *độ lệch của tiếp tuyến tại C so với tại D*.

Định lý thứ hai về mômen diện tích $\frac{M}{EI}$
 phát biểu như sau: *Độ lệch của tiếp tuyến $t_{C/D}$ tại C so với tại D bằng mômen tĩnh đối với trục thẳng đứng đi qua điểm C của diện tích biểu đồ (M/EI) giới hạn giữa C và D:*

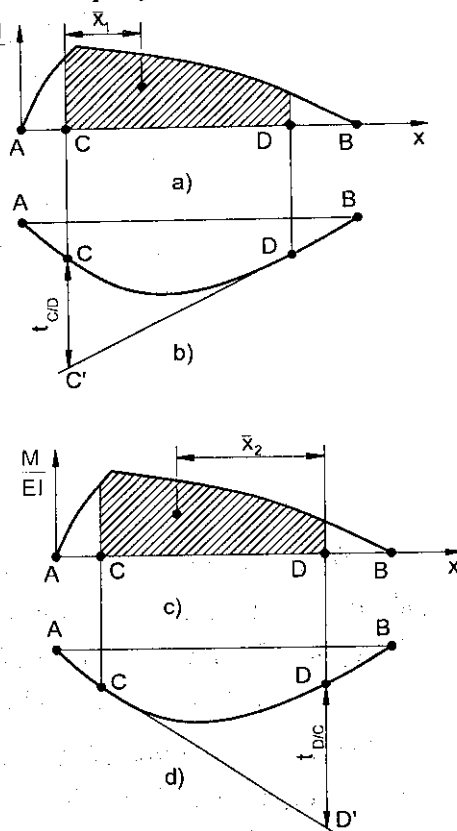
$$t_{C/D} = (\text{diện tích biểu đồ } M/EI \text{ giữa C và D}) \cdot \bar{x}_1 \quad (8.18)$$

Trong đó : \bar{x}_1 là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích biểu đồ M/EI đến trục thẳng đứng đi qua điểm C (hình 8.16 a, b).

Tương tự, ta có:

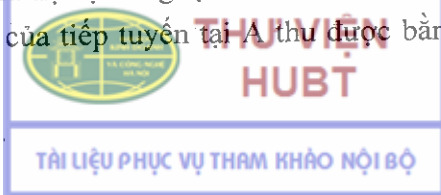
$$t_{D/C} = (\text{diện tích biểu đồ } M/EI \text{ giữa C và D}) \cdot \bar{x}_2 \quad (8.19)$$

Với \bar{x}_2 là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích biểu đồ M/EI đến trục thẳng đứng đi qua điểm D (hình 8.16c,d).



Hình 8.16

Phương pháp mômen diện tích có thể được sử dụng để xác định *độ võng lớn nhất của dầm*. Đối với dầm đặt trên hai gối tựa, hoặc có đầu thừa chịu tải trọng không đối xứng, độ võng lớn nhất thường không xảy ra tại điểm giữa dầm. Do đó để xác định độ võng lớn nhất, ta cần tìm vị trí của điểm K trên dầm sao cho tiếp tuyến với đường đàn hồi tại K có phương nằm ngang, sau đó tính giá trị độ võng tại đó. Nếu ta chọn gối tựa tại A làm góc tọa độ, góc xoay θ_A của tiếp tuyến tại A thu được bằng cách tính sự chênh



lệch độ dốc $t_{B/A}$ của gối tựa B so với A, rồi chia đại lượng đó cho khoảng cách L giữa hai gối tựa. Do góc xoay tại K bằng không, ta có:

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = -\theta_A \quad (8.20)$$

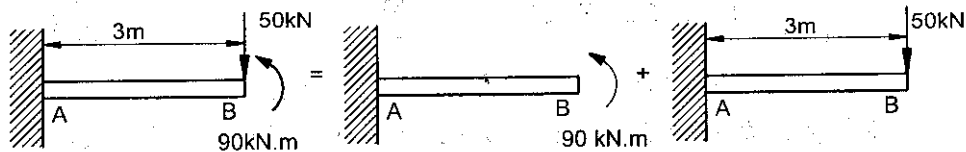
Theo định lý thứ nhất về mômen diện tích, ta rút ra vị trí của K có thể xác định bằng cách tính diện tích của biểu đồ (M/EI) và cho $\theta_{K/A} = -\theta_A$

Ta thấy rằng giá trị lớn nhất của độ võng $|y_{\max}|$ bằng sự chênh lệch độ $t_{A/K}$ của gối tựa A so với điểm K, từ đó ta có thể tìm $|y_{\max}|$ bằng cách tính mômen tĩnh đối với trục thẳng đứng đi qua điểm A của diện tích biểu đồ giữa A và K.

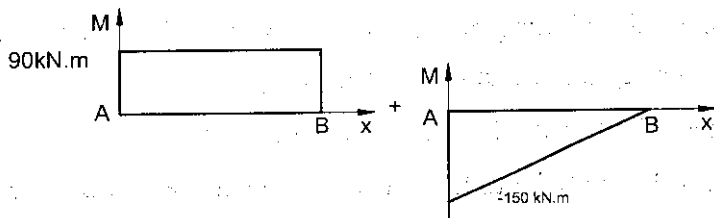
Thiết kế các bộ phận kết cấu chịu lực bao gồm việc đánh giá cả điều kiện bền và điều kiện cứng – có nghĩa là tỷ số giữa độ võng lớn nhất so với chiều dài thanh không được vượt quá giá trị cho phép.

Ví dụ 8.9: Xác định góc xoay và độ võng tại đầu B của dầm công-xôn chịu lực như hình 8.17. Biết độ cứng EI của dầm là hằng số.

Giải: Ta phân tích biểu đồ mômen uốn thành hai biểu đồ do từng yếu tố ngoại lực gây nên (hình 8.17 – 8.18).



Hình 8.17



Hình 8.18

Sau đó ta vẽ biểu đồ (M/EI) biểu diễn trên hình 8.19:

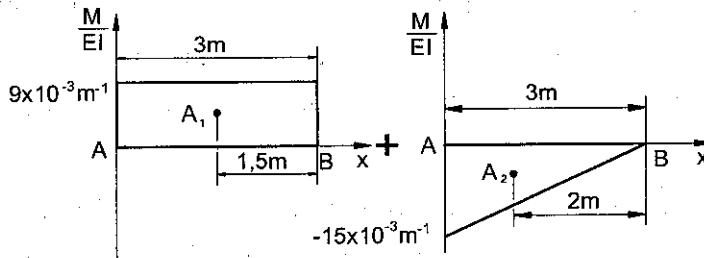
Áp dụng định lý thứ nhất về mômen diện tích, nhớ rằng $\theta_A = 0$, ta có:



$$\theta_B = \theta_{B/A} = A_1 + A_2 = (9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1})(3\text{m}) - \frac{1}{2}(15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1})(3\text{m}) = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

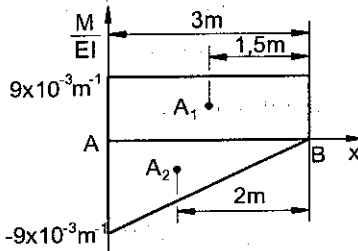
Áp dụng định lý thứ hai về mômen diện tích, ta tính mômen tĩnh của từng diện tích đối với trục thẳng đứng đi qua điểm B:

$$y_B = t_{B/A} = A_1(1,5\text{m}) + A_2(2\text{m}) = (27 \cdot 10^{-3})(1,5\text{m}) - (22,5 \cdot 10^{-3})(2\text{m}) = 40,5 \text{ mm} - 45 \text{ mm} = -4,5 \text{ mm}$$

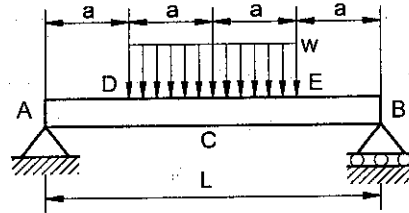


Hình 8.19

Để thuận tiện ta có thể ghép hai biểu đồ (M/EI) như trên hình 8.20.



Hình 8.20



Hình 8.21

Ví dụ 8.10: Cho dầm AB chịu lực như hình 8.21, xác định góc xoay tại các gối đỡ và giá trị độ võng lớn nhất.

Giải: Do tính đối xứng nên ta có tiếp tuyến tại điểm giữa C của dầm là đường nằm ngang, ta sẽ sử dụng điểm C làm gốc tọa độ, và có: $|y_{\max}| = t_{A/C}$.

Mặt khác: do $\theta_C = 0$, nên: $\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A$; $\theta_A = -\theta_{C/A}$

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học của dầm, ta có: $R_A = R_B = w \cdot a$

Tiếp theo, ta vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của đoạn AC (hình 8.22a).

Diện tích và vị trí trọng tâm của hình tam giác và của parabol như sau:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2a) \cdot \left(\frac{2wa^2}{EI}\right) = \frac{2wa^3}{EI}; A_2 = -\frac{1}{3}(a) \cdot \left(\frac{wa^2}{2EI}\right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$



Áp dụng định lý thứ nhất về mômen diện tích, ta có:

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

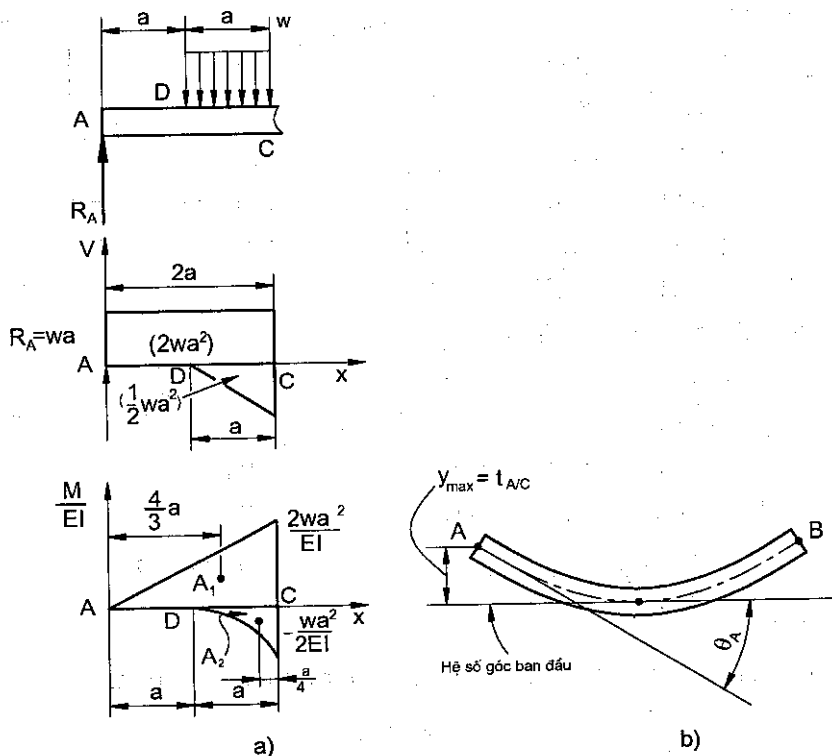
Nhớ rằng $a = \frac{1}{4}L$; và $\theta_A = -\theta_{C/A}$ (hình 8.22b) ta có:

$$\theta_A = -\frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

Áp dụng định lý thứ hai về mômen diện tích, ta có:

$$t_{A/C} = A_1 \frac{4a}{3} + A_2 \frac{7a}{4} = \frac{2wa^3}{EI} \frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right) \frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2048EI}$$

Từ đó ta có: $|y_{\max}| = t_{A/C} = \frac{19wL^4}{2048EI}$.



Hình 8.22a

a) Biểu đồ lực cắt và mômen uốn; b) Dầm bị biến dạng.

Ví dụ 8.11: Các thanh AD và DB được hàn với nhau và tạo thành dầm công-xôn ADB (hình 8.23). Biết độ cứng của đoạn AD là EI, của đoạn DB là 2EI; xác định góc xoay và độ võng tại A.

Giải: Ta vẽ biểu đồ M/EI của dầm do các lực P gây nên. Do góc xoay tại đầu ngàm B bằng không nên ta chọn điểm đó làm gốc tọa độ. Mặt khác $\theta_B = 0$ và $y_B = 0$, ta có:

$$\theta_A = -\theta_{B/A}; y_A = t_{A/B}$$

Góc xoay tại A: Phân tích biểu đồ M/EI thành ba hình tam giác, diện tích mỗi hình là:

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{Pa}{2EI} a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \frac{3Pa}{2EI} a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$

Áp dụng định lý thứ nhất về mômen diện tích, ta có:

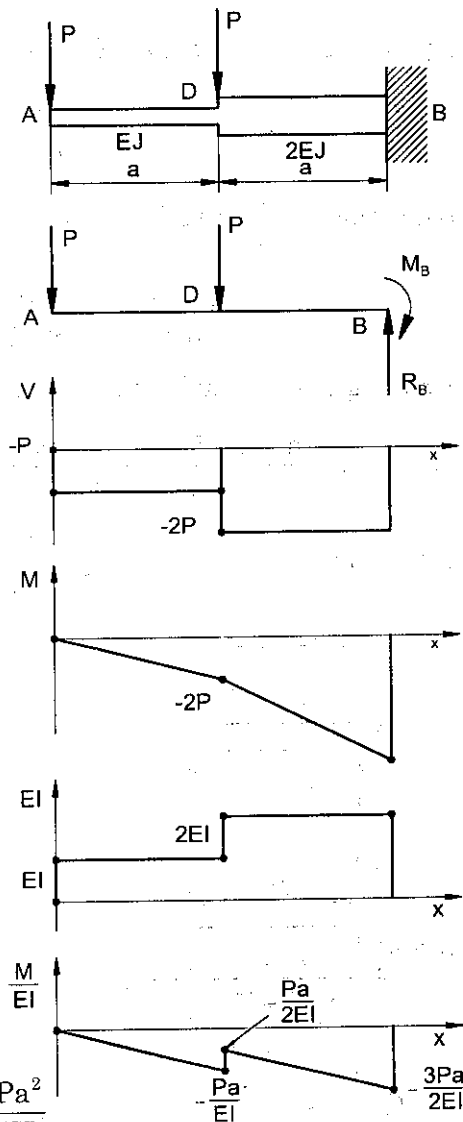
$$\begin{aligned} \theta_{B/A} &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI} \end{aligned}$$

Vậy: $\theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI}$ (ngược chiều kim đồng hồ).

Độ võng tại A: Áp dụng định lý thứ hai về mômen diện tích, ta có:

$$y_A = A_1 \left(\frac{2}{3}a\right) + A_2 \left(\frac{4}{3}a\right) + A_3 \left(\frac{5}{3}a\right)$$

$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right) \frac{2}{3}a + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right) \frac{4}{3}a + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right) \frac{5}{3}a = -\frac{23Pa^3}{12EI}$$

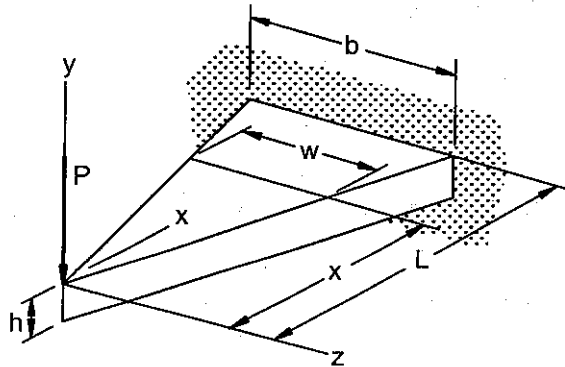


Hình 8.23

$$\text{Hay } y_A = \frac{23Pa^3}{12EI} \downarrow$$

Ví dụ 8.12: Cho dầm có mặt cắt ngang thay đổi như hình 8.24, chịu lực P tại đầu tự do. Xác định :

- Độ võng, góc xoay tại đầu tự do;
- Độ võng tại điểm giữa dầm.



Hình 8.24

Giải:

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa tại hoành độ

$$x \text{ bằng: } I = \frac{wh^3}{12} = \frac{(bx/L)h^3}{12} = \frac{bh^3}{12} \left(\frac{x}{L}\right) = I_L \left(\frac{x}{L}\right)$$

Trong đó: w là bề rộng của mặt cắt ngang tại hoành độ x, I_L là mômen quán tính của mặt cắt tại ngàm. Phương trình vi phân độ võng có dạng:

$$E \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{I} = -\frac{Px}{I} = -\frac{Px}{I_L(x/L)} = -\frac{PL}{I_L}$$

Tích phân liên tiếp hai lần hai vế ta có:

$$EI_L \frac{dy}{dx} = \theta = -PLx + C_1$$

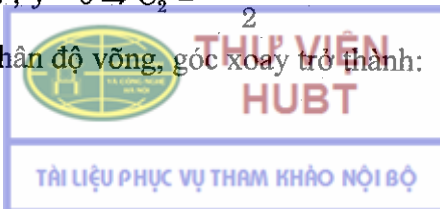
$$EI_L y = -PL \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Từ điều kiện biên ta tìm được các hằng số tích phân:

$$x = L ; \theta = 0 \Rightarrow C_1 = PL^2$$

$$x = L ; y = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{PL^3}{2}$$

Phương trình vi phân độ võng, góc xoay trở thành:



$$EI_L \frac{dy}{dx} = -PLx + PL^2$$

$$EI_L y = -PL \frac{x^2}{2} + PL^2 x - \frac{PL^3}{2}$$

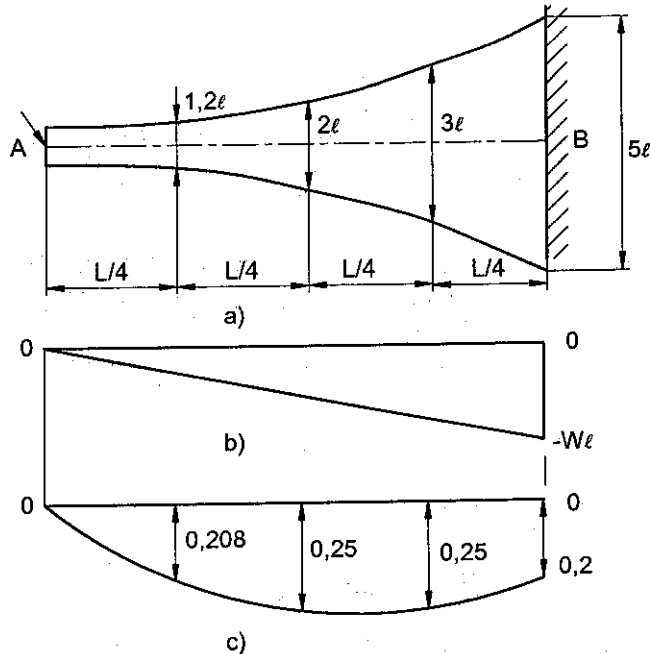
Tại đầu tự do, ta có: $\theta = \frac{PL^2}{EI_L} = \frac{12PL^2}{Ebh^3}$; $y = \frac{PL^3}{2EI_L} = \frac{6PL^3}{Ebh^3} (\downarrow)$

Ứng suất pháp lớn nhất trên dầm tại khoảng cách x:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{Px(\frac{h}{2})}{\frac{bh^3}{12}(\frac{x}{L})} = 6 \frac{PL}{bh^2}$$

Ứng suất này không đổi và bằng giá trị ứng suất lớn nhất ở ngàm, dầm còn gọi là *dầm chống uốn đều*

Ví dụ 8.13: Xác định độ võng tại đầu tự do của dầm công-xôn có mặt cắt ngang thay đổi, chịu tải trọng tập trung W tại đầu tự do như hình 8.25a.



Hình 8.25

Giải : Ta vẽ các biểu đồ mômen uốn M và biểu đồ M/I (hình 8.25b,c). Lấy mômen tĩnh của diện tích biểu đồ M/I đối với trục thẳng đứng đi qua A, chú ý



rằng độ võng và góc xoay tại B bằng không. Do biểu đồ M/I tính bằng số, ta có thể sử dụng bảng 8.1 để tính tích phân, áp dụng công thức Simpsons, ta có:

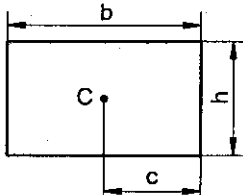
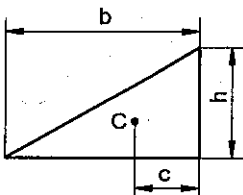
Bảng 8.1. Tích phân số mômen diện tích biểu đồ M/I đối với điểm A

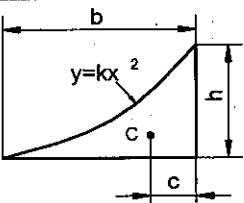
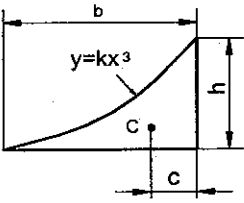
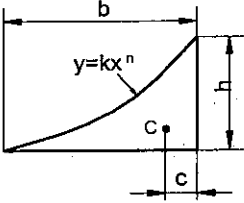
Toạ độ	M/I	z	zM/I	SM	F(zM/I)
1	0	0	0	1	0
2	0,208WL/I	L/4	0,052WL ² /I	4	0,208WL ² /I
3	0,25 WL/I	L/2	0,125WL ² /I	2	0,25WL ² /I
4	0,25 WL/I	3L/4	0,188WL ² /I	4	0,752WL ² /I
5	0,2 WL/I	L	0,2WL ² /I	1	0,2WL ² /I
					1,41WL ² /I

Từ bảng 8.1 ta có: $y_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \cdot wL^2 / I$ hay $y_A = 0,1175wL^3 / I$

Phương pháp tính mômen diện tích cần sử dụng bảng tính diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình thường gặp (xem bảng 8.2).

Bảng 8.2 Diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình đơn giản thường gặp

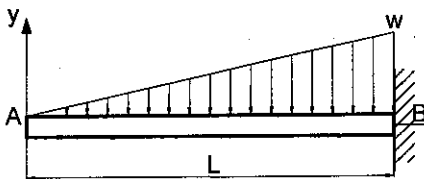
Thứ tự	Hình dạng mặt cắt	Diện tích	Vị trí trọng tâm
1		bh	b/2
2		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{3}b$

Thứ tự	Hình dạng mặt cắt	Diện tích	Vị trí trọng tâm
3		$\frac{1}{3}bh$	$\frac{1}{4}b$
4		$\frac{1}{4}bh$	$\frac{1}{5}b$
5		$\frac{bh}{(n+1)}$	$\frac{b}{(n+2)}$

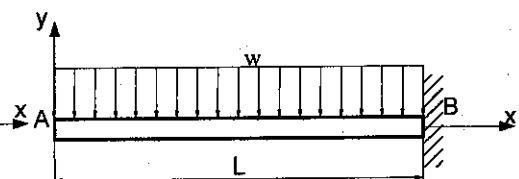
BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1 và 8.2. Cho dầm chịu tải trọng như hình BT8.1 – 8.2, xác định:

- Phương trình đường đàn hồi của dầm;
- Độ võng tại đầu tự do;
- Góc xoay tại đầu tự do.



Hình BT8.1

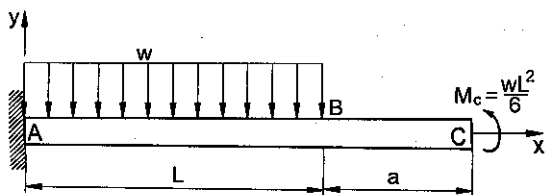


Hình BT8.2

8.3. Cho dầm chịu tải trọng như hình BT8.3, xác định:

- Phương trình đường đàn hồi đoạn AB của dầm.
- Độ võng tại B.
- Góc xoay tại B.

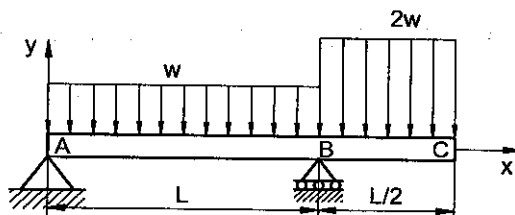




Hình BT 8.3

8.4. Cho dầm chịu tải trọng như hình BT8.4, xác định:

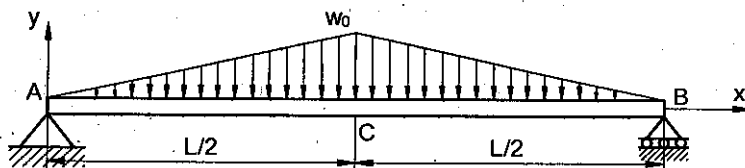
- Phương trình đường đàn hồi đoạn AB của dầm;
- Góc xoay tại A;
- Góc xoay tại B.



Hình BT 8.4

8.5. Dầm AB có mặt cắt ngang chữ I (hình BT 8.5) ký hiệu S 305×61, chịu tải trọng $w_0 = 4\text{kN/m}$, $L = 9\text{m}$, và $E = 29 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$, xác định:

- Góc xoay tại A;
- Độ võng tại C.

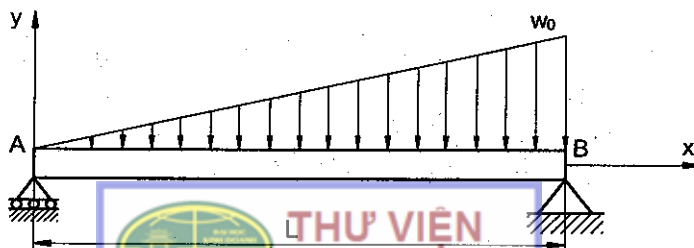


Hình BT8.5

8.6. Cho dầm chịu tải trọng như hình BT 8.6.

a) Biểu diễn độ lớn và vị trí đạt được của độ võng lớn nhất theo các thông số w_0 , L , E , và I .

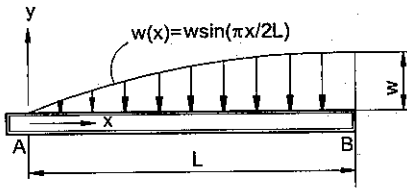
b) Tính giá trị độ võng lớn nhất biết dầm AB có mặt cắt ngang chữ T ký hiệu WT152×89 ; $w_0 = 4,5\text{kN/m}$, $L = 18\text{m}$, $E = 29 \times 10^6 \text{N/cm}^2$.



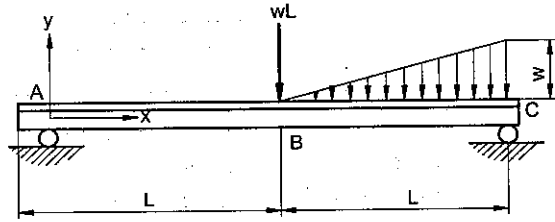
THƯ VIỆN
HUST

Hình BT8.6

8.7. Xác định độ võng và góc xoay tại A của dầm công-xôn (hình BT8.7), biết $EI = \text{const}$.



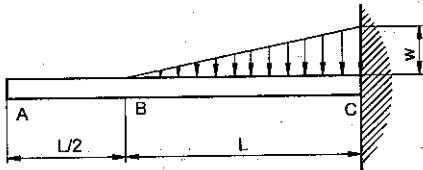
Hình BT8.7



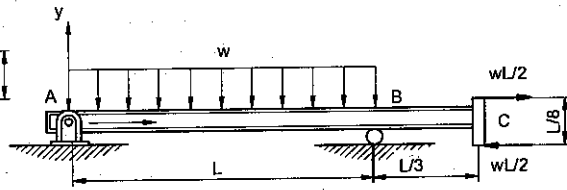
Hình BT8.8

8.8. Xác định độ võng và góc xoay tại điểm giữa B của dầm chịu tải trọng như hình BT 8.8, biết $EI = \text{const}$.

8.9. Xác định độ võng tại A và B của dầm công-xôn (hình BT8.9), biết $EI = \text{const}$.



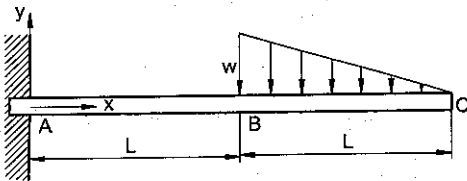
Hình BT8.9



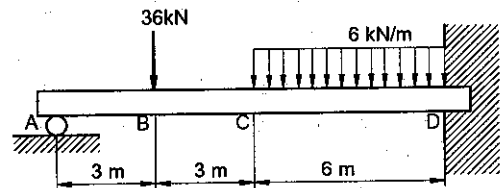
Hình BT8.10

8.10. Xác định độ võng và góc xoay tại C của dầm ABC (hình BT7.10), biết $EI = \text{const}$.

8.11. Xác định độ võng và góc xoay tại C của dầm công-xôn (hình BT8.11), biết $EI = \text{const}$.



Hình BT8.11

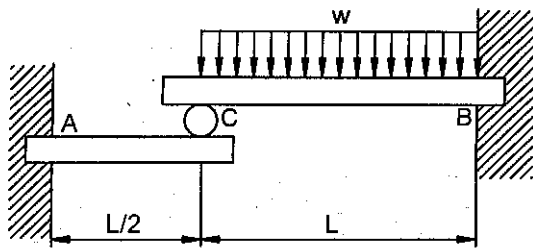


Hình BT8.12

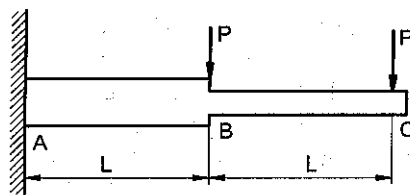
8.12. Xác định độ võng tại B và các phản lực liên kết của dầm ABCD (hình BT8.12), biết $EI = \text{const}$.

8.13. Hai dầm AC và CB đặt gối lên nhau tại C (hình BT8.13). Xác định độ võng tại C của dầm AC, biết độ cứng của hai dầm như nhau ($EI = \text{const}$).





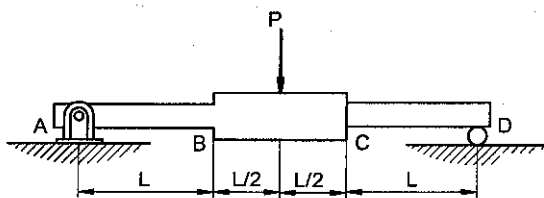
Hình BT8.13



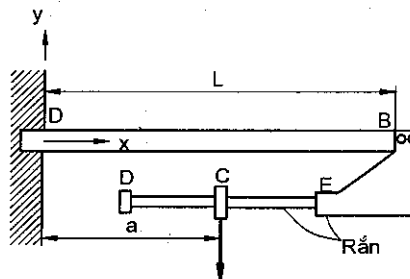
Hình BT8.14

8.14. Dầm ABC có mặt cắt ngang thay đổi (hình BT 8.14), biết $(EI)_{AB} = 2(EI)_{BC}$, xác định độ võng tại điểm C và B.

8.15. Dầm ABCD có mặt cắt ngang thay đổi, biết $(EI)_{BC} = 2(EI)_{AB} = 2(EI)_{CD}$, xác định độ võng tại điểm đặt lực P (hình BT 8.15).



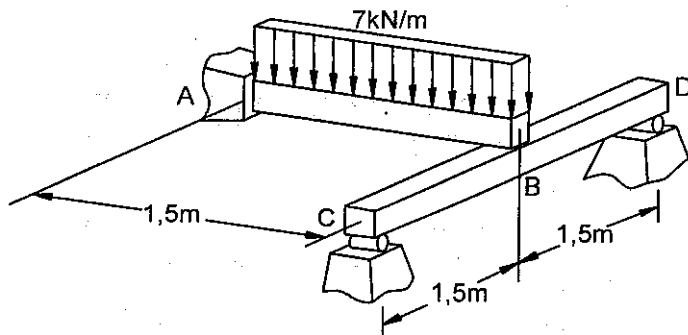
Hình BT8.15



Hình BT8.16

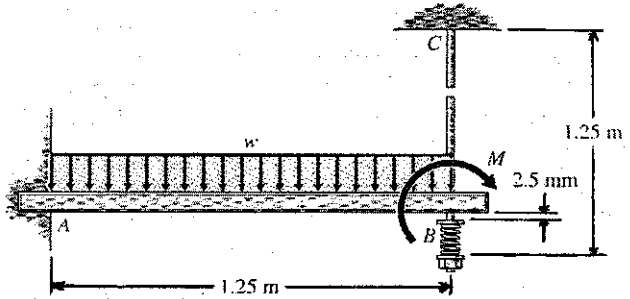
8.16. Dầm AB được nối với thanh DE tuyệt đối cứng bằng bản cứng tuyệt đối EB. Lực P tác dụng tại khoảng cách a đến ngàm A (hình BT8.16). Xác định chuyển vị tại điểm C, biết $(EI)_{AB}$ bằng hằng số.

8.17. Dầm công-xôn AB đặt gối lên dầm CD như hình BT8.17, biết độ cứng EI của hai dầm như nhau, xác định độ võng tại điểm B.



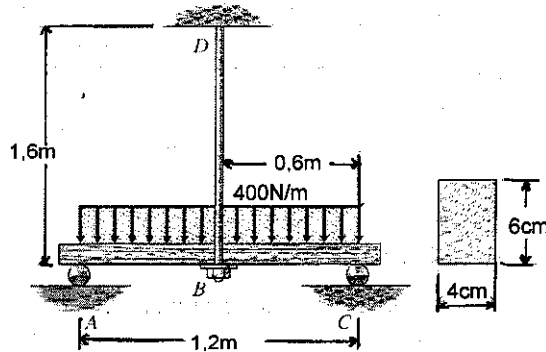
Hình BT8.17

8.18. Thanh CB có diện tích mặt cắt ngang 100mm^2 bằng hợp kim nhôm nối với dầm AB cùng vật liệu (hình BT 8.18), mômen quán tính đối với trục trung hòa $I = 40.10^6\text{mm}^4$. Trước khi chịu ngoại lực ($M = 9\text{kN.m}$ và $w = 90\text{kN/m}$), giữa phần trên lò xo và đáy của dầm có khe hở $2,5\text{mm}$. Biết hợp kim nhôm có $E = 70\text{GPa}$, và độ cứng lò xo bằng 1000kN/m , tính ứng suất kéo trong thanh CB.



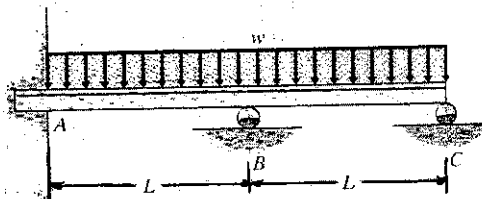
Hình BT8.18

8.19. Thanh BD làm bằng hợp kim nhôm có $E = 70\text{GPa}$ nối với dầm AC bằng thép ($E = 200\text{GPa}$) (hình BT8.19), xác định độ võng của điểm giữa C của dầm.



Hình BT8.19

8.20. Xác định góc xoay tại gối tựa B và C của dầm chịu tải trọng như hình BT8.20, cho $EI = \text{const}$.



Hình BT8.20

Chương 9

ỔN ĐỊNH

9.1. MỞ ĐẦU

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu và tính toán ổn định của kết cấu chịu nén dọc trục. Đó là tính chất của kết cấu có thể *khôi phục lại trạng thái cân bằng ban đầu*, sau khi đã bỏ ngoại lực tác dụng đi. Giá trị nhỏ nhất của lực nén lên thanh làm cho nó bắt đầu bị mất ổn định, gọi là *lực tới hạn*. Độ lớn của lực tới hạn không chỉ phụ thuộc vào vật liệu, kích thước và hình dạng của mặt cắt ngang, mà còn phụ thuộc vào điều kiện liên kết trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Trong trường hợp vật liệu của thanh làm việc trong miền đàn hồi – tức là tuân theo định luật Húc, lực tới hạn được xác định theo công thức Ô-le, còn trong trường hợp làm việc ngoài miền đàn hồi, sẽ áp dụng công thức cát tuyến.

9.2. CÔNG THỨC Ô-LE ĐỐI VỚI THANH LIÊN KẾT KHỚP TẠI HAI ĐẦU

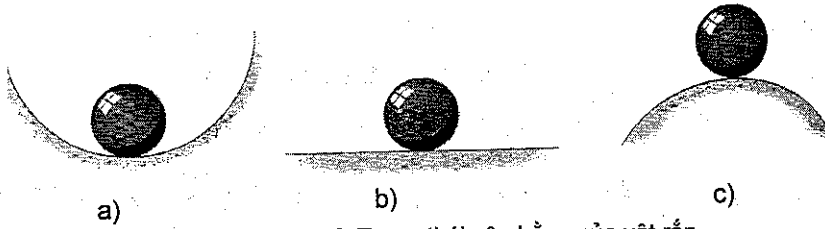
Ta thấy khi thanh chịu nén bởi một lực có độ lớn nhất định, nó có thể bị uốn cong thay vì giữ vị trí thẳng đứng ban đầu (hình 9.1), ta gọi trạng thái đó là mất ổn định. Điều này tương tự như khi vật rắn có thể có các trạng thái *cân bằng ổn định* (hình 9.2a), *cân bằng phiếm định* (hình 9.2b), hay *cân bằng không ổn định* (hình 9.2c).

Xét thanh AB chiều dài L, hai đầu liên kết khớp, chịu lực nén đúng tâm P (hình 9.3a). Giả thiết kích thước mặt cắt ngang được chọn sao cho ứng suất trên mặt cắt ngang nhỏ hơn ứng suất cho phép, và biến dạng của thanh nằm trong giới hạn nhất định, khi đó thanh được coi là thiết kế đúng tiêu chuẩn.

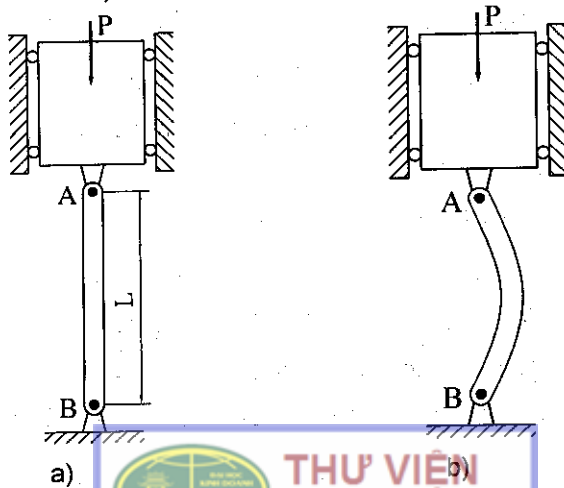




Hình 9.1. Thí nghiệm về mất ổn định của thanh khi chịu nén



Hình 9.2. Trạng thái cân bằng của vật rắn
a) Ổn định; b) Phiếm định; c) Mất ổn định.



a) b)
Hình 9.3

Giả sử thanh bắt đầu bị uốn cong bởi lực nén tới hạn P_{cr} . Với $P > P_{cr}$, thanh có hình dạng lệch đi so với vị trí cân bằng ban đầu (hình 9.3b).

Xét cân bằng của đoạn thanh có khoảng cách x đến đầu A, ta có $M = -P \cdot y$, phương trình vi phân độ võng có dạng:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad (9.1)$$

$$\text{Hay: } \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (9.2)$$

Đây là phương trình vi phân thuần nhất tầm thường bậc hai, đặt:

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (9.3)$$

Ta viết lại (9.2) dưới dạng:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \quad (9.4)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = A \sin px + B \cos px \quad (9.5)$$

Các hằng số tích phân A và B xác định từ điều kiện liên kết ở hai đầu thanh:

$$x = 0, y = 0, \text{ suy ra } B = 0;$$

$x = L, y = 0$, hay $pL = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), thay p vào (9.3), ta có:

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EI}{L^2} \quad (9.6)$$

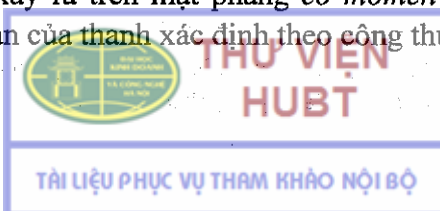
Giá trị nhỏ nhất của P với $n = 1$ chính là lực tới hạn :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9.7)$$

Công thức này còn gọi là công thức Ô-le (Leonard Euler.1707–1783). Thay $B = 0$ vào (9.5) ta có phương trình đường đàn hồi của thanh sau khi

$$\text{mất ổn định: } y = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (9.8)$$

Chú ý rằng với các mặt cắt ngang tròn, vuông hay đa giác đều, mômen quán tính của mặt cắt là như nhau đối với các trục trung tâm. Đối với các mặt cắt hình dạng khác, ta cần tính lực tới hạn bằng cách đặt $I = I_{\min}$ vì hiện tượng mất ổn định xảy ra trên mặt phẳng có mômen quán tính chính nhỏ nhất. Ứng suất tới hạn của thanh xác định theo công thức:

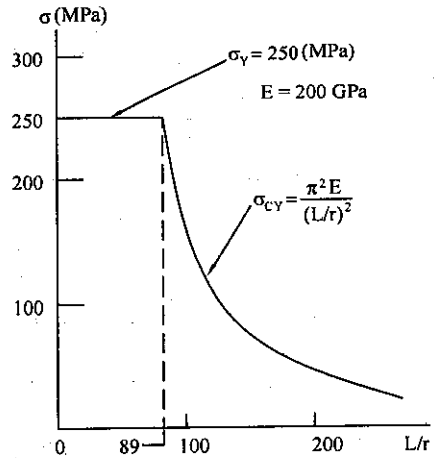


$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}; \quad (9.9)$$

Trong đó: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ gọi là bán kính quán tính của mặt cắt ngang (9.10)

Đại lượng L/r gọi là độ mảnh của thanh.

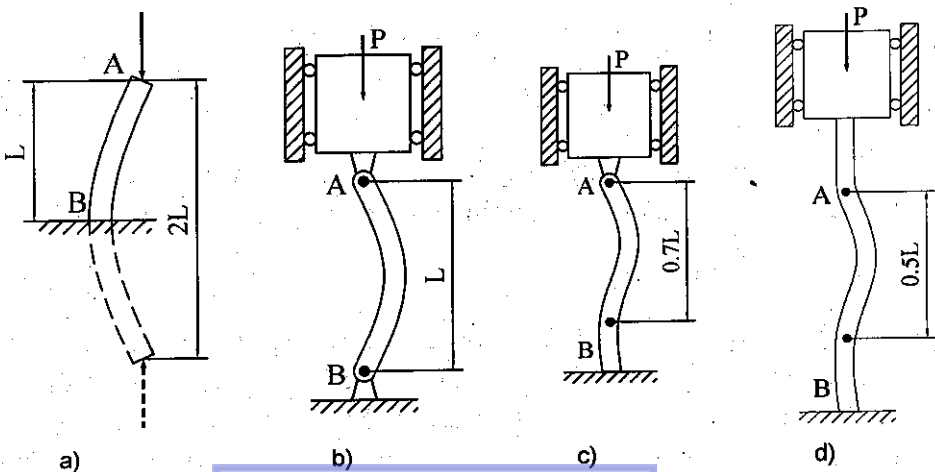
Bằng cách vẽ đồ thị ứng suất tới hạn σ_{cr} phụ thuộc độ mảnh của thanh (hình 9.4), ta thấy đối với vật liệu dẻo (thép...) nếu giá trị của σ_{cr} lớn hơn giới hạn chảy σ_y , thanh sẽ không nằm trong miền đàn hồi, tức là biến dạng của thanh không còn nhỏ nữa và ta không thể sử dụng phương trình vi phân (9.1), do đó công thức (9.9) sẽ không còn đúng nữa.



Hình 9.4. Ứng suất tới hạn theo công thức O'le

9.3. MỞ RỘNG CÔNG THỨC O'LE VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÁC NHAU

Trên hình 9.5 biểu diễn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh chịu nén.



Hình 9.5
a) Một đầu ngàm, một đầu tự do; b) Hai đầu liên kết khớp; c) Một đầu ngàm, một đầu khớp; d) Một đầu ngàm, đầu kia ngàm trượt.

Nếu thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do (hình 9.5a), ta nhận xét thấy biến dạng giống như phần trên của thanh liên kết khớp tại hai đầu (hình 9.5b). Lực tới hạn có thể xác định bằng cách sử dụng công thức O-le đối với thanh có chiều dài bằng $2L$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (9.11)$$

Ứng suất tới hạn xác định theo công thức:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r)^2} \quad (9.12)$$

Trong đó L_e gọi là chiều dài quy đổi của thanh $L_e = 2L$.

Xét thanh có liên kết ngàm tại A và ngàm trượt tại B, chịu nén bởi lực P (hình 9.5d). Từ tính đối xứng ta thấy phản lực tại A và B như nhau, và không có sự trượt tại điểm giữa của thanh. Do đó, phần trên của thanh sẽ không có điểm uốn, và phần ở giữa có thể được coi như là thanh có liên kết khớp tại hai đầu. Chiều dài quy đổi của thanh được coi là bằng $L_e = L/2$.

Trường hợp thanh chịu ngàm tại B và liên kết khớp đơn tại A (hình 9.5c), ký hiệu V là lực cắt tại A, mômen uốn tại mặt cắt ở khoảng cách x đến A có dạng sau:

$$M = -P.y - V.x$$

Thay vào phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y - \frac{V}{EI} x \quad (9.13)$$

Ký hiệu như (9.3), ta có phương trình vi phân không thuần nhất :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = -\frac{V}{EI} x \quad (9.14)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$y = A \sin px + B \cos px - \frac{V}{EI} x \quad (9.15)$$

Sử dụng điều kiện biên: $x = 0, y = 0$, từ đó $B = 0$; $x = L, y = 0$, ta có :

$$A \sin pL = \frac{V}{P} \quad (9.16)$$



Mặt khác, tại ngàm góc xoay bằng không : $x = L$; $\frac{dy}{dx} = 0$, ta có:

$$A p \cos pL = \frac{V}{P} \quad (9.17)$$

$$\text{Chia (9.16) cho (9.17) ta được : } \tan pL = pL \quad (9.18)$$

Giải phương trình siêu việt trên bằng phương pháp chia đôi khoảng nghiệm (hoặc bằng đồ thị), ta tìm được giá trị nhỏ nhất của pL là : $pL = 4,4934$. Thay giá trị của p vào (9.3), ta thu được :

$$P_{cr} = \frac{20,19EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (9.19)$$

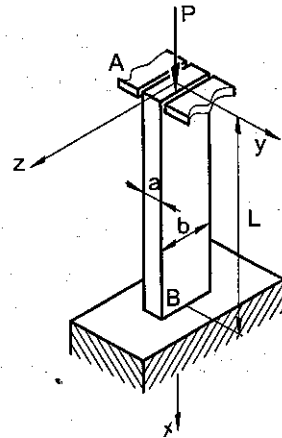
Với $L_e = 0,699L \approx 0,7L$.

Ví dụ 9.1: Thanh bằng nhôm chiều dài L , mặt cắt ngang chữ nhật được ngàm tại B và chịu lực nén đúng tâm P tại đầu tự do A (hình 9.6). Hai tấm tròn được gắn xung quanh đầu A để hạn chế chuyển vị trong mặt phẳng thẳng đứng đối xứng, nhưng cho phép có thể chuyển vị trong mặt phẳng ngang.

a) Xác định tỷ số a/b của các cạnh mặt cắt ngang tương ứng với thiết kế về ổn định hiệu quả nhất.

b) Chọn mặt cắt ngang của thanh có hiệu quả nhất, biết: $L = 200\text{cm}$, $E = 10,1 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$, $P = 5\text{kN}$, hệ số an toàn bằng 2,5.

Giải : Đây là thanh có điều kiện liên kết ở hai đầu như hình 9.5d, ta có chiều dài quy đổi $L_e = 0,7L$. Các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang :



Hình 9.6

$$A = ab; I_{\min} = I_x = \frac{1}{12} ba^3 ; r_z = r = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

Độ mảnh của thanh trong mặt phẳng xy xác định theo công thức:

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0,7L}{a / \sqrt{12}}$$

Độ mảnh của thanh trong mặt phẳng xz xác định theo công thức :

$L_e = 2L$, bán kính quán tính tương ứng r_y bằng $b / \sqrt{12}$. Do đó :

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

a) Thiết kế thanh tối ưu nhất : Ta có ứng suất tới hạn trong hai dạng mất ổn định của thanh phải bằng nhau, hay các tỷ lệ của các độ mảnh tính ở trên phải bằng nhau:

$$\frac{0,7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

Giải theo tỷ lệ a/b, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{0,7}{2} = 0,35$$

b) Kết quả bằng số: Với hệ số an toàn F.S = 2,5, ta có :

$$P_{cr} = (F.S) P = 2,5.5 = 12,5 \text{ (kN)}$$

Thay thế a = 0,35 b, ta có diện tích mặt cắt ngang A = 0,35b² và:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{12500N}{0,35b^2}$$

Thay L = 200cm ta có : $\frac{L_e}{r_y} = \frac{1386}{b}$. Thế vào công thức (9.12), ta thu được:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r_y)^2} = \frac{12500N}{0,35b^2} = \frac{\pi^2 (10,1.10^6 N / \text{cm}^2)}{(1386 / b)^2}$$

Suy ra b = 16,20cm. Từ đó a = 0,35b = 5,67cm.

9.4. NÉN LỆCH TÂM. CÔNG THỨC CÁT TUYẾN

Ta thấy rằng lực P tác dụng lên thanh không bao giờ là tuyệt đối đúng tâm, ký hiệu e là độ lệch tâm (hình 9.7), ta thay lực nén lệch tâm bằng lực dọc trục và mômen uốn M_A = P.e. Tại điểm Q cách đầu A khoảng cách x, ta có mômen uốn:

$$M = -P.y - M_A = -P.y - P.e \quad (9.20)$$

Thay M vào vế phải của (9.1), ta có:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI} \quad (9.21)$$



Đặt $p^2 = \frac{P}{EI}$ giống như trước, ta có :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \quad (9.22)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên là:

$$y = A \sin px + B \cos px - e \quad (9.23)$$

Từ điều kiện biên ta xác định các hằng số tích phân:

$$x = 0, y = 0 \text{ từ đó có } B = e;$$

$$x = L, y = 0, \text{ hay: } A \sin pL = e(1 - \cos pL)$$

Chú ý theo công thức: $\sin pL = 2 \sin \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$;

$$\text{Và: } 1 - \cos pL = 2 \sin^2\left(\frac{pL}{2}\right)$$

$$\text{Cuối cùng ta thu được: } A = e \tan\left(\frac{pL}{2}\right)$$

Phương trình đường đàn hồi của thanh có dạng :

$$y = e \left(\tan\left(\frac{pL}{2}\right) \sin px + \cos px - 1 \right) \quad (9.24)$$

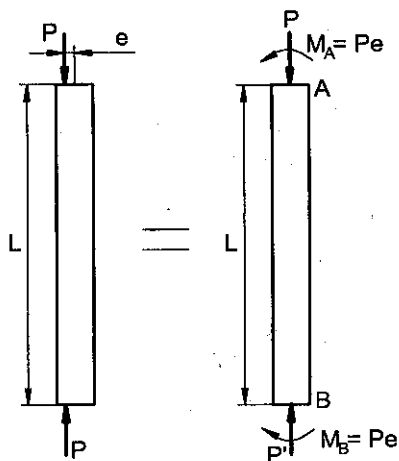
Độ võng lớn nhất đạt được tại $x = L/2$:

$$y_{\max} = e \left(\tan \frac{pL}{2} \sin \frac{pL}{2} + \cos \frac{pL}{2} - 1 \right) = e \left(\frac{\sin^2 \frac{pL}{2} + \cos^2 \frac{pL}{2}}{\cos \frac{pL}{2}} - 1 \right)$$

$$= e \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (9.25)$$

$$\text{Đại lượng đó tiến đến vô cùng lớn khi: } \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (9.26)$$

$$\text{Giải theo } P, \text{ ta có: } P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9.27)$$



Hình 9.7

Biểu thức trên giống như ta đã nhận được trong mục 9.2 đối với thanh chịu nén đúng tâm. Giải (9.27) đối với độ cứng EI và thay vào (9.25), ta có độ võng lớn nhất của thanh:

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1 \right) \quad (9.28)$$

Chú ý: Khi tính hàm $\sec x = 1/\cos x$ cần thay x tính bằng độ chứ không phải bằng radian.

Ứng suất pháp lớn nhất đạt được trên mặt cắt ngang có mômen uốn lớn nhất, có nghĩa là trên mặt cắt tại điểm giữa C:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} c}{I} \quad (9.29)$$

Trong đó c là khoảng cách lớn nhất đến trục trung hoà z của mặt cắt ngang.

Chú ý rằng: $M_{\max} = P(y_{\max} + e)$ và $I = A.r^2$, ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\max} + e)c}{r^2} \right] \quad (9.30)$$

Ta có thể biểu diễn dưới dạng khác bằng cách thay y_{\max} từ (9.28) vào (9.30):

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right] \quad (9.31)$$

$$\text{Hay: } \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} \right] \quad (9.32)$$

Phương trình thu được có thể áp dụng đối với bất kỳ điều kiện liên kết nào của thanh, với các giá trị tương ứng của lực tới hạn (xem mục 9.3).

Từ (9.31) ta có thể viết:

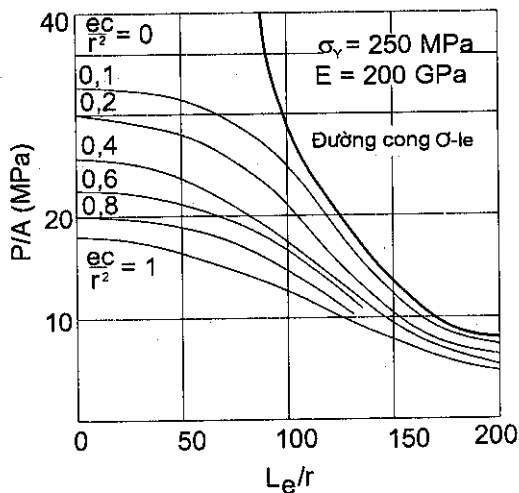
$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)} \quad (9.33)$$

Trong đó chiều dài quy đổi được sử dụng đối với các điều kiện liên kết khác nhau. Công thức trên được gọi là công thức cát tuyến. Với giá trị nhỏ của L_e/r , ta có:

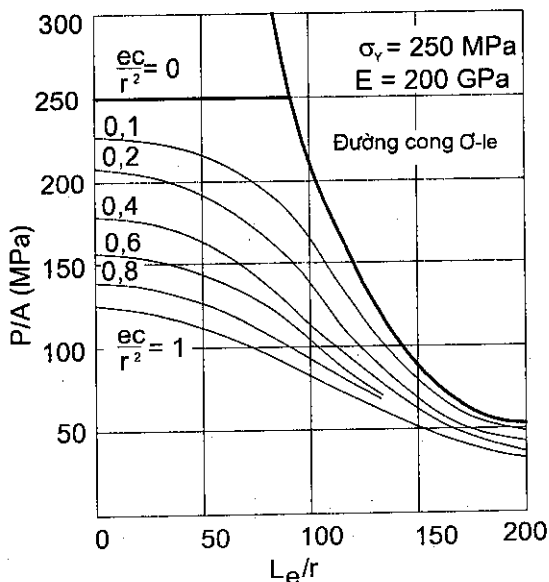
$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2}} \quad (9.34)$$



Phương trình (9.33) được sử dụng để tính ứng suất P/A với các giá trị của E và σ_Y cho trước. Trên hình 9.8 biểu diễn đường cong ứng suất phụ thuộc vào độ mảnh L_e/r , còn hình 9.9 biểu diễn lực trên một đơn vị diện tích P/A phụ thuộc độ lệch tâm e .



Hình 9.8. Ứng suất $\sigma = P/A$ phụ thuộc độ mảnh của thanh L_e/r

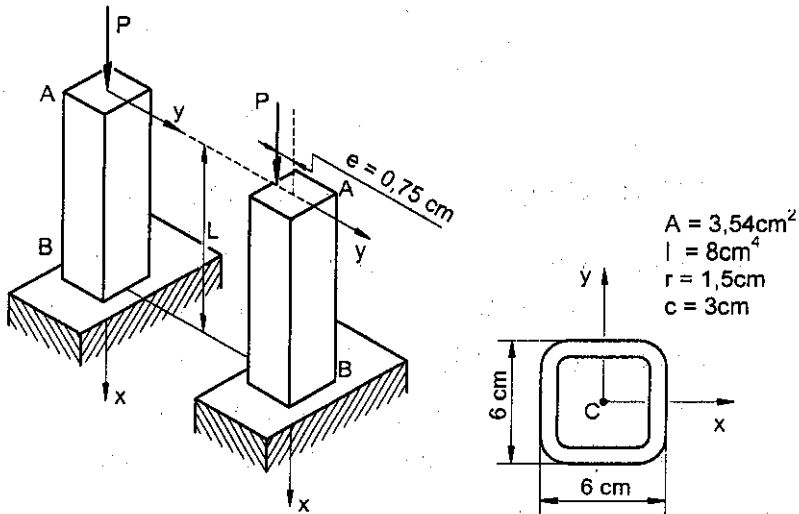


Hình 9.9. Lực trên một đơn vị diện tích P/A phụ thuộc độ lệch tâm e

Ví dụ 9.2: Thanh AB có chiều dài $L = 96\text{cm}$ mặt cắt ngang như hình 9.10. ($A = 3,54\text{cm}^2$; $I = 8\text{cm}^4$; $r = 1,5\text{cm}$; $c = 3\text{cm}$).

a) Áp dụng công thức O-le, và hệ số an toàn bằng 2, xác định lực cho phép tác dụng lên thanh và ứng suất pháp tương ứng.

b) Với giá trị lực cho phép tính được ở câu a), độ lệch tâm $e = 0,75 \text{ cm}$, xác định chuyển vị theo phương ngang của đầu tự do và ứng suất pháp lớn nhất, cho biết $E = 29.10^6 \text{ N/cm}^2$



Hình 9.10

Giải : Chiều dài quy đổi của thanh xác định theo hình 9.5a):

$$L_e = 2 \cdot (96\text{cm}) = 192\text{cm}$$

$$\text{Lực tới hạn: } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (29.10^6 \text{ N/cm}^2)(8,00\text{cm}^4)}{(192\text{cm})^2} = 62,1(\text{kN})$$

a) Lực cho phép : Với hệ số an toàn $F.S = 2$, ta tính :

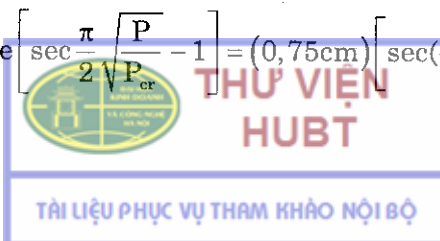
$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{62,1\text{kN}}{2} = 31,1\text{kN}$$

Do đó ứng suất cho phép:

$$\sigma_{all} = \frac{P_{all}}{A} = \frac{31,1\text{kN}}{3,54\text{cm}^2} = 8,79\text{kN/cm}^2$$

b) Độ võng lớn nhất : Chú ý $\frac{P_{all}}{P_{cr}} = \frac{1}{2}$ và sử dụng công thức (9.28), ta có:

$$y_{max} = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right] = (0,75\text{cm}) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right]$$



$$= (0,75 \text{ cm}) (2,252 - 1) = 0,939 \text{ cm}$$

Ứng suất pháp lớn nhất thu được từ (9.32):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right] \\ &= \frac{31,1 \text{ kN/cm}^2}{3,54 \text{ cm}^2} \left[1 + \frac{(0,75 \text{ cm})(2 \text{ cm})}{(1,50 \text{ cm})^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= (8,79 \text{ kN/cm}^2) [1 + 0,667(2,252)] = 22,0 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

9.5. THIẾT KẾ THANH CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

Trong mục này ta sẽ giới hạn việc thiết kế đối với thanh bằng thép, đối với các vật liệu khác (nhôm, gỗ,...) có thể áp dụng các công thức phù hợp với đặc trưng của vật liệu. Việc thiết kế bao gồm hai bước chính :

Bước 1: Xác định ứng suất pháp tới hạn phụ thuộc vào độ mảnh khác nhau của thanh. Ứng suất cho phép có thể tìm được bằng cách chia ứng suất tới hạn cho hệ số an toàn về ổn định.

$$\text{Với } L/r \leq C_c : \sigma_{cr} = \sigma_Y \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2C_c^2} \right] \quad (9.35a)$$

Hệ số an toàn đối với thanh ngắn và trung bình xác định theo công thức:

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3L/r}{8C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^3 \quad (9.35b)$$

Ứng suất cho phép có giá trị bằng :

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_{cr}}{F.S.} = \frac{\sigma_Y}{F.S.} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L/r}{C_c} \right)^2 \right) \quad (9.35c)$$

$$\text{Với } L/r \geq C_c : \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \quad (9.36a)$$

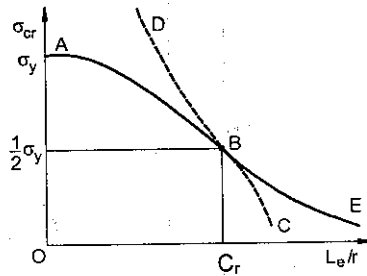
Ứng suất cho phép xác định bởi:

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_{cr}}{F.S.} = \frac{\pi^2 E}{1,92(L/r)^2} \quad (9.36b)$$

Trong đó σ_Y là ứng suất chảy của vật liệu, C_c là tỷ lệ của độ mảnh xác định theo hình 9.11:

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y} \quad (9.37)$$

Phần đường cong AB xác định bởi: $\sigma_{cr} = \sigma_Y - k\left(\frac{L}{r}\right)^2$, còn phần đường cong BE là đường Hypecbol O-le: $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r)^2}$



Hình 9.11. Đường cong xác định ứng suất tới hạn

Bước 2: Xác định lực nén lớn nhất theo hệ số bền. Đối với từng khoảng giá trị của độ mảnh, ta có thể tính lực nén lớn nhất. Ký hiệu λ_c là độ mảnh xác định bởi công thức:

$$\lambda_c = \frac{L}{r\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \quad (9.38)$$

Ta có thể xác định tải trọng lớn nhất:

Đối với thanh có chiều dài ngắn và trung bình ($\lambda_c \leq 1,5$):

$$P_U = A(0,658\lambda_c^2) \sigma_Y \quad (9.39)$$

$$\text{Với thanh dài } (\lambda_c \geq 1,5): P_U = A\left(\frac{0,877}{\lambda_c^2}\right) \sigma_Y \quad (9.40)$$

Công thức trên xác định theo tiêu chuẩn của Viện Kết cấu thép Hoa Kỳ (American Institute of Steel Construction – AISC). Hệ số bền ϕ bằng 0,85 theo tiêu chuẩn của AISC và dựa trên bất đẳng thức sau:

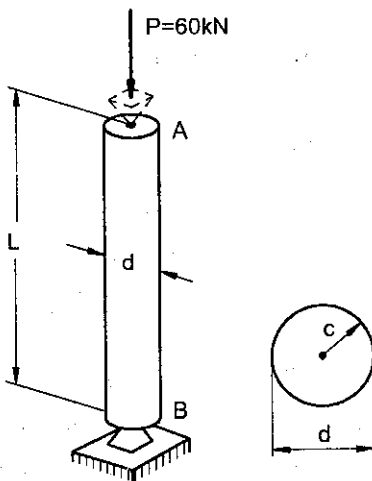
$$\gamma_D \cdot P_D + \gamma_L \cdot P_L \leq \phi \cdot P_U \quad (9.41)$$



Trong đó các hệ số γ_D và γ_L là xác suất xảy ra đối với tải trọng tĩnh và động tương ứng, hệ số bền ϕ luôn nhỏ hơn một đơn vị.

Ví dụ 9.3: Xác định bán kính nhỏ nhất của thanh làm bằng hợp kim nhôm 2014-T6 chịu nén đúng tâm bởi lực $P = 60\text{N}$ nếu:

- Chiều dài $L = 760\text{mm}$;
- Chiều dài $L = 300\text{mm}$.



Hình 9.12

Giải: Ta có với mặt cắt ngang tròn bán kính c :

$$A = \pi c^2, \quad I = \frac{\pi c^4}{4}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4 / 4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

a) Chiều dài thanh bằng 750mm: Do đường kính của thanh chưa biết, ta cần giả sử độ mảnh L/r là một đại lượng nào đó (thường lấy giá trị trung bình). Ta giả sử $L/r > 55$ và sử dụng công thức σ -le (9.36a):

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{all}} = \frac{372 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{\left(\frac{0,750\text{m}}{c/2}\right)^2}$$

$$c^4 = 115,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4, \quad c = 18,44 \text{ mm}$$

Với giá trị trên của bán kính, độ mảnh của thanh là:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750\text{mm}}{18,44\text{mm}/2} = 81,3 > 55$$

Giá trị này đúng so với giá trị chọn ban đầu, vậy với chiều là $L = 7,5\text{m}$ thì đường kính của mặt cắt ngang thanh phải chọn là :

$$d = 2c = 2.(18,44\text{mm}) = 36,9\text{mm} \approx 37\text{mm}$$

b) Chiều dài thanh bằng 300mm: Ta cũng giả sử $L/r > 55$, lập lại quá trình tính toán như trên, ta tìm được $c = 11,66\text{mm}$. Thay vào ta có $L/r = 51,5 < 55$, có nghĩa là điều chúng ta giả thiết là sai. Vậy ta chọn lại $L/r < 55$ và áp dụng công thức (9.35a) :

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{all}} = \left[212 - 1,585 \left(\frac{L}{r} \right) \right] (\text{MPa})$$

$$\frac{60.10^3 \text{N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1,585 \left(\frac{0,3\text{m}}{c/2} \right) \right] 10^6 (\text{Pa})$$

Ta có $c = 12,0\text{mm}$. Với giá trị này ta tính được độ mảnh của thanh:

$$\frac{L}{r} = \frac{300}{c/2} = \frac{300}{12,0/2} = 50$$

Ta thấy điều giả thiết là đúng, vậy với chiều dài $L = 3\text{m}$ thì đường kính mặt cắt ngang phải là : $d = 2c = 24,0\text{mm}$.

9.6. THIẾT KẾ THANH CHỊU TẢI TRỌNG LỆCH TÂM

Với thanh chịu tải trọng lệch tâm, ta có thể thiết kế theo hai cách:

a) Thiết kế theo ứng suất cho phép

Từ nguyên lý cộng tác dụng, ta có :

$$\sigma = \sigma_{\text{nén đúng tâm}} + \sigma_{\text{uốn}}$$

$$\text{Do đó: } \sigma_{\text{max}} = \frac{P}{A} + \frac{M.c}{I}$$

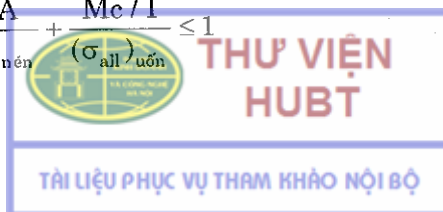
$$\text{Điều kiện bền là: } \frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} \leq \sigma_{\text{all}} \quad (9.42)$$

b) Phương pháp tương hỗ

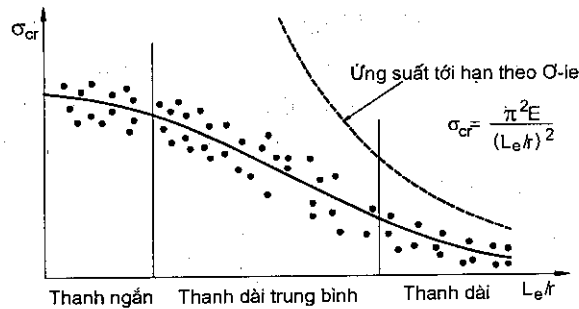
$$\text{Ta viết lại (9.42) dưới dạng: } \frac{P/A}{\sigma_{\text{all}}} + \frac{M.c/I}{\sigma_{\text{all}}} \leq 1$$

Thay thế σ_{all} trong số hạng đầu và số hạng thứ hai bằng *ứng suất cho phép tương ứng khi chịu nén đúng tâm và khi chịu uốn*, ta thu được:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{all}})_{\text{nén}}} + \frac{M.c/I}{(\sigma_{\text{all}})_{\text{uốn}}} \leq 1 \quad (9.43)$$



Trên hình 9.13 biểu diễn đồ thị ứng suất tới hạn theo thực nghiệm (các dấu chấm) và so sánh với công thức O-le.



Hình 9.13. Ứng suất tới hạn thu được bằng thực nghiệm

Ví dụ 9.4: Lực $P = 24\text{kN}$ tác dụng lên thanh làm bằng nhôm, mặt cắt ngang hình vuông mỗi cạnh 32mm , biết chuyển vị của điểm C theo phương ngang là 4mm . Cho biết $E = 70\text{GPa}$. Xác định:

- Độ lệch tâm e của lực tác dụng;
- Ứng suất pháp lớn nhất trong thanh.

Giải:

- Độ lệch tâm e xác định từ công thức (9.28) của chuyển vị tại đầu tự do.

Ta có lực tới hạn:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^9 (\text{N} / \text{m}^2) (32 \cdot 10^{-3} \text{m})^4 / 12}{(2 \cdot 0,65 \text{m})^2} = 35,68 (\text{kN})$$

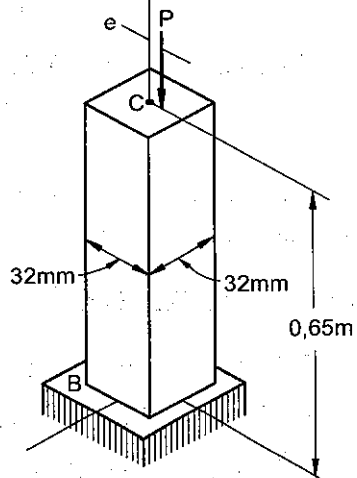
$$\text{Từ (9.28): } y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{24 \text{kN}}{35,68 \text{kN}}} - 1 \right) = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0,82 \right) - 1 \right] = 4 (\text{mm})$$

Độ lệch tâm e có giá trị bằng :

$$e = \frac{4 \text{mm}}{(3,584 - 1)} = 1,48 \text{mm} \approx 1,5 \text{mm} = 0,15 \text{cm}$$

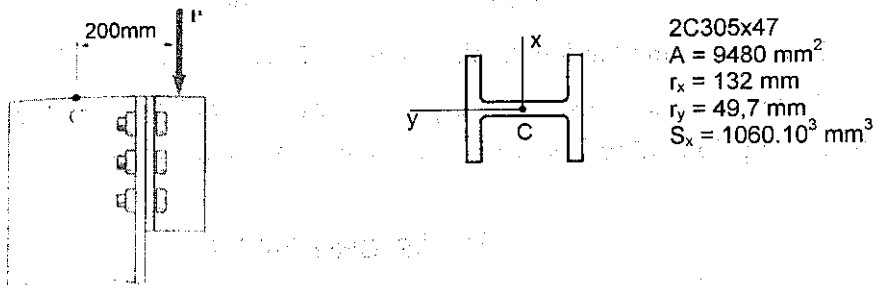
- Ứng suất pháp lớn nhất thu được từ (9.31) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] = \frac{24 \text{kN}}{10,24 \text{cm}^2} \left[1 + \frac{0,15 \cdot 1,6}{(3,2)^2 / 12} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{24 \text{kN}}{35,68 \text{kN}}} \right) \right] \\ &= 2,344 [1 + 0,28 \cdot 3,584] = 4,696 \text{kN} / \text{cm}^2 \approx 4,7 \text{kN} / \text{cm}^2 \end{aligned}$$



Hình 9.14

Ví dụ 9.5 : Thanh có mặt cắt ngang gồm hai chữ C số hiệu C305 × 47 ghép lại như hình 9.15, chiều dài $L = 4,5\text{m}$, biết vật liệu có $E = 200\text{GPa}$, $\sigma_Y = 250\text{MPa}$. Xác định lực nén cho phép P tác dụng lên thanh theo hai phương pháp: a) Ứng suất pháp cho phép; b) Phương pháp tương tác, nếu $(\sigma_{\text{all}})^{\text{uốn}} = 150\text{MPa}$.



Hình 9.15

Giải:

a) Độ mảnh lớn nhất của thanh là: $(L/r_y) = (4,5\text{m}) / (0,0497\text{m}) = 90,5$. Từ công thức (9.37), với E , σ_Y cho trước ta có: $C_e = 125,7$. Do $L/r < C_e$ ta có theo công thức (9.35a) ta tính được σ_{cr} , từ (9.35b) tìm được hệ số an toàn $F.S = 1,89$. Ứng suất cho phép xác định theo công thức (9.35c):

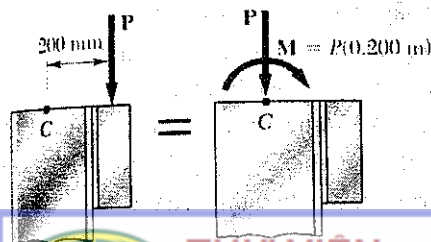
$$\sigma_{\text{all}} = (\sigma_{\text{all}})^{\text{nén đúng tâm}} = 97,9 \text{ MPa}$$

Ứng suất của thanh chịu nén lệch tâm (hình 9.16) và điều kiện bền xác định theo công thức (9.43):

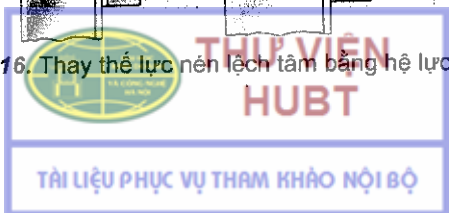
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{9,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P \cdot 0,2\text{m}}{S}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{P}{9,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P \cdot 0,2\text{m}}{1,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \leq \sigma_{\text{all}}$$

Từ đó: $P \leq 333\text{kN}(\downarrow)$.



Hình 9.16. Thay thế lực nén lệch tâm bằng hệ lực tương đương



b) Phương pháp tương tác:

Áp dụng (9.44) ta có:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{all}})_{\text{kéo/nén}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{all}})_{\text{uốn}}} \leq 1$$

$$\frac{P/(9,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)}{97,9 \cdot 10^6 \text{ Pa}} + \frac{P \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{150 \cdot 10^3 \text{ Pa}} \leq 1$$

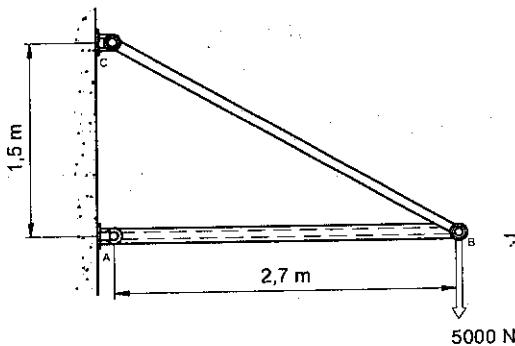
Lực nén P lớn nhất lên thanh có giá trị bằng: $P = 428 \text{ kN} (\downarrow)$

Ta thấy lực nén theo phương pháp tương tác lớn hơn theo ứng suất cho phép, có nghĩa là *tăng khả năng chịu lực* của thanh hơn.

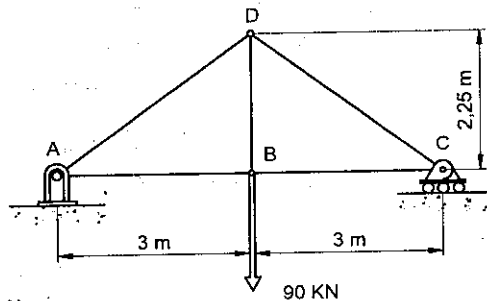
BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1. Kết cấu gồm thanh thép đặc BC và ống thép AB (hình BT9.1). Xác định đường kính nhỏ nhất của ống, bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

9.2. Chọn thanh chịu nén có mặt cắt ngang chữ I (hình BT9.2) (số hiệu W) trong hệ dàn với trọng lượng riêng nhỏ nhất. Giả thiết thanh bị uốn trong mặt phẳng của hệ và các thanh chịu kéo đều thiết kế đúng tiêu chuẩn.



Hình BT9.1



Hình BT9.2

9.3. Hệ dàn liên kết và chịu tải trọng như hình BT9.3. Các thanh trong hệ đều có mặt cắt ngang ký hiệu WT 102 × 43 (xem phụ lục) và làm bằng thép có mô đun đàn hồi $E = 200 \text{ GPa}$ và ứng suất chảy là 250 MPa . Xác định:

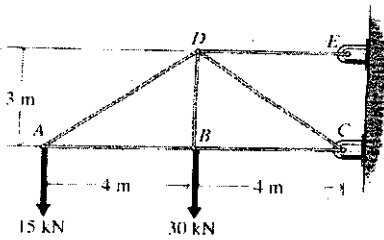
- Hệ số an toàn tương ứng khi đạt giới hạn chảy;
- Hệ số an toàn tương ứng khi mất ổn định.

9.4. Thanh ABC của hệ kết cấu trên hình BT9.4 chịu tải trọng phân bố đều cường độ 30 kN/m . Chọn thanh BD sao cho có trọng lượng nhỏ nhất. Coi thanh BD liên kết khớp tại hai đầu, bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

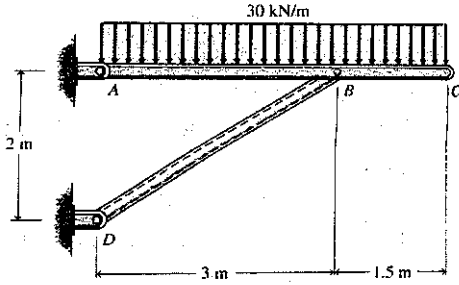


THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



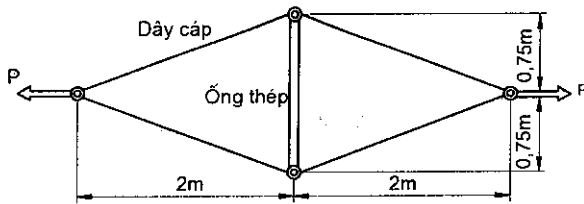
Hình BT9.3



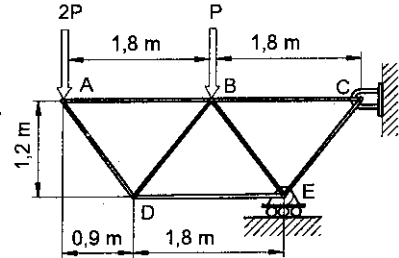
Hình BT9.4

9.5. Thanh thép có chiều dài 1,5m được dùng để giữ bộ phận kéo căng như hình BT9.5. Biết lực tác dụng ở hai đầu dây thép là $P = 45\text{kN}$, xác định kích thước nhỏ nhất của thanh, bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

9.6. Hệ dàn như hình BT9.6 gồm các thanh có mặt cắt ngang chữ H. Môđun đàn hồi của vật liệu là 29kN/cm^2 , giới hạn chảy 36kN/cm^2 . Xác định tải trọng lớn nhất P có thể tác dụng với hệ số an toàn là 1,75 khi đạt giới hạn chảy và bằng 4 khi mất ổn định.

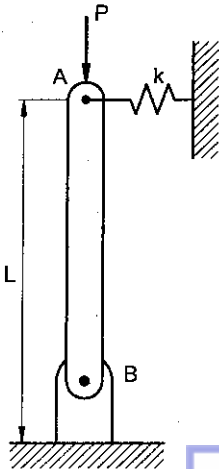


Hình BT9.5

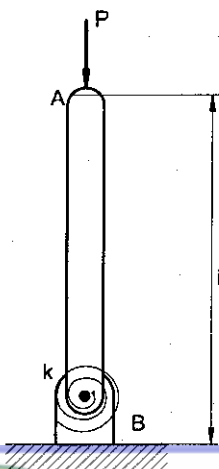


Hình BT9.6

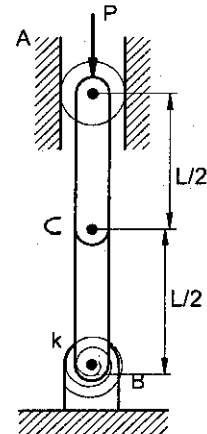
9.7. Biết độ cứng của lò xo tại đầu tự do A (hình BT9.7) là hằng số k và thanh AB là tuyệt đối cứng. Xác định lực tới hạn P_{cr} .



Hình BT9.7



Hình BT9.8



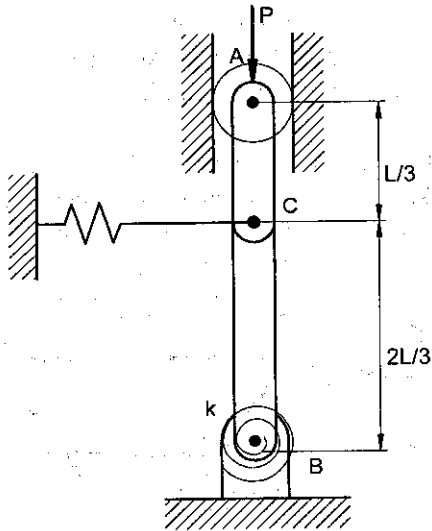
Hình BT9.9


THƯ VIỆN HUBT
 TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

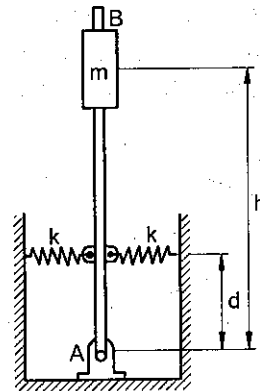
9.8. Biết độ cứng chống xoắn của lò xo tại B là hằng số K và thanh AB là tuyệt đối cứng. Xác định lực tới hạn P_{cr} .

9.9. Hai thanh tuyệt đối cứng AC và BC nối với nhau bằng khớp tại C như hình BT9.9. Biết độ cứng chống xoắn của lò xo tại B là hằng số K . Xác định lực tới hạn P_{cr} tác dụng lên hệ.

9.10. Hai thanh tuyệt đối cứng AC và BC nối với nhau bằng khớp tại C như hình BT9.10. Biết độ cứng của lò xo tại C là hằng số k , và lò xo có thể chịu kéo cũng như chịu nén. Xác định lực tới hạn P_{cr} tác dụng lên hệ.



Hình BT9.10



Hình BT9.11

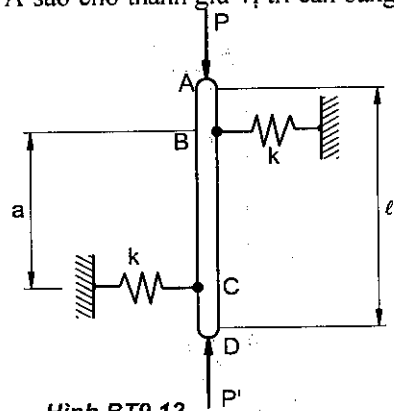
9.11. Cho thanh liên kết khớp tại A (hình BT9.11), tại B gắn với vật nặng có khối lượng $m = 125\text{kg}$, chiều cao của thanh $h = 700\text{mm}$, độ cứng của mỗi lò xo $k = 2,8\text{kN/m}$. Xác định khoảng giá trị của khoảng cách d đến đầu A sao cho thanh giữ vị trí cân bằng như hình vẽ. Lò xo có thể chịu kéo cũng như chịu nén.

9.12. Thanh tuyệt đối cứng AD nối với hai lò xo tại B và C như hình BT9.12. Biết độ cứng của mỗi lò xo là hằng số k , và lò xo có thể chịu kéo cũng như chịu nén. Xác định lực tới hạn P_{cr} tác dụng lên hai đầu thanh.

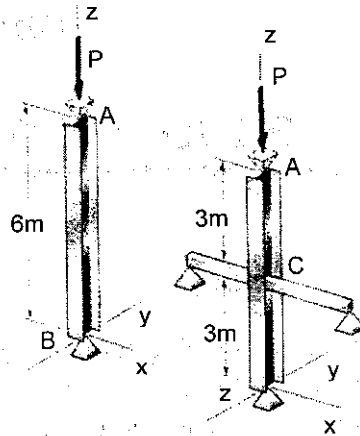
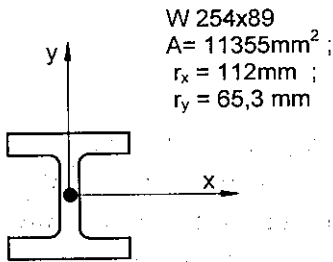
9.13. Thanh AB có mặt cắt ngang hiệu $W_{254 \times 89}$ (diện tích $A = 11355\text{mm}^2$; $r_x = 112\text{mm}$; $r_y = 65,3\text{mm}$) ứng suất chảy của thép $\sigma_Y = 36\text{kN/cm}^2$, môđun đàn hồi $E = 2.107\text{N/cm}^2$. Xác định lực cho phép P nếu:

a) Chiều dài quy đổi của thanh là 60cm .

b) Thanh bị kẹp tại điểm giữa C để hạn chế chuyển vị trong mặt phẳng xz (giả thiết chuyển vị của điểm C trong mặt phẳng yz không bị ảnh hưởng).



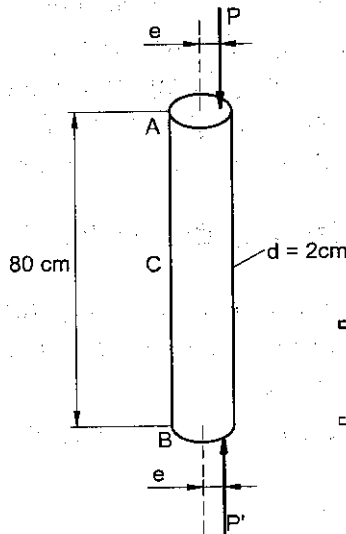
Hình BT9.12



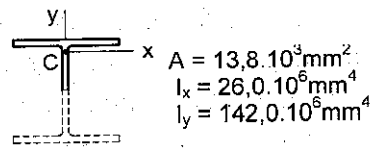
Hình BT9.13

9.14. Thanh mặt cắt ngang tròn đường kính $d = 2 \text{ cm}$, chiều dài thanh $L = 80 \text{ cm}$, chịu nén lệch tâm bởi lực P như hình BT9.14. Biết $E = 200 \text{ GPa}$. Xác định:

- Ứng suất lớn nhất;
- Độ lệch tâm e ;
- Chuyển vị của điểm giữa C (hai đầu thanh coi như liên kết khớp).



Hình BT9.14



Hình BT9.15

9.15. Thanh bằng thép có mặt cắt ngang là một nửa chữ I số hiệu $W 360 \times 216$ với các đặc trưng hình học như hình BT9.15. Xác định lực nén đúng tâm cho phép nếu chiều dài của thanh là:

- 4,0m;
- 6,5m.

Biết $\sigma_Y = 345 \text{ MPa}$, mô đun đàn hồi $E = 200 \text{ GPa}$.



Chương 10

PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

10.1. KHÁI NIỆM

Phương pháp năng lượng được sử dụng rộng rãi để tính chuyển vị của hệ thanh chịu các dạng tải trọng khác nhau (kéo/nén, uốn, xoắn). Trong chương này sẽ đề cập đến ứng dụng của một số định lý cơ bản về chuyển vị: *Định lý Castigliano, định lý Betti về chuyển vị đơn vị tương hỗ, nguyên lý về công khả dĩ* để giải các bài toán về hệ thanh phẳng *tĩnh định, siêu tĩnh, dầm liên tục*. Trên cơ sở của việc tính nội lực và chuyển vị của hệ dưới tác dụng của các tải trọng cho trước, ta có thể xác định được ứng suất và chuyển vị lớn nhất trong hệ, từ đó có thể kiểm tra được *điều kiện bền và điều kiện cứng* thỏa mãn yêu cầu thiết kế.

Năng lượng biến dạng (hay “thế năng biến dạng đàn hồi”) là *công của nội lực tích lũy trong hệ* khi chịu tác dụng của ngoại lực và làm cho hệ bị biến dạng. Mặc dù khái niệm năng lượng biến dạng đề cập trong chương này chủ yếu về thanh hoặc dầm, nhưng nó có thể áp dụng đối với bất cứ kết cấu nào có quan hệ *lực - biến dạng là tuyến tính* (tấm, vỏ mỏng,...).

10.1.1. Năng lượng biến dạng đối với thanh chịu lực dọc trục

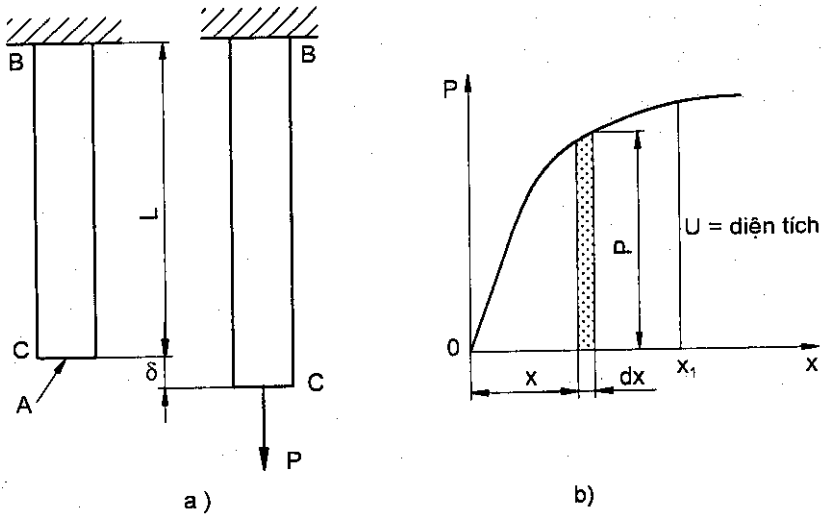
Xét thanh BC có chiều dài L, mặt cắt ngang không đổi A, chịu lực P tác dụng từ từ lên đầu tự do theo phương dọc trục, giả thiết đầu ngàm là liên kết tuyệt đối cứng (hình 10.1a).

Từ biểu đồ lực – biến dạng (hình 10.1b) ta có công W_k thực hiện để kéo dài một đoạn x_1 bằng :

$$W_k = \int_0^{x_1} P dx \quad (10.1)$$

Trong đó P là hàm của chuyển vị x. Công của hệ phải bằng sự thay đổi năng lượng trong vật liệu (theo định lý Clapayron B.P-1799-1864) do làm thay đổi hình dáng của thanh, ta gọi đó là *năng lượng biến dạng U*. Thay $x_1 = \delta = L.\varepsilon$, $P = \sigma.A$ (ε, σ lần lượt là biến dạng và ứng suất của thanh), ta có :

$$W_k = U = \int_0^e (sA)Lde = AL \int_0^e sde \quad (10.2)$$



Hình 10.1

Trong đó σ là hàm của ϵ . Áp dụng định luật Húc, ta có :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}; d\epsilon = \frac{1}{E} d\sigma \quad (10.3)$$

Biểu thức (10.2) trở thành :

$$U = \frac{AL}{E} \int_0^{\sigma} \sigma d\sigma \quad (10.4)$$

Hay :
$$U = AL \left(\frac{\sigma^2}{2E} \right) \quad (10.5)$$

Công thức (10.5) biểu diễn năng lượng biến dạng đàn hồi của thanh chịu lực dọc trục khi vật liệu tuân theo định luật Húc. Biểu thức trong dấu ngoặc đơn $\left(\frac{\sigma^2}{2E} \right)$ là năng lượng trên một đơn vị thể tích của thanh gọi là *mật độ năng lượng biến dạng*.

Thay $\sigma = \frac{P}{A}$ ta có thể năng biến dạng đàn hồi biểu diễn qua lực P như sau :

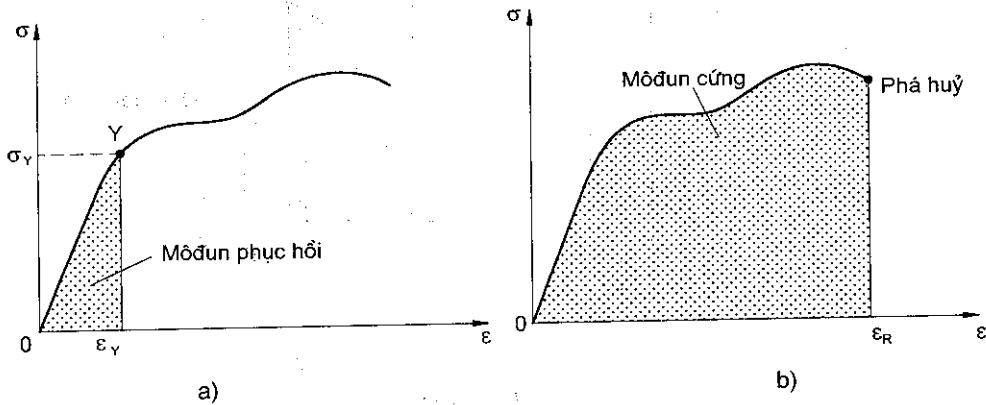
$$U = \int_0^L \frac{(P/A)^2}{2E} (A dx) = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \quad (10.6)$$

Nếu thanh chịu lực P và độ cứng AE không đổi trên suốt chiều dài, ta có :

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (10.6')$$



Tích phân $\int \sigma d\varepsilon$ trong (10.2) biểu diễn diện tích của biểu đồ ứng suất – biến dạng từ không đến giới hạn tỷ lệ, gọi là «*môđun phục hồi*» (hình 10.2a), còn diện tích của biểu đồ ứng suất – biến dạng từ không đến giới hạn bền gọi là «*môđun cứng*» (hình 10.2b).



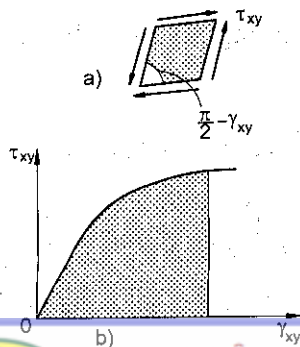
Hình 10.2

Công thức tổng quát của năng lượng biến dạng gây nên bởi ứng suất pháp σ là :

$$U = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (10.7)$$

10.1.2. Năng lượng biến dạng đối với thanh chịu xoắn thuần túy

Khi thanh chịu xoắn thuần túy, từ biểu đồ ứng suất – biến dạng (hình 10.3) ta có mật độ năng lượng biến dạng xác định bởi: $u = \int_0^y \tau dy$



Hình 10.3

Trong đó ứng suất tiếp nằm trong giới hạn tỷ lệ của vật liệu : $\tau = G.\gamma$, biểu thức trên trở thành :

$$u = \int_0^y \tau \frac{d\tau}{G} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (10.8)$$

Thế năng biến dạng gây nên bởi ứng suất tiếp τ là:

$$U = \int_{(V)} \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (10.9)$$

Với V là thể tích của thanh, $dV = (dA).(dx)$

Thay $\tau = \frac{T.\rho}{J}$, ta có thế năng biến dạng của thanh chiều dài L chịu xoắn thuần túy bởi mômen xoắn T là:

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (10.10)$$

Đối với thanh có độ cứng là hằng số trên suốt chiều dài, ta có :

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (10.10')$$

10.1.3. Năng lượng biến dạng đối với dầm chịu uốn

Xét dầm có độ cứng EI chịu tác dụng của mômen uốn M là hàm của x, thay $\sigma = \frac{-M.y}{I}$ vào (10.7), ta có năng lượng biến dạng xác định theo công thức :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (10.11)$$

10.1.4. Năng lượng biến dạng đối với thanh chịu lực cắt

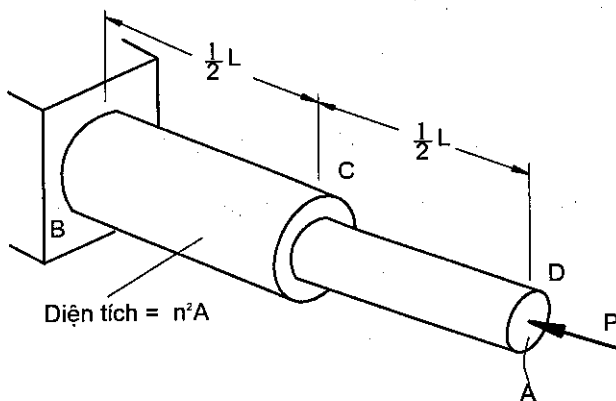
Gọi lực cắt trên mặt cắt ngang của thanh là V (phụ thuộc vào khoảng cách x), áp dụng công thức Juraxki, thay $\tau = \frac{V.Q}{I.t}$ vào (10.9) ta có năng lượng biến dạng gây nên bởi lực cắt là :

$$U = \int_0^L \frac{V^2}{2GI^2} \left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \right) dx \quad (10.12)$$



Trong đó Q là mômen tĩnh của diện tích cắt tại tung độ y đối với trục trung tâm z , t là chiều rộng mặt cắt ngang.

Ví dụ 10.1: Thanh BD gồm hai đoạn có cùng vật liệu, cùng chiều dài nhưng kích thước mặt cắt ngang khác nhau. Xác định năng lượng biến dạng của thanh theo P , L , E , A (hình 10.4).



Hình 10.4

Giải : Ta có năng lượng biến dạng của từng đoạn thanh xác định theo công thức (10.6'). Năng lượng toàn bộ của thanh bằng tổng của chúng :

$$U = \frac{P^2(L/2)}{2AE} + \frac{P^2(L/2)}{2(n^2A)E} = \frac{P^2L}{4AE} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Hay :
$$U = \frac{1+n^2}{2n^2} \cdot \frac{P^2L}{2AE} \quad (10.13)$$

Ta thấy khi $n = 1$, công thức trên giống như của thanh có diện tích mặt cắt ngang không đổi trên toàn chiều dài. Với $n > 1$, ta có năng lượng biến dạng giảm đi, điều đó có nghĩa là việc tăng đường kính của mặt cắt ngang cần tránh nếu thanh chịu tải trọng động (va chạm), khi khả năng hấp thụ năng lượng có thể tăng đột ngột.

Ví dụ 10.2 : Trục BD chịu xoắn bởi mômen xoắn T (hình 10.5), gồm hai đoạn cùng vật liệu và chiều dài, nhưng đoạn BC có đường kính gấp đôi đoạn CD. Tính góc xoắn của trục. Biết môđun trượt của vật liệu là G .

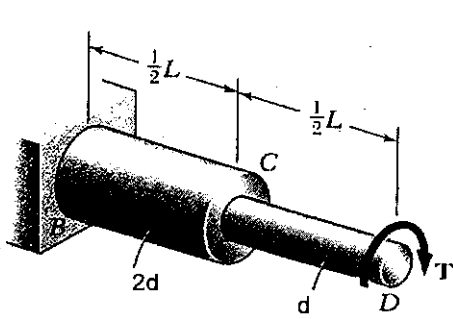
Giải : Năng lượng biến dạng của từng đoạn trục xác định theo công thức (10.10'), thay $J_{BC} = 16J_{CD}$, ta có :



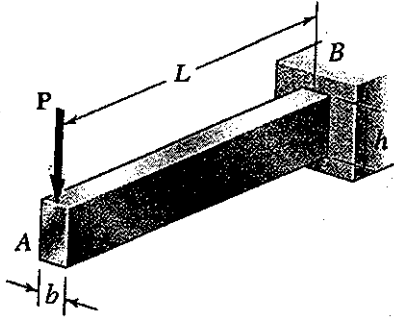
$$U = \frac{T^2(L/2)}{2GJ_{CD}} + \frac{T^2(L/2)}{2.16GJ_{CD}} = \frac{17}{32} \cdot \frac{T^2L}{2GJ_{CD}}$$

Năng lượng biến dạng đó bằng công của mômen xoắn tác dụng vào đầu tự do D gây nên góc xoắn $\phi_{D/B}$, ta có :

$$\frac{17}{32} \cdot \frac{T^2L}{2GJ_{CD}} = \frac{1}{2} T \phi_{D/B} \Rightarrow \phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ_{CD}}$$



Hình 10.5



Hình 10.6

Ví dụ 10.3 : Xác định độ võng tại đầu A của dầm công-xôn chịu lực tập trung P (hình 10.6) khi :

- Chỉ kể ảnh hưởng của ứng suất pháp ;
- Kể cả ảnh hưởng của ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

Giải :

a) Ảnh hưởng của ứng suất pháp : Ta có công của lực P tác dụng tại đầu

tự do là : $U = \frac{1}{2} P \cdot y_A$. Thay vào công thức năng lượng biến dạng của dầm chịu uốn (10.11), với $M = P \cdot x$ ta có :

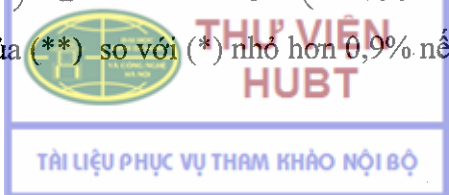
$$\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2} P y_A. \text{ Từ đó ta thu được độ võng tại A là : } y_A = \frac{PL^3}{3EI} \quad (*)$$

b) Ảnh hưởng của ứng suất pháp và tiếp :

Áp dụng công thức (10.11) và (10.12), thay $V = P$, $t = b$, $Q = bh^2/8$, $I = bh^3/12$, ta thu được :

$$\frac{P^2L^3}{6EI} \left(1 + \frac{Eh^2}{10GL^2} \right) = \frac{1}{2} P y_A \Rightarrow y_A = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + \frac{Eh^2}{10GL^2} \right) \quad (**)$$

Ta thấy sai số của (**) so với (*) nhỏ hơn 0,9% nếu tỷ lệ $(h/L) < 1/10$.



10.2. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

10.2.1. Nguyên lý về công khả dĩ

a) Định nghĩa về chuyển vị khả dĩ

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé mà hệ có thể thực hiện được sao cho liên kết trong hệ không bị phá vỡ.

b) Nguyên lý về công khả dĩ

« Điều kiện cần và đủ để một hệ đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực là tổng công của các nội lực và ngoại lực trên mọi chuyển vị khả dĩ phải bằng không » $A_{ng} + A_n = 0$ (10.13)

$$P_k \cdot \Delta_{km} + A_n = 0 \quad (10.14)$$

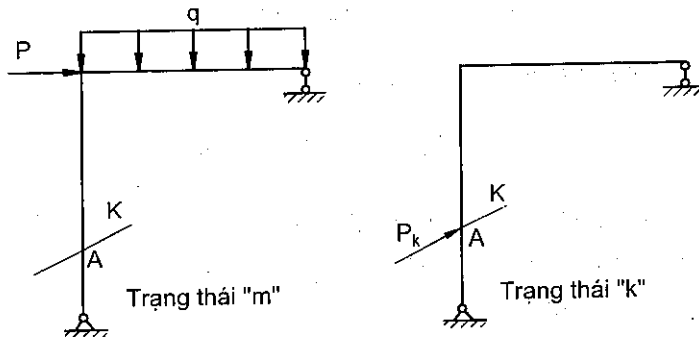
Trong đó:

A_{ng} : công của ngoại lực trên các chuyển vị khả dĩ ;

A_n : công của nội lực trên các chuyển vị khả dĩ ;

Δ_{km} : là chuyển vị tại điểm A bất kỳ theo phương K do ngoại lực ở trạng thái "m" gây nên ;

$\Delta_{km} P_k$: là lực tác dụng tại điểm A theo phương K ở trạng thái "k" gây nên chuyển vị đúng bằng chuyển vị ở trạng thái "m" (hình 10.7).



Hình 10.7



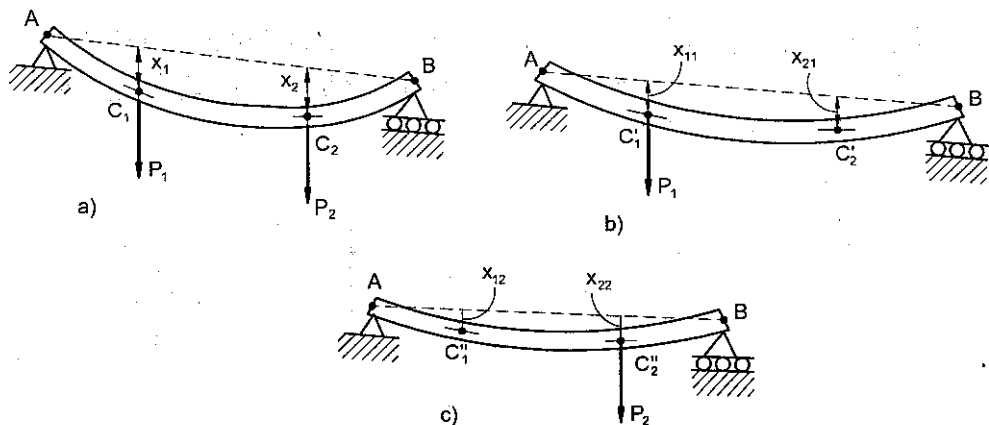
10.2.2. Định lý Betti & Maxwell về chuyển vị đơn vị tương hỗ

Xét dầm AB chịu tác dụng đồng thời của hai lực P_1 và P_2 , độ võng tại điểm C_1 và C_2 tương ứng là x_1 và x_2 (hình 10.8a).

Xét trường hợp dầm chỉ chịu lực P_1 , khi đó chuyển vị của điểm C_1 và C_2 ký hiệu là x_{11} và x_{21} (hình 10.8b) biểu diễn dưới dạng sau :

$$x_{11} = \delta_{11}P_1; \quad x_{21} = \delta_{21}P_1$$

Với δ_{11} , δ_{21} là hệ số ảnh hưởng, tức chuyển vị tại C_1 và C_2 khi lực đơn vị tác dụng tại C_1 . Tương tự nếu chỉ có lực P_2 tác dụng tại C_2 (hình 10.8c) ta có : $x_{12} = \delta_{12}P_2$; $x_{22} = \delta_{22}P_2$.



Hình 10.8

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có :

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 \quad (10.16)$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2$$

Công do lực P_1 gây nên chuyển vị tại C_1 là :

$$\frac{1}{2}P_1x_{11} = \frac{1}{2}P_1(\delta_{11}P_1) = \frac{1}{2}\delta_{11}P_1^2 \quad (10.17)$$

Tương tự công của lực P_2 gây nên chuyển vị tại C_2 là :

$$\frac{1}{2}P_2x_{22} = \frac{1}{2}P_2(\delta_{22}P_2) = \frac{1}{2}\delta_{22}P_2^2 \quad (10.18)$$

Khi lực P_2 tác dụng tại C_2 , điểm đặt lực P_1 di chuyển từ C'_1 đến C_1 một đoạn là x_{12} (hình 10.9a), lực P_1 thực hiện một công bằng $P_1 \cdot x_{12}$, ta có tổng công do P_1 gây nên là :



$$P_1 x_{12} = P_1 (\delta_{12} P_2) = \delta_{12} P_1 P_2 \quad (10.19)$$

Cộng các biểu thức (10.17), (10.18), (10.19) ta có năng lượng biến dạng của dầm do lực P_1 và P_2 gây nên là :

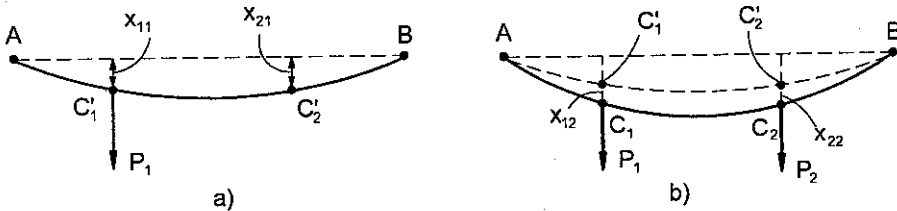
$$U = \frac{1}{2} (\delta_{11} P_1^2 + 2\delta_{12} P_1 P_2 + \delta_{22} P_2^2) \quad (10.20)$$

Hoàn toàn tương tự nếu như lực P_2 tác dụng lên dầm trước, rồi đến P_1 (hình 10.9b), ta có :

$$U = \frac{1}{2} (\delta_{22} P_2^2 + 2\delta_{21} P_2 P_1 + \delta_{11} P_1^2) \quad (10.20')$$

Cho vế phải của hai biểu thức trên bằng nhau, ta có : $\delta_{21} = \delta_{12}$ (10.21)

Đây chính là nguyên lý về chuyển vị đơn vị tương hỗ mang tên Betti & Maxwell : «*Chuyển vị tại điểm C_1 do lực đơn vị gây nên tại C_2 bằng chuyển vị tại C_2 do lực đơn vị gây nên tại C_1* »



Hình 10.9

10.2.3. Định lý Castigliano

Đạo hàm biểu thức (10.20) theo P_1 và chú ý đến (10.16), ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 = x_1$$

Đạo hàm (10.20) theo P_2 , chú ý (10.16) và (10.21), ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \delta_{12} P_1 + \delta_{22} P_2 = x_2$$

Một cách tổng quát, nếu có hệ lực P_1, P_2, \dots, P_n tác dụng lên hệ, chuyển vị tại điểm đặt lực P_i theo phương tác dụng của lực đó xác định bởi đạo hàm riêng của năng lượng biến dạng theo lực P_i :

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = x_i \quad (10.22)$$

Biểu thức (10.22) gọi là định lý Castigliano (*Alberto Castigliano* 1847–1884).
 Trong trường hợp dầm chịu uốn, năng lượng biến dạng của hệ bằng :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

Chuyển vị x_i của điểm đặt lực P_i xác định theo công thức :

$$x_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx \quad (10.23)$$

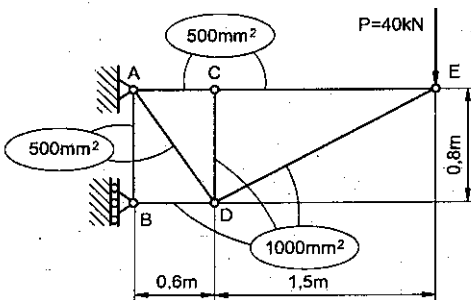
Trong trường hợp hệ dầm gồm n thanh có chiều dài L_i , diện tích mặt cắt ngang A_i , nội lực F_i , năng lượng biến dạng của hệ bằng :

$$U = \sum_i \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \quad (10.24)$$

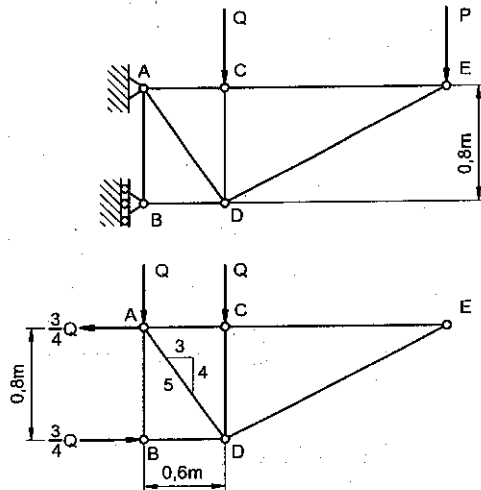
Chuyển vị x_i của điểm đặt lực P_i xác định theo công thức :

$$x_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum_i \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_i} \quad (10.25)$$

Ví dụ 10.4: Cho hệ dầm có kích thước và chịu lực như hình 10.10. Xác định chuyển vị thẳng đứng của điểm C. Các thanh là cùng vật liệu có môđun đàn hồi $E = 73\text{GPa}$.



Hình 10.10



Hình 10.11

Giải: Do tại C không có lực tác dụng nên ta đặt lực ảo Q theo phương thẳng đứng như hình 10.11. Áp dụng định lý Castigliano, ta có chuyển vị thẳng đứng tại C xác định theo công thức:

$$y_C = \sum_i \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} \sum_i \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} \quad (a)$$

Tách nút E, C, B lần lượt và xét cân bằng các nút dưới tác dụng của lực Q, ta có:

$F_{CE} = F_{DE} = 0$; $F_{AC} = 0$; $F_{CD} = -Q$; $F_{AB} = 0$; $F_{BD} = -3/2Q$. Nội lực trong các thanh F_i bằng tổng nội lực do riêng lực P và Q gây nên. Bảng 10.1 biểu diễn các số hạng trong công thức (a). Ta có:

$$\sum_i \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4306P + 4263Q;$$

$$y_C = \frac{1}{E} \sum_i \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} (4306P + 4263Q)$$

Do lực Q không tác dụng lên hệ nên ta đặt $Q = 0$, thay $P = 40\text{kN}$, $E = 73\text{GPa}$, ta tìm được chuyển vị thẳng đứng tại C:

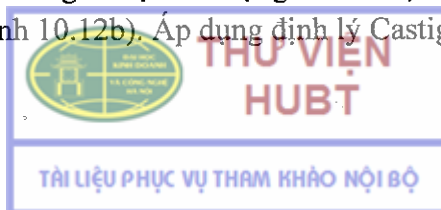
$$y_C = \frac{4306(40 \cdot 10^3 \text{ N})}{73 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 2,36 \cdot 10^{-3} (\text{m}) = 2,36 (\text{mm}) \downarrow$$

Bảng 10.1.

Thanh	F_i	$\partial F_i / \partial Q$	$L_i, \text{ m}$	$A_i, \text{ m}^2$	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0,8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0,6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$5/4$	1,0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-3/4$	0,6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0,8	1000×10^{-6}	$+800Q$
CE	$+15P/8$	0	1,5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1,7	1000×10^{-6}	0

Ví dụ 10.5: Cho dầm chịu lực như hình 10.2a, xác định độ võng tại điểm D, biết $EI = \text{const}$.

Giải: Do tại D không có lực tác dụng nên ta đặt lực ảo Q theo phương thẳng đứng tại D (hình 10.12b). Áp dụng định lý Castigliano, ta có:

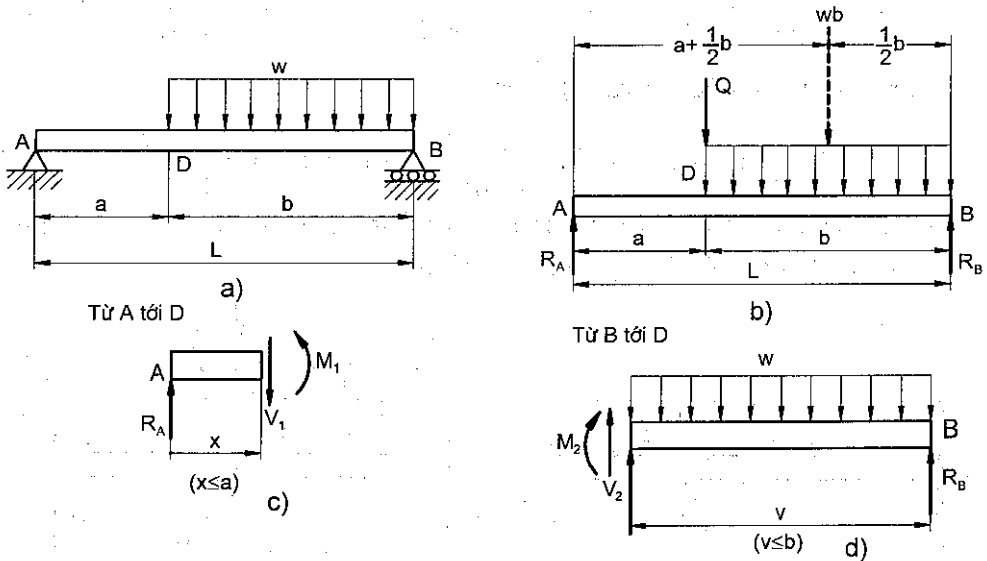


$$y_D = \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx = \frac{1}{EI} \int M \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx \quad (a)$$

Trong đó : tích phân lấy riêng trên từng đoạn AD và DB.

Phản lực liên kết tại A và B: Giải phóng liên kết và xét cân bằng của dầm, ta có:

$$R_A = \frac{wb^2}{2L} + Q \frac{b}{L} (\uparrow); R_B = \left(\frac{wb(a + 1/2b)}{L} + Q \frac{a}{L} \right) (\uparrow) \quad (b)$$



Hình 10.12

Xét đoạn AD và DB của dầm (hình 10.12c,d), ta có :

$$M_1 = R_A \cdot x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q \frac{b}{L} \right) x; \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = x \frac{b}{L}$$

Thay vào (a) và tích phân từ A đến D ta có:

$$\frac{1}{EI} \int M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial Q} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^a R_A x \left(\frac{bx}{L} \right) dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{R_A a^3 b}{3L} \quad (c)$$

Thay R_A vào và cho $Q = 0$, ta có:

$$\frac{1}{EI} \int_0^a M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial Q} \right) dx = \frac{wa^3 b^3}{6EIL^2} \quad (d)$$

Tương tự trên đoạn DB:



$$M_2 = R_B \cdot v - \frac{wv^2}{2} = \left(\frac{wb(a + 1/2b)}{L} + Q \frac{a}{L} \right) v - \frac{wv^2}{2}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = \frac{av}{L} \quad (e)$$

Thay (e) vào (a) và tích phân từ B đến D, ta có :

$$\frac{1}{EI} \int M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial Q} \right) dv = \frac{1}{EI} \int_0^b \left(R_B v - \frac{wv^2}{2} \right) \frac{av}{L} dv = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{R_B ab^3}{3L} - \frac{awb^4}{8L} \right)$$

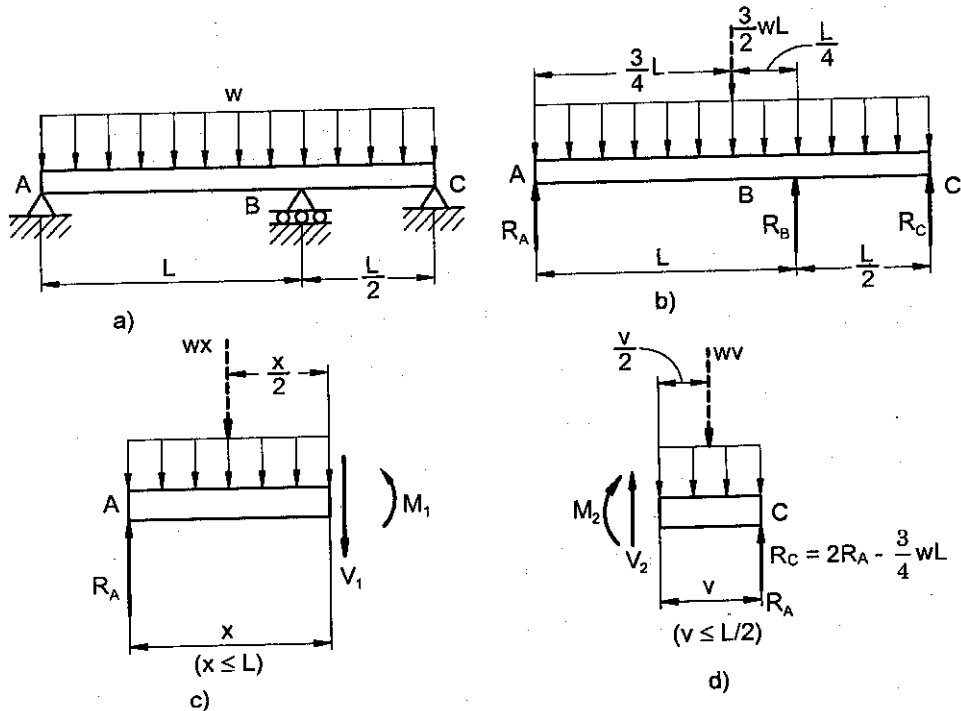
Thay R_B vào và cho $Q = 0$, ta có :

$$\frac{1}{EI} \int_0^b M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial Q} \right) dv = \left(\frac{wb(a + 1/2b)}{L} \right) \frac{ab^3}{3EI} - \frac{awb^4}{8EI} = \frac{5a^2b^4 + ab^5}{24EIL^2} w \quad (g)$$

Cộng các biểu thức (d) và (g) ta có :

$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2} (4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2} (4a + b)(a + b) = \frac{wab^3}{24EIL} (4a + b) \downarrow$$

Ví dụ 10.6 : Cho dầm siêu tĩnh chịu tải trọng phân bố đều, xác định phản lực liên kết tại các gối tựa (hình 10.13a).



Hình 10.13



Giải : Đây là hệ siêu tĩnh bậc một, ta chọn phản lực liên kết tại A là liên kết thừa. Áp dụng định lý Castigliano, ta xác định chuyển vị thẳng đứng tại A do R_A và tải trọng phân bố đều gây nên :

$$y_A = \frac{1}{EI} \int M \left(\frac{\partial M}{\partial R_A} \right) dx \quad (*)$$

Phản lực liên kết tại B và C biểu diễn qua R_A và tải trọng phân bố đều :

$$R_B = \frac{9}{4} wL - 3R_A ; R_C = 2R_A - \frac{3}{4} wL$$

Trên đoạn AB (hình 10.13 c) ta có :

$$M_1 = R_A \cdot x - \frac{wx^2}{2} ; \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

Thay vào công thức (*) ta có:

$$\frac{1}{EI} \int M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial R_A} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_A x - \frac{wx^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8} \right) \quad (**)$$

Tương tự trên đoạn BC (hình 10.13d) ta có :

$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4} wL \right) \cdot v - \frac{wv^2}{2} ; \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Thay vào (*) và tích phân từ C đến B, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial R_A} \right) dv &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\left(2R_A - \frac{3}{4} wL \right) \cdot v - \frac{wv^2}{2} \right) (2v) dv \\ &= \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64} \right) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64} \right) \quad (***) \end{aligned}$$

Từ (**) và (***) ta xác định độ võng tại A và cho bằng không :

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{L^3}{3} - \frac{wL^4}{8} \right) + \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64} \right) = 0 \\ R_A &= \frac{13wL}{32} (\uparrow) \end{aligned}$$

Thay vào biểu thức của R_B và R_C ta thu được :

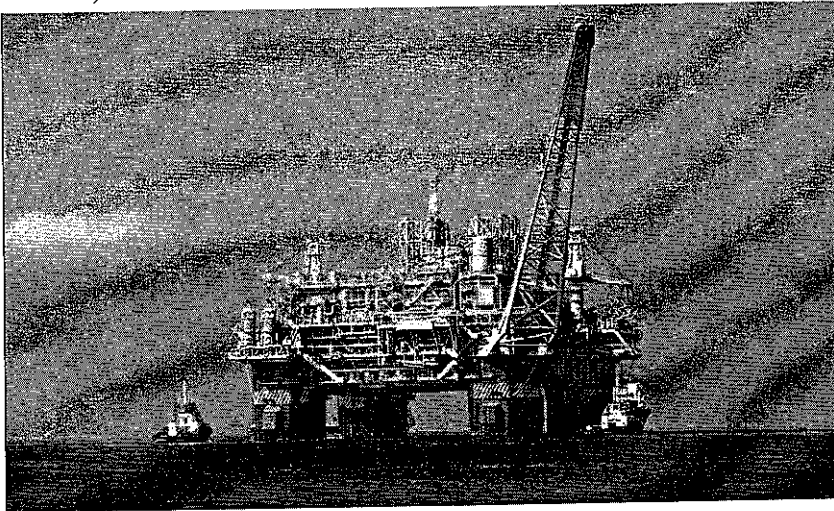
$$R_B = \frac{33wL}{32} (\uparrow) ; R_C = \frac{wL}{16} (\uparrow)$$

Bạn đọc có thể giải bài toán siêu tĩnh bằng phương pháp hàm gián đoạn đã trình bày ở chương 8.

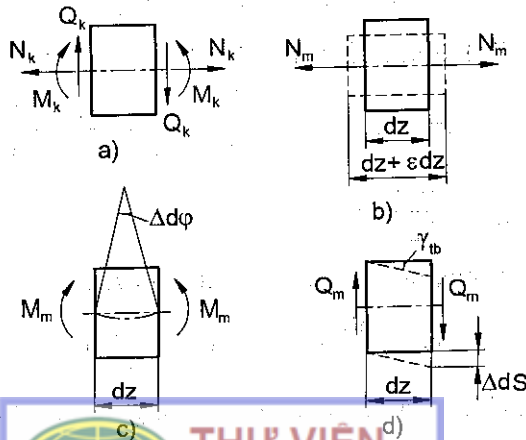


10.2.4. Công thức tính chuyển vị Mohr–Maxwell

Để tính chuyển vị của kết cấu chịu tác động của nhiều yếu tố ngoại lực khác nhau (ví dụ như dàn khoan dầu khí trên hình 10.14), ta phải để ý đến ảnh hưởng của tất cả các thành phần nội lực đến chuyển vị của hệ dựa theo nguyên lý cộng tác dụng. Hai hệ ở trạng thái « m » và « k » (hình 10.7) gọi là tương đương nếu như nội lực, ứng suất và chuyển vị của chúng là bằng nhau. Xét một phân tố có chiều dài vô cùng bé dz ở trạng thái « k », ta có chuyển vị khả dĩ của phân tố do lực dọc, lực cắt và mômen uốn N_k, V_k, M_k , hoàn toàn giống như chuyển vị khả dĩ ở trạng thái « m » $\Delta(dz); \Delta(ds); \Delta(d\varphi)$ (hình 10.15).



Hình 10.14. Dàn khoan dầu khí



Hình 10.15. Chuyển vị khả dĩ của phân tố do lực dọc, lực cắt và mômen uốn

Ta có các chuyển vị khả dĩ của phân tố xác định theo công thức :

$$\Delta(dz) = \varepsilon dz = \frac{N_m \cdot dz}{AE} \quad (a)$$

$$\Delta(d\varphi) = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_m \cdot dz}{EI} \quad (b)$$

$$\Delta(ds) = \gamma_{tb} \cdot dz = \eta \frac{V_m \cdot dz}{AG} \quad (c)$$

Trong đó : N_m, V_m, M_m là lực dọc, lực cắt và mômen uốn của phân tố dz ở trạng thái « m » ; η là hệ số phụ thuộc hình dạng của mặt cắt ngang ; E là môđun đàn hồi ; G là môđun trượt ; A là diện tích mặt cắt ngang và I là mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung tâm.

Công của ngoại lực ở trạng thái « k » trên các chuyển vị khả dĩ đối với phân tố đang xét (áp dụng nguyên lý về công khả dĩ) xác định như sau:

$$dA_{ng}^{km} = N_k \cdot \Delta(dz) + M_k \cdot \Delta(d\varphi) + V_k \cdot \Delta(ds) \quad (d)$$

$$dA_{ng}^{km} = -dA_n^{km} \quad (e)$$

$$A_{ng}^{km} = \sum_{i=1}^n P_{ik} \cdot \Delta_{km} = -A_n^{km} \quad (g)$$

Tích phân biểu thức (e) trên chiều dài của các thanh trong hệ, ta có :

$$\Rightarrow A_n^{km} = - \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \left[\frac{N_k^{(i)} \cdot N_m^{(i)}}{EA^{(i)}} + \frac{M_k^{(i)} \cdot M_m^{(i)}}{EI^{(i)}} + \eta \frac{V_k^{(i)} \cdot V_m^{(i)}}{GA^{(i)}} \right] dz \right\}$$

$$\text{Hay : } \Rightarrow A_{ng}^{km} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \left[\frac{N_k^{(i)} \cdot N_m^{(i)}}{EA^{(i)}} + \frac{M_k^{(i)} \cdot M_m^{(i)}}{EI^{(i)}} + \eta \frac{V_k^{(i)} \cdot V_m^{(i)}}{GA^{(i)}} \right] dz \right\} \quad (10.26)$$

Thay (10.26) vào (10.14) rồi chia cả 2 vế cho P_k ta được công thức tính chuyển vị của Mohr & Maxwell:

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \left\{ \frac{\bar{N}_k^{(i)} \cdot N_m^{(i)}}{E^{(i)} A^{(i)}} + \eta \frac{\bar{V}_k^{(i)} \cdot V_m^{(i)}}{G^{(i)} A^{(i)}} + \frac{\bar{M}_k^{(i)} \cdot M_m^{(i)}}{E^{(i)} I^{(i)}} \right\} dz \quad (10.27)$$

Trong đó : ℓ_i ($i = 1, \dots, n$) là chiều dài của thanh thứ i trong hệ.



$N_m^{(i)}; V_m^{(i)}; M_m^{(i)}$ là lực dọc, lực cắt, mômen uốn của thanh i do ngoại lực ở trạng thái “ m ” gây nên.

$N_k^{(i)}; V_k^{(i)}; M_k^{(i)}$ là lực dọc, lực cắt, mômen uốn của thanh i do lực $P_k = 1$ ở trạng thái “ k ” gây nên.

$G^{(i)}A^{(i)}; E^{(i)}I^{(i)}$ là độ cứng của thanh thứ i khi chịu kéo (nén), cắt, uốn.

10.3. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ Vê-rê-sa-ghin

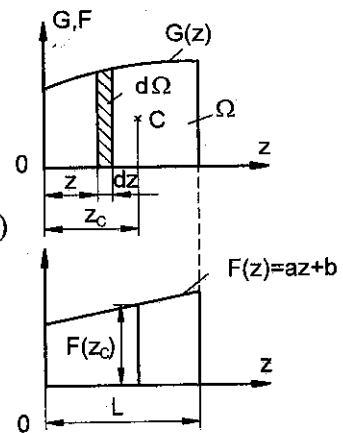
Giả sử ta có đồ thị của hai hàm số $G(z)$ và $F(z)$, trong đó hàm $F(z)$ là bậc một đối với z :

$F(z) = az + b$. Với a, b là hằng số :

Xét tích phân :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l F(z).G(z)dz = \int_0^l (az + b).G(z)dz \\ &= \int_{\Omega} (az + b)d\Omega = a \int_{\Omega} zd\Omega + \int_{\Omega} bd\Omega \quad (10.28) \\ &= a\Omega.z_C + b\Omega = (az_C + b).\Omega \\ &= \Omega.F(z_C) \end{aligned}$$

Trong đó : Ω là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hàm số bất kỳ $G(z)$, $F(z_C)$ là tung độ của hàm $F(z)$ tại vị trí tương ứng với trọng tâm C của diện tích Ω (hình 10.16).



Hình 10.16

Chú ý : + Nếu cả hai biểu đồ đều là hàm bậc nhất của z thì ta có thể hoán vị khi nhân biểu đồ theo Vê-rê-sa-ghin.

+ Nếu diện tích Ω gồm các hình ghép lại, khi nhân biểu đồ ta có thể nhân từng diện tích thành phần với tung độ tại vị trí trọng tâm tương ứng của biểu đồ bậc nhất $F(z)$.

+ Khi đặt lực đơn vị hoặc mômen đơn vị ở trạng thái « k » ta có thể cho chiều tùy ý, nếu kết quả nhân biểu đồ là dương, chuyển vị /góc xoay sẽ cùng chiều với lực/mômen đơn vị đó.

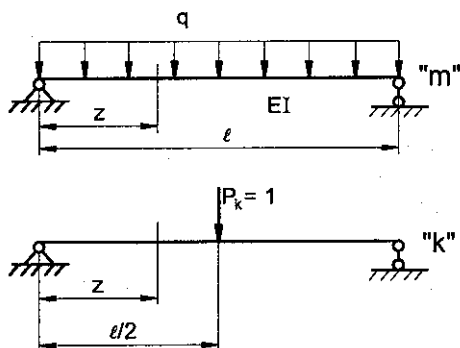
Ví dụ 10.7: Tính chuyển vị theo phương thẳng đứng của điểm giữa dầm, cho $EI = \text{const}$ (hình 10.17).

Giải : Xét mặt cắt bất kỳ $0 \leq z \leq l$, ta có:

$$M_{xm} = \frac{1}{2}q(\ell z - z^2); \bar{M}_{xk} = \frac{1}{2}z$$

Thay vào công thức (10.27), bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt, tích phân theo z từ 0 đến $\ell/2$, ta có :

$$y|_{z=\frac{\ell}{2}} = \frac{2}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2}q(\ell z - z^2) \cdot \frac{1}{2}z dz = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$



Hình 10.17

Đối với các biểu đồ nội lực là đường cong, ta sử dụng bảng 10.2 để tính diện tích và trọng tâm.

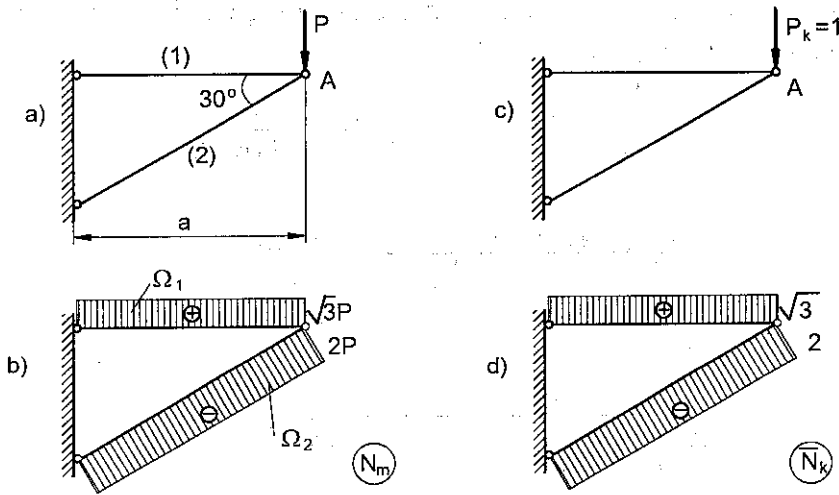
Bảng 10.2. Diện tích và trọng tâm của một số hình đơn giản

<p>Bậc 2</p>	$\Omega = \frac{1}{3}h\ell$ $z_1 = \frac{1}{4}\ell; z_2 = \frac{3}{4}\ell$
<p>Bậc 2</p>	$\Omega = \frac{2}{3}h\ell$ $z_1 = \frac{3}{8}\ell; z_2 = \frac{5}{8}\ell$
<p>Bậc 3</p>	$\Omega = \frac{1}{4}h\ell$ $z_1 = \frac{1}{5}\ell; z_2 = \frac{4}{5}\ell$
<p>Bậc n</p>	$\Omega = \frac{1}{n+1}h\ell$ $z_1 = \frac{1}{n+2}\ell; z_2 = \frac{n+1}{n+2}\ell$



THƯ VIỆN
HUBT

Ví dụ 10.8: Tính chuyển vị theo phương thẳng đứng của điểm A, các thanh có cùng độ cứng $AE = \text{const}$ (hình 10.18a).



Hình 10.18

Giải :

Bằng phương pháp tách nút tại A, ta xác định được lực dọc trong các thanh 1, 2 do ngoại lực (hình 10.18b) và lực đơn vị (hình 10.18c,d) gây nên. Áp dụng phương pháp nhân biểu đồ của Vê-rê-sa-ghin đối với hệ thanh chịu kéo/nén, ta có chuyển vị thẳng đứng tại A:

$$y_A = \frac{1}{AE} \left(\sqrt{3} Pa \cdot \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} Pa \cdot 2 \right) = \frac{Pa}{AE} \left(3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) (\downarrow)$$

10.4. GIẢI HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC ĐƠN VỊ

10.4.1. Hệ siêu tĩnh

– Nếu số ẩn số (là các phản lực liên kết, hoặc nội lực trong hệ) lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học, thì hệ gọi là siêu tĩnh. Bậc siêu tĩnh bằng số phản lực liên kết trừ đi số phương trình cân bằng tĩnh học.

– Đối với hệ dàn phẳng, nếu gọi s là số thanh, k là số khớp trong hệ, thì bậc siêu tĩnh bằng :

$$n = s - (2k - 3) \quad (10.29)$$

– Nếu kể cả liên kết giữa hệ với quả đất thì:

$$n = s^* - 2k^* \quad (10.30)$$

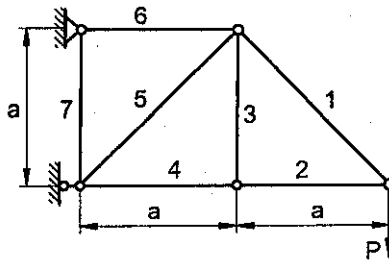
Trong đó : s^* là số thanh (kể cả liên kết với quả đất)

k^* là số khớp (kể cả liên kết với quả đất)

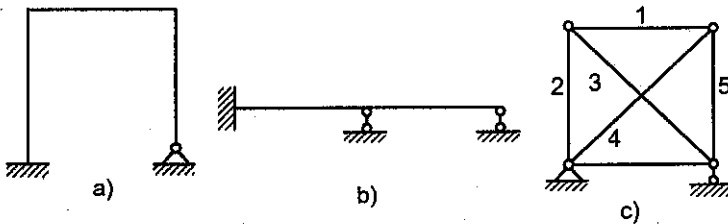
Ví dụ hệ dàn trong hình 10.19 có $s = 7$, $k = 5$, ta có $7 = 2.5 - 3$, hệ là tĩnh định.

Nếu số liên kết đơn thừa là liên kết giữa hệ với quả đất, ta gọi là *siêu tĩnh ngoại*, còn nếu đó là liên kết giữa các phần tử trong hệ, ta gọi là *siêu tĩnh nội*.

Ví dụ trên hình 10.20a, b là hệ siêu tĩnh ngoại bậc hai, còn trên hình 10.20c là hệ siêu tĩnh nội bậc một.



Hình 10.19



Hình 10.20

10.4.2. Hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh

– Hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh đã cho là *hệ tĩnh định thu được bằng cách bỏ bớt các liên kết đơn thừa đi*.

– *Hệ tĩnh định tương đương* với hệ siêu tĩnh đã cho là hệ có nội lực, ứng suất, chuyển vị tại mọi điểm giống như của hệ siêu tĩnh đó.



$q\ell^2/2$ (10.32) là chuyển vị theo phương của lực X_i do lực $X_i = 1$ gây nên trên hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh đã cho.

$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI}(\overline{M}_i).(M_p)$ (10.33) là chuyển vị theo phương của lực X_i do ngoại lực gây nên trên hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh đã cho.

Sau khi tìm được các phản lực liên kết X_1, X_2, \dots, X_n , biểu đồ mômen uốn của hệ siêu tĩnh đã cho có thể xác định bằng cách cộng các biểu đồ mômen uốn do ngoại lực và do các phản lực liên kết gây nên:

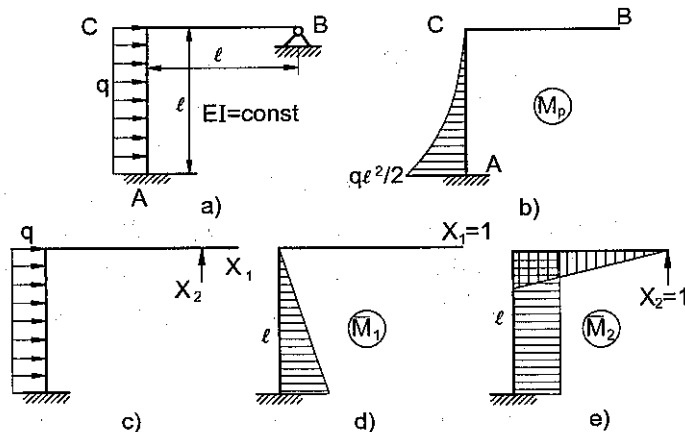
$$M_x = M_p + \overline{M}_1 . X_1 + \overline{M}_2 . X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n \quad (10.34)$$

Chuyển vị của hệ siêu tĩnh xác định theo công thức nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin:

$$\Delta_{km} = \frac{(M_x).(\overline{M}_k)}{EI} \quad (10.35)$$

Trong đó (\overline{M}_k) là biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "k" trên hệ cơ bản bất kỳ của hệ siêu tĩnh đã cho.

Ví dụ 10.9: Vẽ biểu đồ mômen uốn và tính chuyển vị theo phương thẳng đứng tại điểm giữa của thanh CB (hình 10.22a).



Hình 10.22

Giải : Đây là hệ siêu tĩnh bậc hai, ta chọn hệ cơ bản như hình 10.22b, hệ phương trình chính tắc có dạng sau :



$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Các hệ số thu được từ phép nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin :

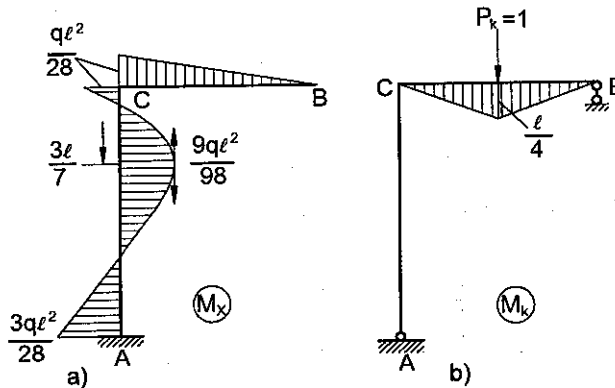
$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{3EI}; \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell^3}{2EI}; \delta_{22} = \frac{4\ell^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{q\ell^4}{8EI}; \Delta_{2p} = -\frac{q\ell^4}{6EI}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{3q\ell}{7}; X_2 = -\frac{q\ell}{28} \text{ (chiều của } X_2 \text{ ngược lại hình vẽ).}$$

Biểu đồ M_x thu được bằng cách cộng các biểu đồ mômen do ngoại lực và các phản lực liên kết gây nên và có dạng như hình 10.23a :

$$M_x = \{(M_p) + (\bar{M}_1 \cdot X_1) + (\bar{M}_2 \cdot X_2)\}$$



Hình 10.23

Độ võng tại điểm giữa thanh CB thu được bằng cách tạo trạng thái « K » do lực $P_K = 1$ đặt tại điểm đó trên hệ cơ bản bất kỳ của hệ siêu tĩnh đã cho (hình 10.23b). Nhân biểu đồ mômen ở trạng thái « m » với mômen ở trạng thái « k » ta thu được :

$$y_c = \frac{1}{EI} \{(M_p)(\bar{M}_K) + (\bar{M}_1 \cdot X_1)(\bar{M}_K) + (\bar{M}_2 \cdot X_2)(\bar{M}_K)\}$$

$$\text{Hay : } y_c = -\frac{q\ell^4}{488EI} \text{ (}\uparrow\text{)}$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại bằng cách tạo trạng thái « k » trên hệ cơ bản khác của hệ siêu tĩnh đã cho, kết quả chuyển vị tại C vẫn không thay đổi.

Ví dụ 10.10: Tính chuyển vị của điểm A theo phương thẳng đứng, biết độ cứng và chiều dài các thanh như hình 10.24a.

Giải: Hệ siêu tĩnh nội bậc một, ta chọn hệ cơ bản bằng cách thay khớp đôi ở giữa bằng liên kết đơn theo phương ngang và phản lực liên kết theo phương thẳng đứng X_1 (hình 10.24b).

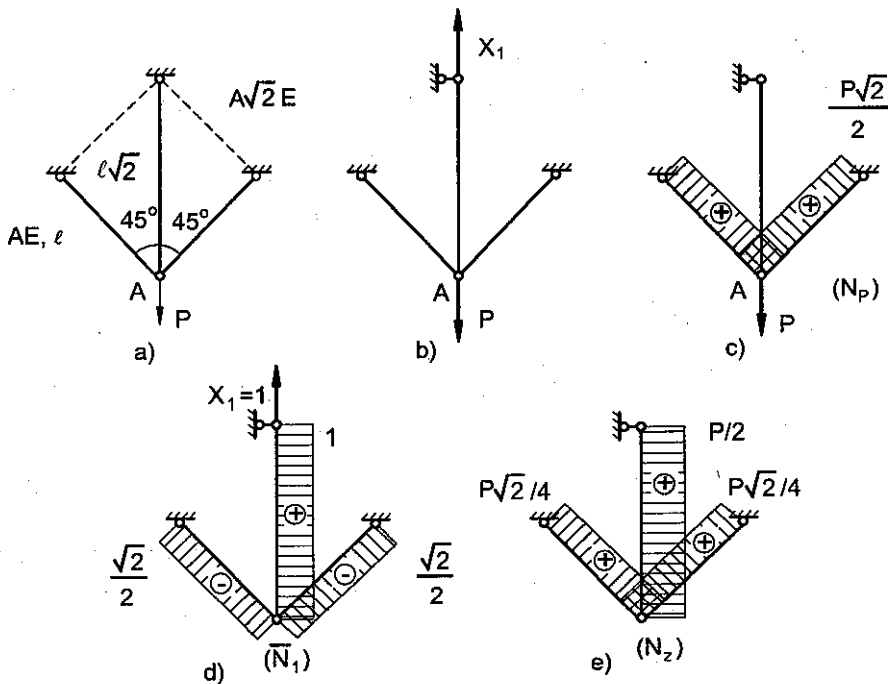
Các biểu đồ lực dọc N_P, N_1 biểu diễn như trên hình 10.24c, d).

Phương trình chính tắc có dạng : $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

Các hệ số xác định theo công thức : $\delta_{11} = \frac{2\ell}{AE}$; $\Delta_{1P} = -\frac{P\ell}{AE}$; $\Rightarrow X_1 = \frac{P}{2}$

Cộng các biểu đồ (N_P) với (N_1). X_1 ta được biểu đồ lực dọc N_z của hệ đã cho (hình 10.12e). Nhân biểu đồ lực dọc ở trạng thái « m » với biểu đồ ở trạng thái « k » theo Vê-rê-sa-ghin, ta có chuyển vị của điểm A theo phương

thẳng đứng : $y_A = \sum_i \frac{(N_{iP} \overline{N_{ik}}) \cdot \ell_i}{AE_i} = \frac{2}{AE} \frac{P\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = \frac{P\ell}{2AE} (\downarrow)$



Hình 10.24

Ví dụ 10.11: Tính góc xoay tại điểm C của hệ chịu liên kết và tải trọng như hình 10.25a.



Giải : Hệ siêu tĩnh bậc một, ta chọn hệ cơ bản như hình 10.25b.

Phương trình chính tắc có dạng :

$$AE = \frac{EIa}{\ell^3} \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2} \frac{P\ell}{2} \frac{\ell}{2} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = -\frac{X_1 \cdot a}{AE} \quad (\text{dấu trừ ở vế phải để chi thanh}$$

AD bị co lại, ngược chiều với chuyển vị tại A trên dầm AB theo chiều của X_1).

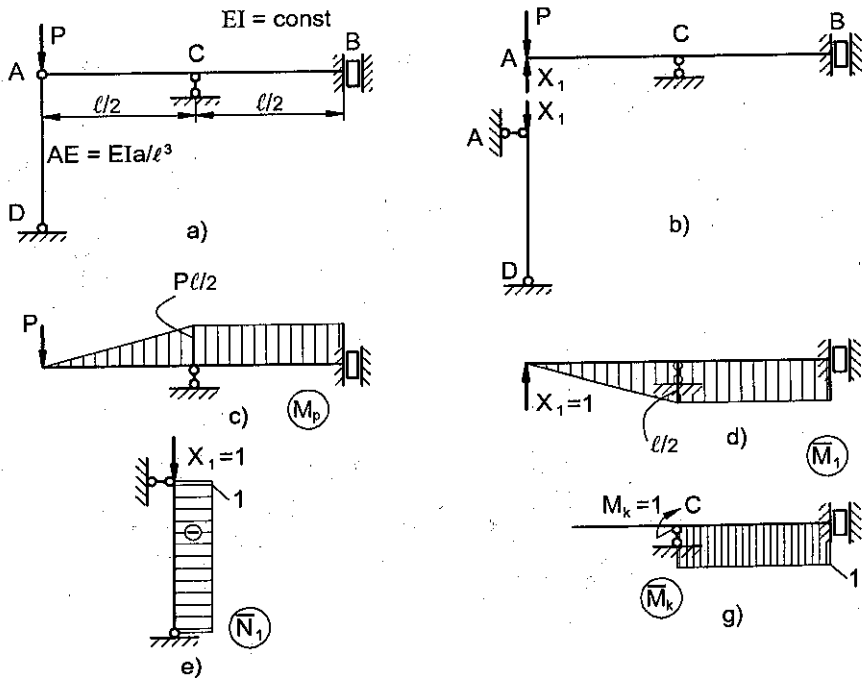
Các hệ số xác định theo công thức :

$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{6EI}; \Delta_{1P} = -\frac{P\ell^3}{6EI} \Rightarrow X_1 = \frac{P}{7}$$

Nhân biểu đồ mômen uốn ở trạng thái « m » với biểu đồ ở trạng thái « k » ta có góc xoay tại C xác định theo công thức :

$$\theta_C = \left\{ (M_P) \cdot (\overline{M_K}) + (M_1 \cdot X_1) \cdot (\overline{M_K}) \right\} = -\frac{3P\ell^3}{14EI}$$

Dấu trừ chứng tỏ mặt cắt tại C quay ngược chiều với mômen $\overline{M_K} = 1$



Hình 10.25



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

10.4.4. Hệ siêu tĩnh đối xứng

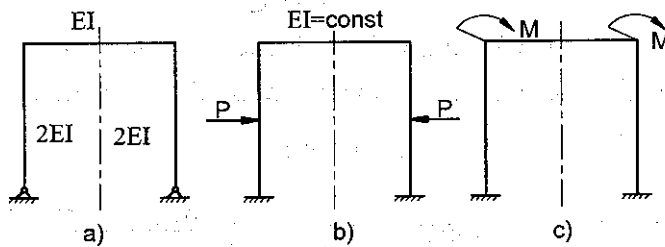
Hệ siêu tĩnh gọi là đối xứng nếu như thỏa mãn các điều kiện đối xứng về liên kết, về hình học và về độ cứng qua gương phẳng đặt trong mặt phẳng đối xứng của hệ (hình 10.26a).

a) Tải trọng đối xứng

Nếu tải trọng tác dụng trên một phần của hệ là ảnh của tải trọng tác dụng lên phần kia qua gương phẳng đặt trong mặt phẳng đối xứng của hệ (hình 10.26b) thì gọi là tải trọng đối xứng.

b) Tải trọng phản đối xứng

Nếu tải trọng tác dụng trên một phần của hệ là ảnh của tải trọng tác dụng lên phần kia qua gương phẳng đặt trong mặt phẳng đối xứng của hệ, nhưng có chiều ngược lại (hình 10.26c) thì gọi là tải trọng phản đối xứng.



Hình 10.26

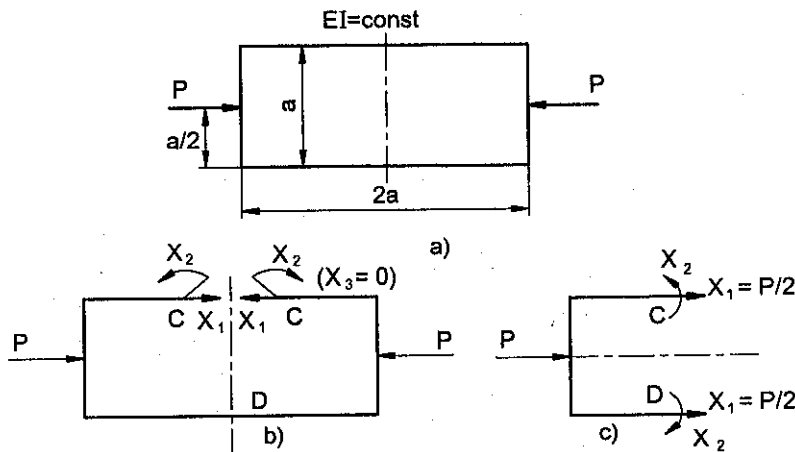
Tính chất :

- Nếu tải trọng là đối xứng thì biểu đồ mômen uốn cũng đối xứng.
- Nếu tải trọng là phản đối xứng thì biểu đồ mômen uốn cũng phản đối xứng.
- Phép nhân Vê-rê-sa-ghin của biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản đối xứng là bằng không.
- Nếu một hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng đối xứng, thì nội lực phản đối xứng (lực cắt) tại mặt cắt trên mặt phẳng đối xứng của hệ là bằng không.
- Nếu một hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng, thì nội lực đối xứng (lực dọc và mômen uốn) tại mặt cắt trên mặt phẳng đối xứng của hệ là bằng không.

Ban đọc



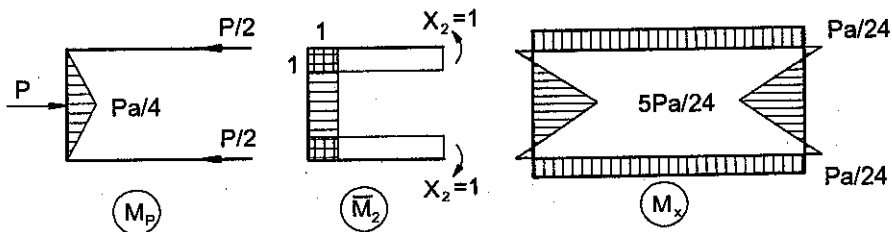
Ví dụ 10.12: Vẽ biểu đồ mômen uốn của khung chữ nhật khép kín chịu tải trọng như hình 10.27a.



Hình 10.27

Giải : Đây là hệ siêu tĩnh nội bậc 3 chịu tải trọng đối xứng, ta chọn hệ cơ bản như hình 10.27b. Phương trình chính tắc đối với mômen X_2 có dạng :

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0$$



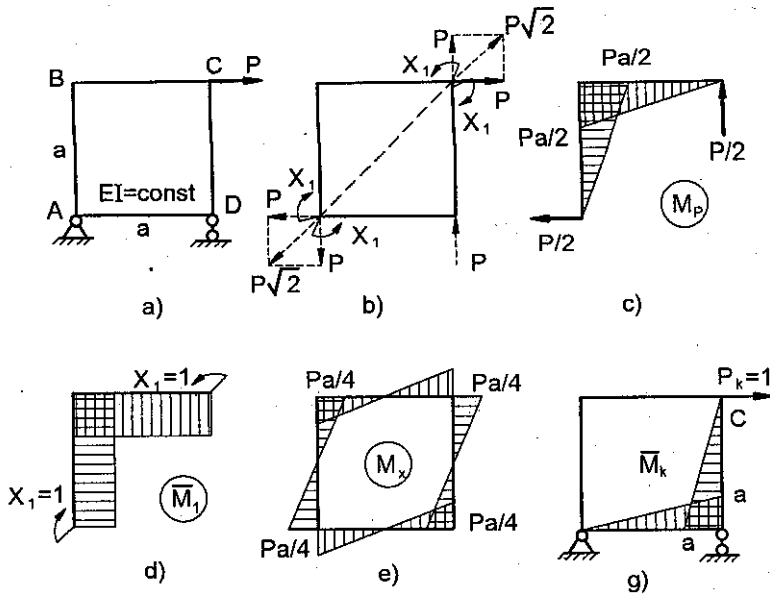
Hình 10.28

Giải phương trình với các hệ số :

$$\delta_{22} = \frac{3a}{EI} ; \Delta_{2P} = \frac{Pa^2}{8EI} ; \text{ta tìm được : } X_2 = -\frac{Pa}{24}$$

Biểu đồ mômen uốn M_x thu được bằng cách cộng biểu đồ như trên hình 10.28.

Ví dụ 10.13 : Vẽ biểu đồ mômen uốn và tính chuyển vị theo phương ngang tại điểm C của khung như hình 10.29a.



Hình 10.29

Giải : Hệ siêu tĩnh nội bậc một, do tính chất đối xứng nên ta chọn hệ cơ bản như hình 10.29b. Các biểu đồ mômen uốn do ngoại lực M_p , do mômen đơn vị M_1 như trên hình 10.29c, d. Giải phương trình chính tắc :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Với các hệ số :

$$\delta_{22} = \frac{3a}{EI} ; \Delta_{2P} = \frac{Pa^2}{8EI} ; \text{ ta thu được : } X_1 = \frac{P}{4}$$

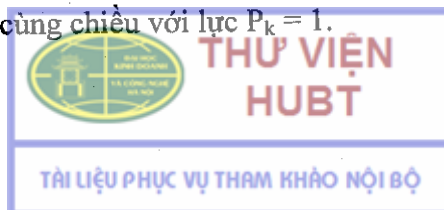
$$X_2 = -\frac{Pa}{24}$$

Cộng biểu đồ M_p và $(\bar{M}_1) \cdot X_1$ ta thu được biểu đồ M_x như hình 10.29e.

Tạo trạng thái « k » bằng cách đặt lực đơn vị theo phương ngang tại C trên hệ cơ bản (hình 10.29g), nhân biểu đồ theo Vê-rê-sa-ghin ta có :

$$x_c = \frac{1}{EI} (M_x)(\bar{M}_k) = 2 \cdot \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Pa}{4} \cdot a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} \frac{Pa}{4} \cdot a \cdot \frac{1}{3} a \right\} = \frac{Pa^3}{12EI} (\rightarrow)$$

Chuyển vị tại C cùng chiều với lực $P_k = 1$.



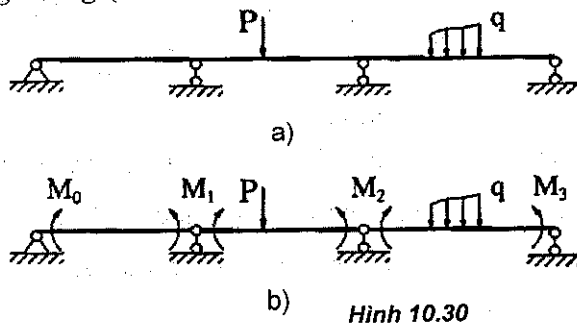
10.5. DẦM LIÊN TỤC

10.5.1. Định nghĩa

Dầm liên tục là dầm đặt trên các gối tựa đơn liên tiếp. Khoảng cách giữa hai gối tựa liên tiếp gọi là *nhịp*. Bậc siêu tĩnh bằng số nhịp trừ đi một đơn vị (hình 10.30a).

10.5.2. Hệ cơ bản của dầm liên tục

Thay các gối tựa đơn trung gian bằng các khớp liên hợp và đặt điều kiện đối với mômen uốn tại khớp phải có giá trị sao cho góc xoay tại đó phải bằng không (hình 10.30b).



Hình 10.30

10.5.3. Phương trình ba mômen

Xét hai nhịp kế tiếp nhau có chiều dài l_i và l_{i+1} , mômen uốn tại các gối tựa lần lượt là M_{i-1}, M_i, M_{i+1} . Biểu đồ mômen uốn do ngoại lực gây nên có diện tích tương ứng là Ω_i và Ω_{i+1} với vị trí trọng tâm đã biết (hình 10.31a, b).

Do góc xoay tại gối tựa thứ i không bị ảnh hưởng của các mômen đặt tại các gối tựa khác hai nhịp kế tiếp đang xét, nên ta có phương trình chính tắc đối với gối tựa thứ i có dạng :

$$\delta_{i,i-1} M_{i-1} + \delta_{i,i} M_i + \delta_{i,i+1} M_{i+1} + \Delta_{iP} = 0 \quad (10.36)$$

Biểu đồ mômen uốn đơn vị trên các gối tựa thứ “ $i-1$ ”, “ i ” và “ $i+1$ ” biểu diễn trên hình 10.31c, d, e. Nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin ta có các hệ số của phương trình chính tắc (10.36) có dạng sau:



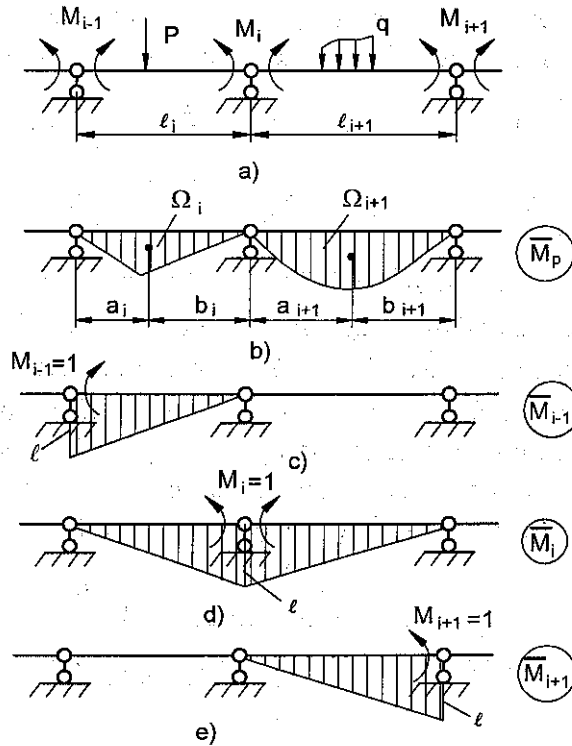
$$\delta_{i,i-1} = \frac{l_i}{6EI_i}; \delta_{i,i} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}}; \delta_{i,i+1} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}$$

$$\Delta_{iP} = \frac{\Omega_i a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}}$$

Trong đó:

a_i là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích Ω_i đến gối tựa thứ “ $i-1$ ”.

b_{i+1} là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích Ω_{i+1} đến gối tựa thứ “ $i+1$ ”.



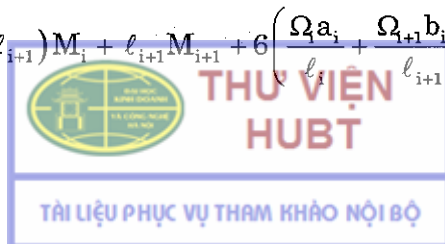
Hình 10.31

Phương trình (10.36) trở thành :

$$\frac{l_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} + \left(\frac{\Omega_i a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) = 0 \quad (10.37)$$

Trong trường hợp dầm có độ cứng EI không đổi trên toàn chiều dài của dầm, ta có :

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} + 6 \left(\frac{\Omega_i a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) = 0 \quad (10.38)$$



Phương trình (10.37 – 10.38) gọi là *phương trình ba mômen*. Giải hệ n phương trình dạng (10.37) đối với hệ siêu tĩnh bậc n, ta có thể tìm được các mômen phản lực liên kết tại các gối tựa. Áp dụng phương pháp cộng tác dụng ta có biểu đồ mômen uốn và chuyển vị của dầm liên tục theo công thức (10.34) và (10.35), từ đó có thể xác định ứng suất lớn nhất để kiểm tra điều kiện bền của dầm.

Ví dụ 10.14: Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt của dầm liên tục sau (hình 10.32a). Biết độ cứng $EI = \text{const}$.

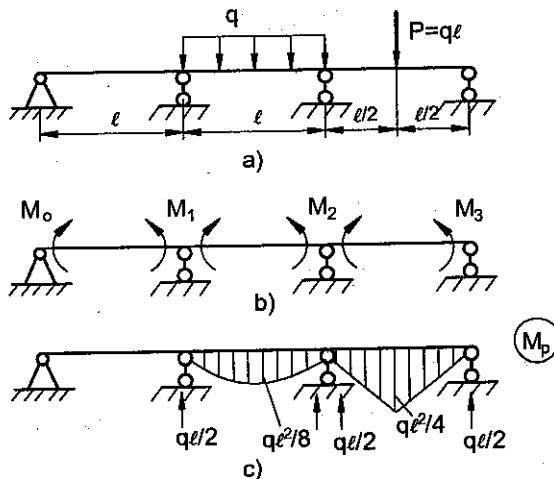
Giải: Hệ siêu tĩnh bậc hai, ta chọn hệ cơ bản và vẽ biểu đồ mômen uốn do ngoại lực gây nên (hình 10.32b,c). Hệ phương trình chính tắc có dạng sau:

$$\begin{cases} \ell M_0 + 2(\ell + \ell)M_1 + \ell M_2 + 6 \cdot \frac{2}{3} \frac{q\ell^3}{8} \frac{\ell/2}{\ell} = 0 \\ \ell M_1 + 2(\ell + \ell)M_2 + \ell M_3 + 6\left(\frac{2}{3} \frac{q\ell^3}{8} \frac{\ell/2}{\ell} + \frac{1}{2} \frac{q\ell^3}{4} \frac{\ell/2}{\ell}\right) = 0 \end{cases}$$

Thay $M_0 = 0$, $M_3 = 0$, giải ra ta tìm được: $M_1 = -q\ell^2/40$ và $M_2 = -3q\ell^2/20$.
 dấu trừ chứng tỏ các mômen này làm căng thớ trên của dầm (hình 10.33a, b).

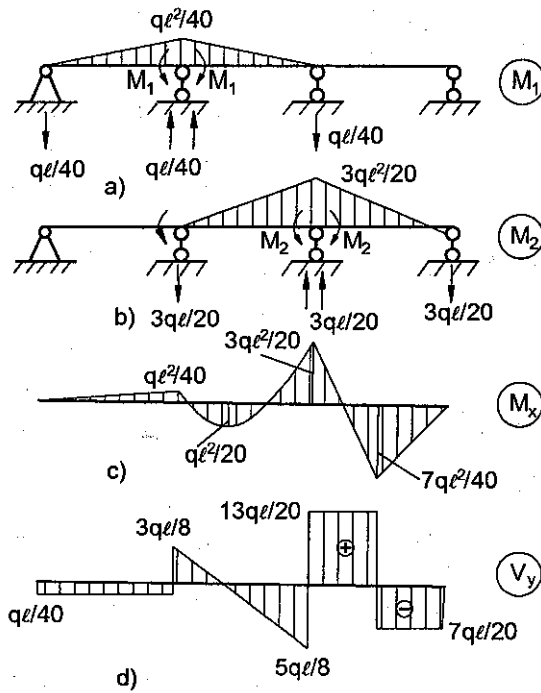
Biểu đồ mômen uốn M_x và lực cắt V_y biểu diễn trên hình 10.33 c, d).

Chú ý rằng từ biểu đồ của mômen M_x ta có thể coi mỗi nhịp như một dầm đơn riêng rẽ chịu tác dụng của ngoại lực phân bố trên nhịp và mômen tập trung ở hai gối tựa, từ đó có thể xác định được phản lực liên kết rồi vẽ biểu đồ lực cắt của nhịp, sau đó ghép lại thành biểu đồ V_y của dầm liên tục.



Hình 10.32

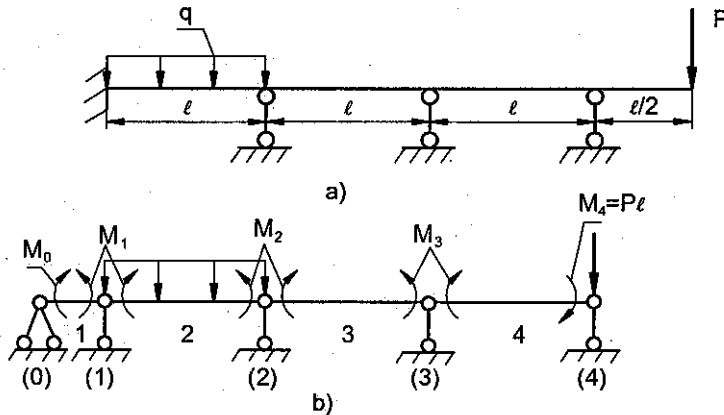




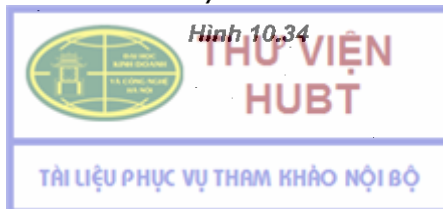
Hình 10.33

10.5.4. Trường hợp dầm có một đầu ngàm, một đầu thừa

Ta chọn hệ cơ bản bằng cách thay đầu ngàm bằng dầm đơn có độ cứng bằng vô cùng và chiều dài bằng không, còn lực tác dụng trên đầu thừa đưa về gối tựa cuối cùng (hình 10.34 b), rồi giải bằng phương trình ba mômen.



Hình 10.34



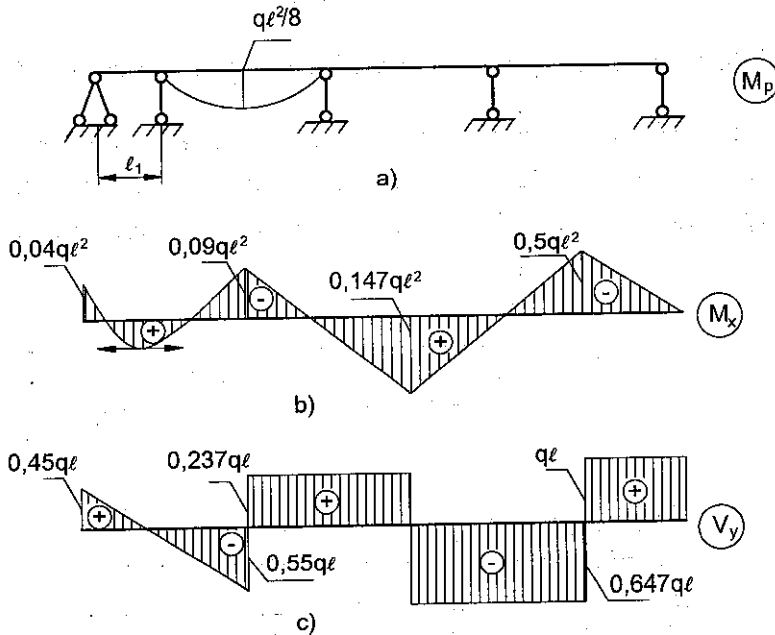
Ví dụ 10.9 : Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt của dầm chịu lực như hình 10.34a). Biết độ cứng $EI = \text{const}$.

Giải : Hệ phương trình chính tắc có dạng :

$$\begin{cases} \ell_0 M_0 + 2(\ell + \ell)M_1 + \ell M_2 + 6 \cdot \frac{2}{3} \frac{q\ell^3}{8} \frac{\ell/2}{\ell} = 0 \\ \ell M_1 + 2(\ell + \ell)M_2 + \ell M_3 + 6 \cdot \frac{2}{3} \frac{q\ell^3}{8} \frac{\ell/2}{\ell} = 0 \\ \ell M_2 + 2(\ell + \ell)M_3 + \ell M_4 = 0 \end{cases}$$

Biểu đồ mômen uốn M_p do ngoại lực gây nên trên hệ cơ bản biểu diễn trên hình (10.35a).

Giải hệ trên, thay $\ell_0 = 0$, $M_4 = -\frac{q\ell^2}{2}$ ta tìm được : $M_1 = -0,04q\ell^2$;
 $M_2 = -0,09q\ell^2$; $M_3 = 0,147q\ell^2$; Tại khớp cuối cùng bên phải dầm ta có:
 $M_4 = -0,5q\ell^2$. Biểu đồ mômen uốn và lực cắt biểu diễn trên hình 10.35b, c.



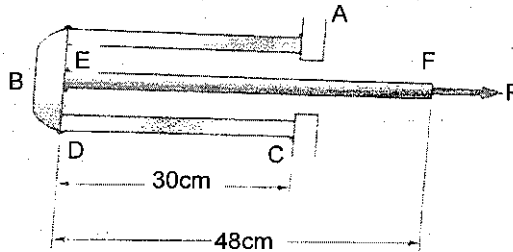
Hình 10.35



BÀI TẬP CHƯƠNG 10

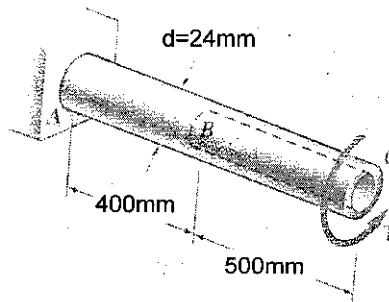
10.1. Ống CD bằng nhôm có chiều dài 30cm, diện tích mặt cắt ngang $1,85\text{cm}^2$ được hàn với đầu B cố định và đầu A (hình BT10.1). Thanh thép EF có đường kính 0,75cm, chiều dài 48cm chịu kéo bởi lực $P = 10\text{kN}$. Biết môđun đàn hồi của nhôm là $10,6 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$, của thép là $29 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$. Xác định :

- Năng lượng biến dạng toàn phần của hệ thanh,
- Mật độ năng lượng biến dạng trong ống CD và thanh EF.



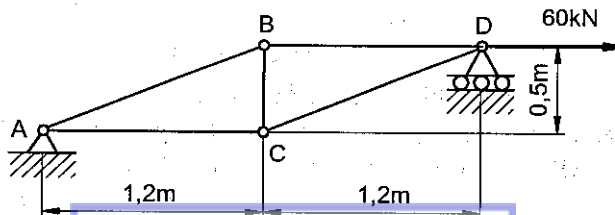
Hình BT10.1

10.2. Thanh AC bằng thép chịu mômen xoắn T tại C (hình BT10.2), đoạn BC có mặt cắt hình vành khăn với bán kính trong là 16mm, bán kính ngoài là 24mm. Biết môđun trượt $G = 73\text{GPa}$ xác định năng lượng biến dạng toàn phần, nếu ứng suất tiếp lớn nhất bằng 120MPa.



Hình BT10.2

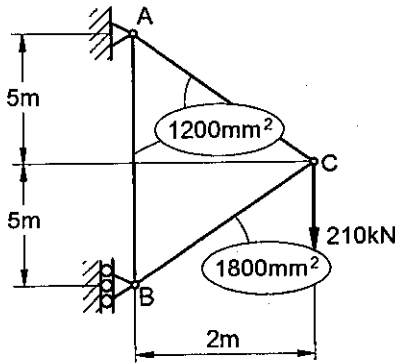
10.3. Cho hệ dàn chịu lực như hình BT10.3, biết mọi thanh đều cùng vật liệu có $E = 200\text{GPa}$, mặt cắt ngang của thanh BC bằng 800mm^2 , còn các thanh khác bằng 400mm^2 . Xác định chuyển vị ngang tại D.



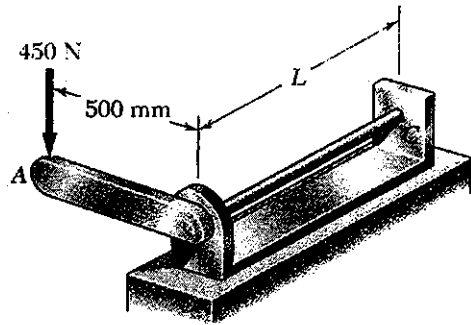
Hình BT10.3



10.4. Cho hệ dàn chịu lực như hình BT10.4, biết mọi thanh đều cùng vật liệu có $E = 200\text{GPa}$, mặt cắt ngang của thanh AB và AC bằng 1200mm^2 , còn thanh BC bằng 1800mm^2 . Xác định chuyển vị thẳng đứng tại C.



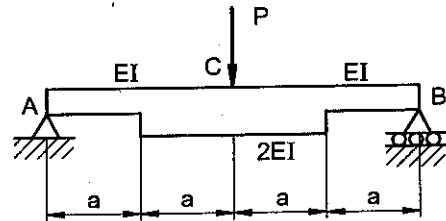
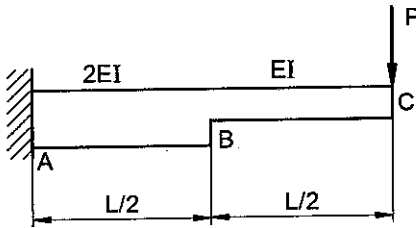
Hình BT 10.4



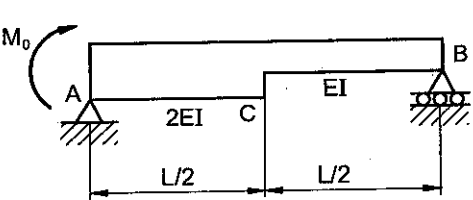
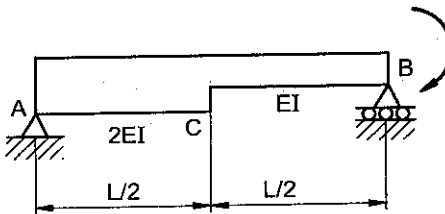
Hình BT 10.5

10.5. Thanh BC có đường kính bằng 20mm được gắn với tay đòn AB (hình BT 10.5) có kích thước mặt cắt ngang $10 \times 30\text{mm}$, cho $L = 600\text{mm}$, $E = 200\text{GPa}$, $G = 77,2\text{GPa}$. Xác định độ võng tại A.

10.6–10.9. Cho dầm có độ cứng EI thay đổi, chịu lực như hình vẽ, xác định độ võng tại C (bài 10.6&7), góc xoay tại B (bài 10.8&9).



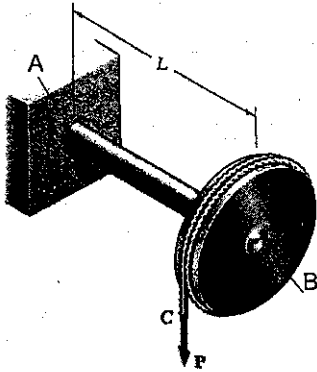
Hình BT 10.6&7



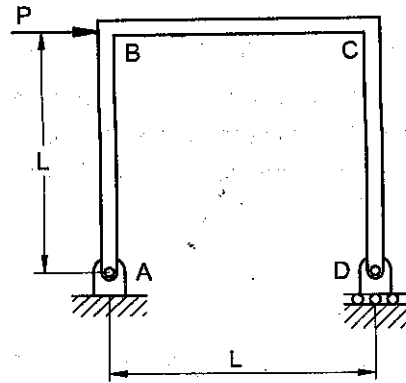
Hình BT 10.8&9

10.10. Đĩa tròn có bán kính a được hàn tại đầu B của thanh AB. Dây cáp được cuốn quanh đĩa, đầu dây chịu lực P theo phương thẳng đứng (hình BT 10.10). Biết bán kính của thanh AB là r và bỏ qua biến dạng của đĩa và dây cáp, chứng minh rằng

chuyển vị tại điểm C do lực P gây nên bằng: $y_C = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + 1,5 \frac{Er^2}{GL^2} \right)$



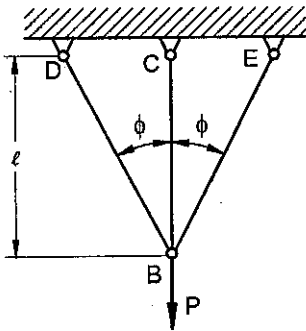
Hình BT10.10



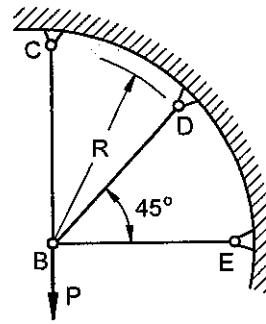
Hình BT10.11

10.11. Xác định chuyển vị tại gối di động D (hình BT10.11), biết độ cứng EI của hệ bằng hằng số.

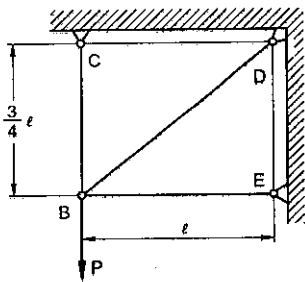
10.12–10.14. Biết các thanh trong hệ cùng vật liệu và mặt cắt ngang, xác định nội lực trong thanh BC (hình BT10.12–10.13), thanh AB và BC (hình BT10.14).



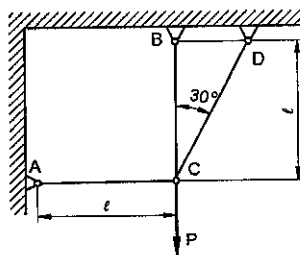
Hình BT10.12



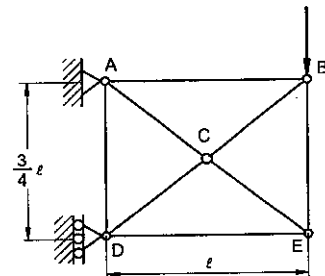
Hình BT10.13



Hình BT10.14



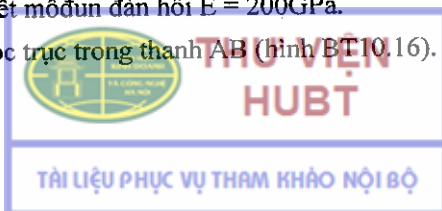
Hình BT10.15



Hình BT10.16

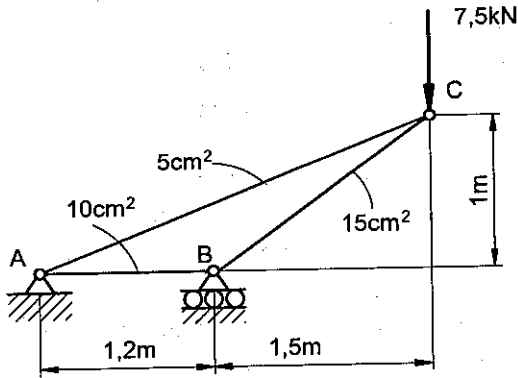
10.15. Xác định chuyển vị theo phương thẳng đứng và nằm ngang của điểm C (hình BT10.15), cho biết môđun đàn hồi $E = 200\text{GPa}$.

10.16. Tính lực dọc trục trong thanh AB (hình BT10.16).

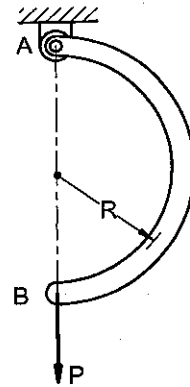


10.17. Cho hệ dàn gồm các thanh AB, BC, AC có mặt cắt ngang như hình BT10.17, $E = 200\text{GPa}$; xác định chuyển vị thẳng đứng và nằm ngang của điểm C

10.18. Tính chuyển vị theo phương thẳng đứng của điểm B đối với thanh có dạng nửa đường tròn bán kính R (hình BT10.18), mặt cắt ngang không đổi, môđun đàn hồi E (gợi ý : áp dụng định lý Castigliano).



Hình BT10.17



Hình BT10.18

Chương 11

HỆ CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG

11.1. KHÁI NIỆM

Trong các chương trước, ta đã xét kết cấu chịu tác dụng của tải trọng đặt lên hệ một cách từ từ, không gây nên gia tốc cho hệ, gọi là *tải trọng tĩnh*. Trong thực tế, lực hoặc ngẫu lực có thể đặt lên hệ một cách đột ngột (xung lực hay va chạm), hoặc là hàm số của thời gian (ví dụ, xe chạy trên cầu, gió hoặc sóng tác dụng lên kết cấu...), gây nên ứng suất và chuyển vị cũng là hàm số phụ thuộc vào thời gian, ta gọi đó là *tải trọng động*, ứng suất và chuyển vị do tải trọng động gây nên gọi là *ứng suất động* và *chuyển vị động* tương ứng. Bằng phương pháp năng lượng, với việc ứng dụng các định luật cơ bản như định luật bảo toàn động lượng, định luật bảo toàn năng lượng, ta có thể đưa hệ về dạng chịu *tải trọng tĩnh tương đương*, hay nói cách khác, biến bài toán động thành bài toán tĩnh tương đương rồi nhân với hệ số động để xác định ứng suất và chuyển vị của hệ.

11.2. HỆ CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC LÀ HẰNG SỐ

11.2.1. Chuyển động với gia tốc không đổi

Xét một vật nặng P được kéo lên theo phương thẳng đứng với gia tốc không đổi $w = \text{const}$. Trọng lượng vật nặng là P , diện tích mặt cắt ngang của dây cáp là A .

Xét mặt cắt ngang 1-1 của dây (hình 11.1), lực dọc động N_d xác định theo nguyên lý Đa-lăm-be như sau :

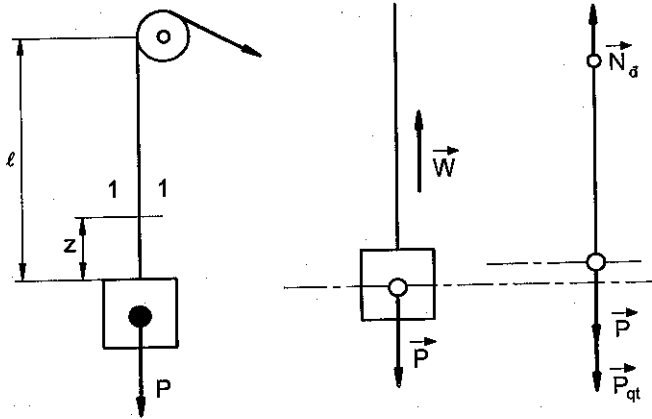
$$N_d = P + P_{qt} = P \left(1 + \frac{w}{g} \right) \quad (11.1)$$

$$\vec{P}_{qt} = -m \cdot \vec{w} \quad (11.2)$$



$$N_d = P \cdot k_d ; k_d = 1 + \frac{w}{g} \quad (11.3)$$

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot k_d ; \sigma_t = \frac{N_t}{A} \quad (11.4)$$



Hình 11.1

Trong đó P_{qt} là lực quán tính, m là khối lượng của vật nặng, k_d là hệ số động, σ_d là ứng suất động, $N_t = P$ là lực dọc tĩnh của dây cáp.

Từ (11.3) ta thấy khi $w = 0$, thì $k_d = 1$ và $N_d = N_t = P$, hệ số k_d càng lớn nếu gia tốc chuyển động càng tăng.

Điều kiện bền của dây cáp là: $\sigma_d \leq [\sigma]$ (11.5)

Từ điều kiện (11.5) có thể xác định kích thước cho phép để dây đủ bền.

11.2.2. Chuyển động quay với vận tốc góc không đổi

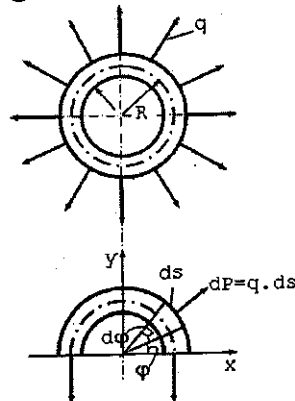
Xét vô-lăng có diện tích mặt cắt ngang A , trọng lượng riêng của vật liệu γ , bề dày t rất bé so với đường kính trung bình $D = 2R$, quay với vận tốc góc :

$$\omega = \text{const} ; w_t = \omega R = 0 ;$$

$$\omega = \text{const} \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \text{ (hình 11.2).}$$

Ta có do gia tốc tiếp tuyến w_t và pháp tuyến w_n của vô-lăng xác định theo công thức :

$$w_t = \dot{\omega} R = 0 \quad (11.6)$$



$$N = \sigma \cdot A \quad N = \sigma \cdot A$$

Hình 11.2

$$w_n = \omega^2 R \quad (11.7)$$

$$\text{Lực hướng tâm : } q_d = \frac{\gamma A}{g} \cdot W_n = \frac{\gamma A}{g} \cdot \omega^2 R \quad (11.8)$$

$$\text{Ứng suất động : } \sigma_d = \frac{\gamma \cdot \omega^2 R^2}{g} \quad (11.9)$$

Phương trình tổng hình chiếu các lực trên tiết diện đi qua tâm của vô-lăng có dạng :

$$\sum_y P_i = 2 \cdot N = \int_0^s q_d \cdot ds \cdot \sin \varphi = \frac{\gamma A R^2}{g} \cdot \omega^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2 \frac{\gamma A R^2}{g} \cdot \omega^2 \quad (11.10)$$

$$\text{Điều kiện bền: } \sigma_d \leq [\sigma]_k \quad (11.11)$$

Trong đó $[\sigma]_k$ là ứng suất cho phép khi kéo của vô-lăng.

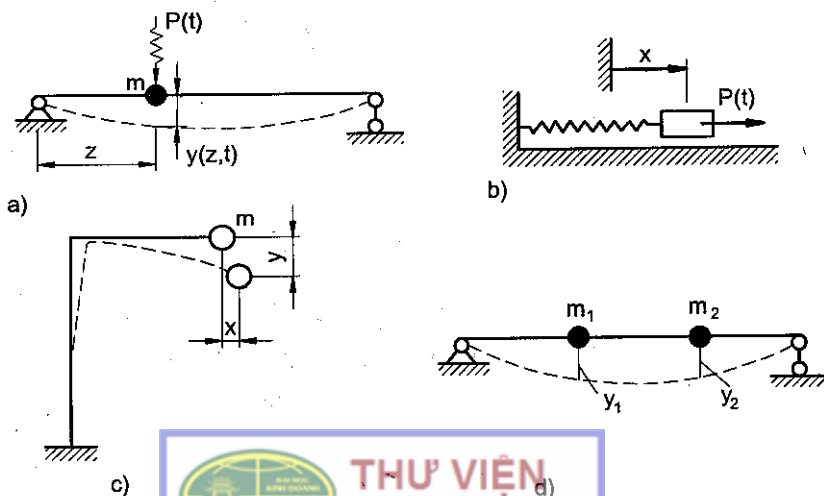
Từ (11.9) ta thấy ứng suất trong vô lăng σ_d tăng rất nhanh nếu tăng ω hay R.

11.3. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG CỦA HỆ ĐÀN HỒI MỘT BẬC TỰ DO

11.3.1. Khái niệm về bậc tự do của hệ đàn hồi

Bậc tự do của một hệ đàn hồi khi dao động là số thông số độc lập để xác định vị trí của hệ trong không gian.

Ví dụ trên hình 11.3a và b là hệ một bậc tự do, còn hình 11.3c và d là hệ có hai bậc tự do (bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ).



THƯ VIỆN
HUBT
Hình 11.3

11.3.2. Phương trình vi phân dao động của hệ đàn hồi một bậc tự do

Độ võng toàn phần $y(t)$ của mặt cắt bất kỳ do ngoại lực $P(t)$, lực cản môi trường (được coi là tỷ lệ với vận tốc chuyển động) và lực quán tính được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$y(t) = \delta [P(t) - \beta \dot{y}(t) - m\ddot{y}(t)] \quad (11.12)$$

Trong đó : m : khối lượng vật đặt trên dầm

β : hệ số cản của môi trường

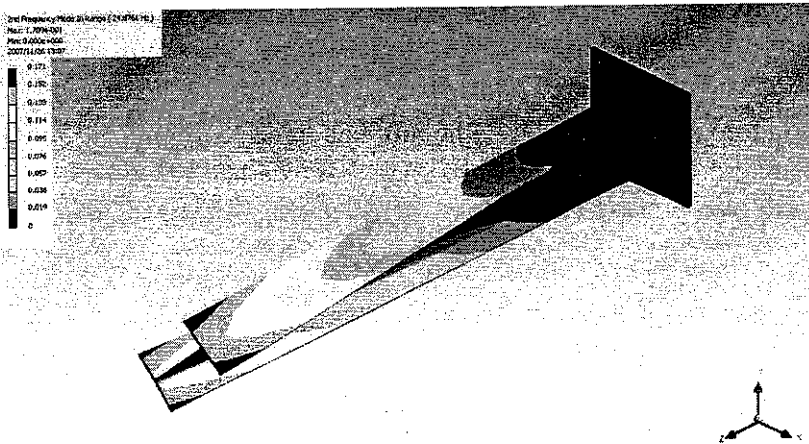
δ : chuyển vị tại điểm đặt vật m do lực đơn vị $P_k = 1$ gây nên.

Ký hiệu:
$$\omega^2 = \frac{1}{m \cdot \delta} \quad (11.13)$$

$$2\alpha = \frac{\beta}{m} \quad (11.14)$$

Ta có (11.12) viết lại dưới dạng sau:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P(t)}{m} \quad (11.15)$$



Hình 11.4. Dao động xoắn của dầm chữ I

Phương trình (11.15) là phương trình vi phân độ võng của hệ một bậc tự do. Sau đây ta xét một số trường hợp riêng quan trọng.

11.3.3. Dao động tự do

a) Dao động tự do không lực cản

$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$ Từ (11.15) cho $P(t) = 0$ và $\alpha = 0$ ta có :

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (11.16)$$

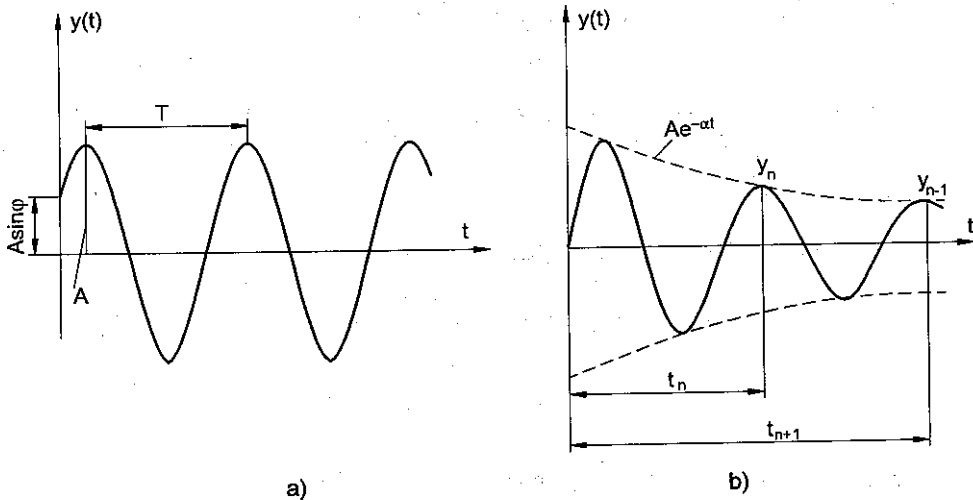
Nghiệm của (11.16) có dạng: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, ta thấy đây là phương trình của *dao động điều hòa* (hình 11.5a).

Trong đó: A là biên độ dao động, chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tần số $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Vận tốc góc ω xác định từ (11.13):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \quad (11.17)$$

Trong đó y_t là độ võng do trọng lượng vật nặng $Q = mg$ gây nên.



Hình 11.5

b) Dao động tự do có lực cản

Phương trình (11.15) với vế phải bằng không có dạng sau:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (11.18)$$

Nghiệm của (11.18) có dạng: $y(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ (11.19)

Tần số dao động *tắt dần* (hình 11.5b) xác định theo công thức:



$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} < \omega \quad (11.20)$$

Sau mỗi chu kỳ T_1 , biên độ dao động giảm đi một lượng là :

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{\alpha T_1} = \text{const} \quad (11.21)$$

11.3.4. Dao động cưỡng bức với lực kích thích là hàm điều hoà

Nghiệm của phương trình vi phân không thuần nhất (11.15) bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(t)$ và nghiệm riêng $y_1(t)$:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

Trong đó : $y_0(t) = A.e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

$$y_1(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t = A_1 \cdot \sin(\Omega t + \psi) \quad (11.22)$$

Do khi $t \rightarrow \infty$ thì $y_0 \rightarrow 0$ nên ta chỉ cần chú ý đến y_1 :

Thay (11.22) vào (11.15) và đồng nhất hệ số của hai vế, ta tìm được :

$$A_1 = \frac{\delta P_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \quad \psi = \arccos \left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \Omega^2}} \right) \quad (11.23)$$

Độ võng động của dầm xác định theo công thức :

$$y_d = y_1(t) = A_1 \cdot \sin(\Omega t + \psi) = \frac{\sin(\Omega t + \psi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \delta \cdot P_0 \quad (11.24)$$

11.3.5. Hệ số động, hiện tượng cộng hưởng

Từ (11.24), đặt $y_t = \delta \cdot P_0$ là độ võng tĩnh do biên độ của lực kích thích gây nên, ta có :

$$y_d = \frac{\sin(\Omega t + \psi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} y_t \quad (11.25)$$

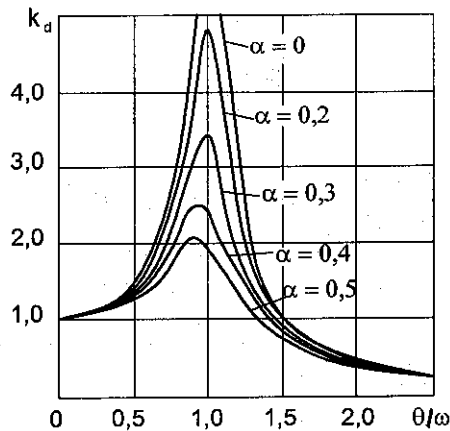
Hay $y_d = k_d \cdot y_t$ với hệ số động bằng :

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \quad (11.26)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi : $\Omega = \omega$

Miền cộng hưởng: $0,75 \leq \frac{\Omega}{\omega} \leq 1,25$, trong thực tế người ta thường hoặc tăng tần số của lực kích thích vượt quá tần số dao động riêng, hoặc dùng các bộ phận giảm chấn để giảm hệ số k_d .

Trên hình 11.6 biểu diễn đồ thị của k_d phụ thuộc tỷ lệ của Ω/ω và hệ số cản α .



Hình 11.6

11.3.6. Ứng suất và chuyển vị của hệ dao động

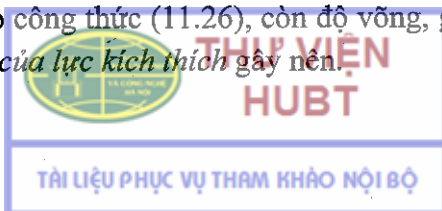
Từ (11.25) ta có biên độ dao động :

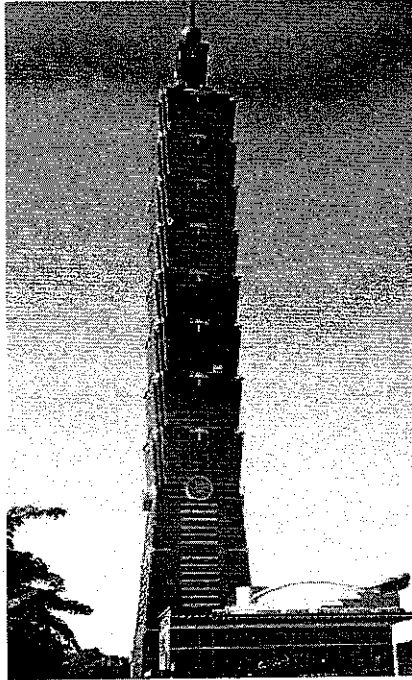
$$\overline{y_d}(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \cdot y_t = k_d \cdot y_t \quad (11.27)$$

Ứng suất pháp và ứng suất tiếp xác định theo công thức :

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d \cdot \sigma_t; & \tau_d &= k_d \cdot \tau_t; \\ y_d &= k_d \cdot y_t; & \varphi_d &= k_d \cdot \varphi_t; \end{aligned} \quad (11.28)$$

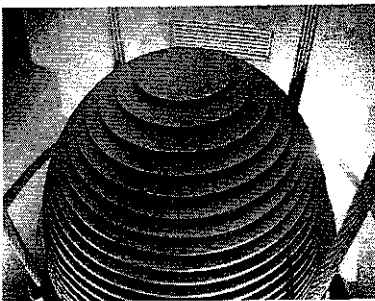
Với hệ số k_d theo công thức (11.26), còn độ võng, góc xoay và ứng suất tĩnh là do biên độ P_0 của lực kích thích gây nên.



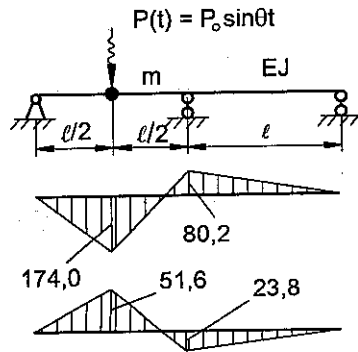


Hình 11.7. Tháp 101 tầng ở Taipei – Đài loan

Trên hình 11.7 là tháp 101 tầng ở Taipei – Đài loan, có chiều cao 509m (thang máy đi lên đỉnh tháp với vận tốc 1010m/ph). Để giảm chấn do dao động, người ta sử dụng quả cầu có thể tích $V = 660\text{m}^3$ (từ tầng thứ 87 ÷ 92), đường kính $D = 5,5\text{m}$ được treo bởi 16 dây cáp có đường kính $d = 9\text{cm}$ bên từ 2000 sợi dây nhỏ. Quả cầu giảm chấn này giúp hạn chế đến 40% dao động của tháp (hình 11.8).



Hình 11.8



M_{\max}^+, M_{\min}^-

Hình 11.9

Ví dụ 11.1: Vẽ biểu đồ mômen uốn và tính độ võng tại điểm đặt vật m (hình 11.9).

Cho biết: $Q = mg = 5\text{kN}$; $P_0 = 30\text{ kN}$, $\Omega = 35\text{rad/s}$; $EJ = 30.000\text{kN/m}^2$.

Giải: Hệ siêu tĩnh bậc 1, dùng phương trình ba mômen ta dễ dàng tính được mômen tại $M_1 = -\frac{3P_0\ell}{32}$. Góc tựa giữa $\ell = 6\text{m}$.

Độ võng tĩnh tại điểm đặt vật m là: $y_t^Q = \frac{1}{EJ}(M_x)(\bar{M}_K) = 0,54(\text{cm})$

Vận tốc góc xác định theo công thức : $\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t^Q}} = 42,6(\text{rad/s})$

Hệ số động bằng : $k_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = 3,08$

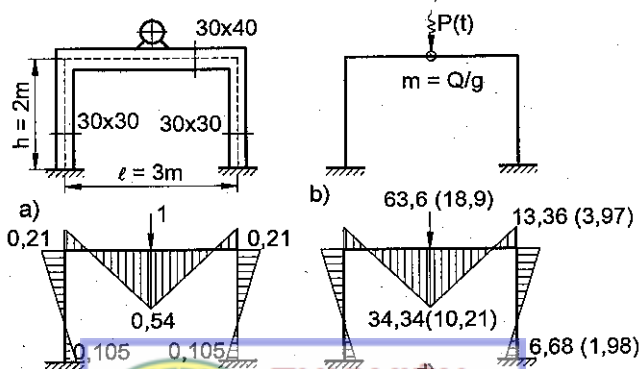
Lực P_d tác dụng lên dầm và độ võng động lớn nhất do P_d xác định theo công thức : $P_d = P_0 \cdot k_d$; $y_d^{\text{max}} = y_t^{(P_0)} \cdot k_d = 0,9948 \approx 1(\text{cm})$

Biểu đồ mômen uốn M^+_{max} , M^-_{min} khi P_0 có chiều đi xuống hoặc đi lên có giá trị như hình 11.9. *Độ võng động toàn phần tại điểm đặt vật m là:*

$$P_d^{\text{max}} = Q + P_d = 97,4\text{kN} ; y_{tp}^{\text{max}} = 0,54 + 0,99 = 1,53(\text{cm}) ;$$

$$P_d^{\text{min}} = Q - P_d = -87,4\text{kN} ; y_{tp}^{\text{min}} = 0,54 - 0,99 = -0,45(\text{cm}).$$

Ví dụ 11.2 : Vẽ biểu đồ mômen uốn và tính độ võng tại điểm đặt mô-tô (hình 11.10a). Cho $Q = 41,25\text{kN}$, vận tốc góc $n = 200\text{vg/ph}$, biên độ lực kích thích $P_0 = 1\text{kN}$, $E = 2.10^4\text{ kN/cm}^2$.



Hình 11.10

Giải : Hệ siêu tĩnh đối xứng nên ta chỉ cần xét nửa khung. Dễ dàng vẽ được các biểu đồ mômen do Q , $X_1 = 1$ (lực dọc), $X_2 = 1$ (mômen uốn). Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$y_t^{(Q)} = 0,0253 \text{ (cm)}$$

Ta vẽ được biểu đồ mômen M_x và tính được độ võng tĩnh bằng phương pháp nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin :

Lực kích thích do mô tơ có dạng : $P(t) = P_0 \cdot \sin \Omega t$

Áp dụng công thức tính tần số dao động riêng và tần số kích thích:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{y_t^{(Q)}}}$$

Ta có: $k_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = 2,016$

Vậy lực $P_d = P_0 \cdot k_d$ và độ võng động tính tương tự như ví dụ 1 là:

$$P_{d\max}^+ = Q + P_d = 63,6 \text{ (kN)}; \quad P_{d\min}^- = Q - P_d = 18,9 \text{ (kN)}$$

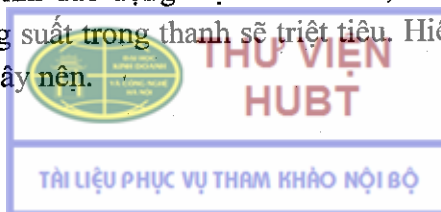
$$y_d^{P(t)} = y_t^{(P_0)} \cdot k_d$$

Độ võng y_t do P_0 chính bằng độ võng khi thay $Q = P$ và xác định bằng cách nhân biểu đồ mômen uốn M_x với biểu đồ mômen ở trạng thái « k » do lực đơn vị đặt tại điểm có mô tơ.

11.4. BÀI TOÁN VA CHẠM

11.4.1. Khái niệm về va chạm giữa vật rắn tuyệt đối và hệ đàn hồi

Xét thanh BD có mặt cắt ngang không đổi, một vật có khối lượng m bay với vận tốc v_0 và chạm vào đầu B của thanh (hình 11.11). Vì thanh bị biến dạng do va đập gây nên, ứng suất trong thanh sẽ thay đổi và đạt giá trị lớn nhất σ_{\max} . Sau khi dao động một lúc nào đó, thanh sẽ trở về trạng thái tĩnh ban đầu và ứng suất trong thanh sẽ triệt tiêu. Hiện tượng trên gọi là *tải trọng do va chạm* gây nên.

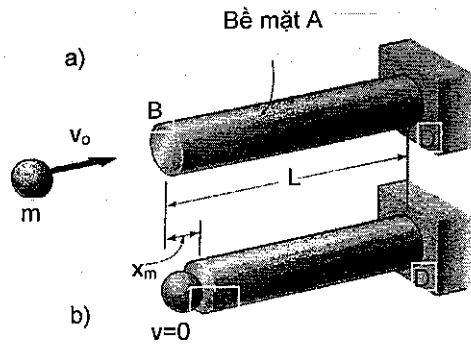


Để xác định ứng suất σ_{\max} , ta chấp nhận một số giả thiết sau về va chạm :

– Động năng của vật va chạm $T = \frac{1}{2}mv^2$ hoàn toàn truyền cho vật bị va chạm, có nghĩa là nó không bị hao tán mà chuyển thành năng lượng biến dạng U của vật đàn hồi.

– Sau khi va chạm, vật va chạm không tách rời khỏi vật bị va chạm mà cùng chuyển vị như một hệ gắn liền với nhau. Lực quán tính của vật bị va chạm được bỏ qua so với lực quán tính của vật va chạm.

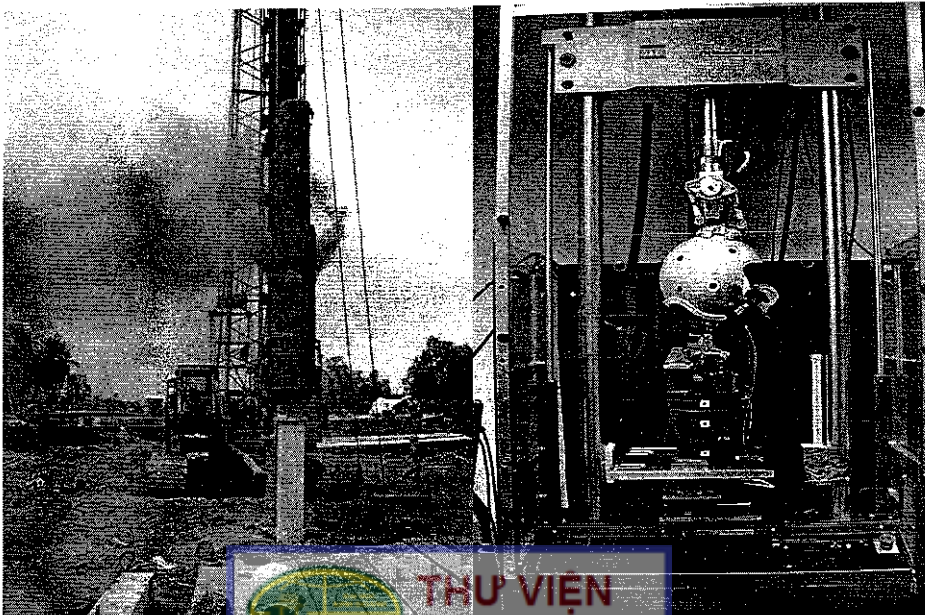
Ta cũng giả thiết rằng quan hệ ứng suất - biến dạng trong trường hợp tải trọng tĩnh vẫn giữ nguyên, có nghĩa là tuân theo định luật Húc.



Hình 11.11

11.4.2. Va chạm theo phương thẳng đứng. Hệ số động

Trong thực tế va chạm theo phương thẳng đứng thường ứng dụng trong các trường hợp đóng cọc máy, hoặc gia công các chi tiết (dập, tán...) (xem hình 11.2).



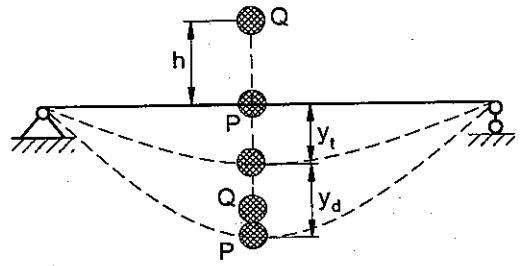
Hình 11.12. Va chạm theo phương thẳng đứng



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Xét vật có trọng lượng Q rơi tự do từ độ cao h và chạm vào vật nặng P đặt sẵn trên dầm (hình 11.13). Ký hiệu v_0 là vận tốc của Q ngay trước khi va chạm, v là vận tốc của $(Q+P)$ sau khi va chạm, theo định luật bảo toàn động lượng, ta có:



Hình 11.13

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{Q+P}{g} v \Rightarrow v = v_0 \frac{Q}{Q+P} \quad (11.29)$$

Động năng của hệ sau va chạm:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q+P}{g} v^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q+P}{g} \left(v_0 \frac{Q}{Q+P} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g(1+P/Q)} v_0^2 \quad (11.30)$$

$$\text{Thế năng của hệ: } \Pi = (Q+P) \cdot y_d \quad (11.31)$$

$$\text{Tổng thế năng biến dạng đàn hồi: } U = T + \Pi \quad (11.32)$$

Mặt khác, độ võng động của dầm tại điểm đặt vật P xác định theo công thức :

$$y_d = P_d \cdot \delta \Rightarrow P_d = \frac{y_d}{\delta} \quad (11.33)$$

(δ là chuyển vị do lực đơn vị đặt tại điểm va chạm, P_d là tải trọng động gây nên y_d).

$$\text{Từ định luật bảo toàn năng lượng : } U = A \quad (11.34)$$

Thay (11.30 ÷ 11.33) vào (11.34) ta thu được phương trình của độ võng y_d :

$$y_d^2 - 2\delta \cdot Q \cdot y_d - \frac{\delta \cdot Q \cdot v_0^2}{g(1+P/Q)} = 0 \quad (11.35)$$

Nghiệm dương của phương trình trên là độ võng động của dầm :

$$y_d = \Delta_t^{(Q)} + \sqrt{(\Delta_t^{(Q)})^2 + \frac{\Delta_t^{(Q)} \cdot v_0^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (11.36)$$

Trong đó độ võng tĩnh do trọng lượng Q gây nên và vận tốc v_0 ngay trước khi va chạm tính theo công thức : $v_0 = \sqrt{2g \cdot h}$

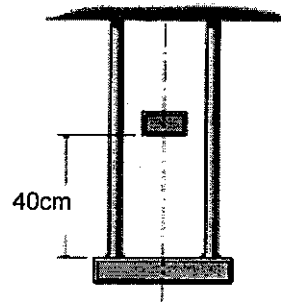
$$\Delta_t^{(Q)} = Q \cdot \delta \quad (11.37)$$

Độ võng động và hệ số động xác định như sau :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) \cdot \Delta_t^{(Q)}}}$$

$$y_d = k_d \cdot \Delta_t^{(Q)}; \quad (11.38)$$

Ví dụ 11.3 : Một vật có trọng lượng $W=30\text{N}$ rơi từ độ cao $h = 40\text{cm}$ xuống đĩa tuyệt đối cứng treo bằng hai thanh thép có môđun đàn hồi $E = 3 \cdot 10^4 \text{kN/cm}^2$, chiều dài 80m , mặt cắt ngang chữ nhật kích thước $1 \times 2\text{cm}$ (hình 11.14). Xác định :



Hình 11.14

- Ứng suất kéo lớn nhất trong các thanh.
- Chuyển vị lớn nhất của đĩa.

Giải : a) Ta có diện tích mặt cắt ngang của hai thanh là $A = 4\text{cm}^2$
 Ứng suất động do va chạm gây nên tính theo công thức :

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma_t \cdot k_d \\ &= \frac{W}{A} + \sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WhE}{AL}} \\ &= \frac{30}{4} + \sqrt{\left(\frac{30}{4}\right)^2 + \frac{2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 10^7}{4 \cdot 80}} = 15,008 (\text{kN/cm}^2) \approx 15,01 (\text{kN/cm}^2) \end{aligned}$$

Ứng suất tĩnh do vật nặng W gây nên bằng :

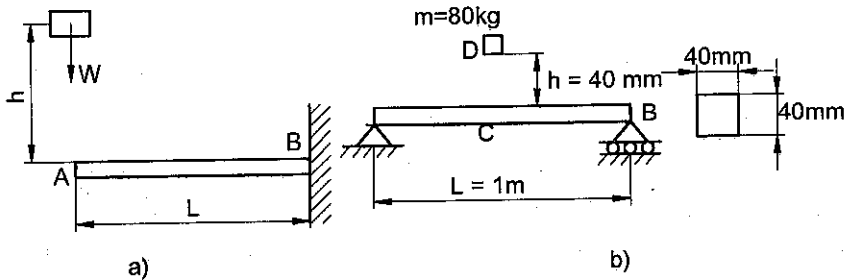
$$\sigma_t = \frac{W}{A} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ N/cm}^2$$

b) Chuyển vị lớn nhất của đĩa do va chạm gây nên xác định theo công thức : $\delta_d = \frac{\sigma_d \cdot L}{E} = \frac{15,01 \cdot 80}{3 \cdot 10^4} = 0,04(\text{cm})$

Trong khi chuyển vị tĩnh do W gây nên bằng :

$$\delta_t = \frac{W \cdot L}{AE} = \frac{30 \cdot 80}{4 \cdot 3 \cdot 10^7} = 0,00002(\text{cm})$$

Ví dụ 11.4 : Xác định ứng suất và độ võng động lớn nhất của dầm công-xôn AB khi chịu va chạm bởi vật nặng trọng lượng W rơi từ độ cao h xuống đầu tự do (hình 11.5a). Cho biết độ cứng của dầm $EI = \text{const}$ và khoảng cách lớn nhất c đến trục trung hòa của mặt cắt ngang.



Hình 11.15

Giải : Do vật nặng rơi tự do theo phương thẳng đứng, thế năng sẽ chuyển thành động năng U làm cho thanh bị biến dạng:

$$U = W \cdot h \quad (a)$$

Quãng đường vật nặng di chuyển toàn bộ sẽ bằng $h + y_d$, do đó công thức (a) của năng lượng biến dạng viết một cách chính xác là:

$$U = W \cdot (h + y_d) \quad (b)$$

Tuy nhiên, do $h \gg y_d$ nên ta có thể bỏ qua y_d và vẫn sử dụng công thức (a). Áp dụng công thức tính độ võng tại đầu tự do của dầm công-xôn (bỏ qua ảnh hưởng lực cắt), ta có năng lượng biến dạng trên bằng:

$$U = \frac{1}{2} P \delta_t = \frac{P \cdot L^3}{6EI} \quad (c)$$

Giải hệ phương trình (a) + (c) ta thu được lực tĩnh tương đương P gây nên năng lượng biến dạng bằng:

$$P = \sqrt{\frac{6U.EI}{L^3}} \quad (d)$$

Giá trị ứng suất lớn nhất bằng:

$$\sigma_m = \frac{|M|_m.c}{I} = \frac{P.L.c}{I} \quad (e)$$

Thay (d) vào (e) ta có:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U.E}{L(I/c^2)}} \quad (g)$$

Với U xác định theo (a), ta có: $\sigma_m = \sqrt{\frac{6Wh.E}{L(I/c^2)}} \quad (h)$

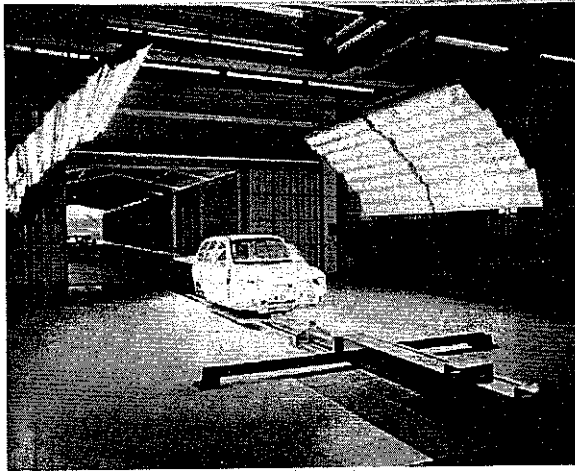
Độ võng lớn nhất bằng :

$$\delta_d = \delta_t.k_d = \frac{P.L^3}{3EI} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_t}} \right] = \frac{P.L^3}{3EI} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{P.L^3}} \right] \quad (i)$$

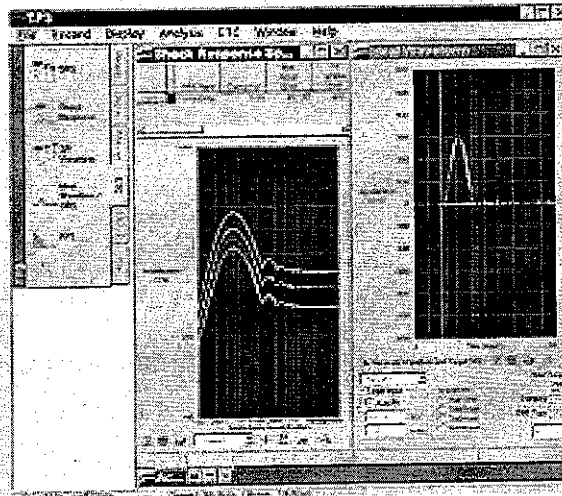
Bạn đọc có thể giải bài toán tương tự đối với dầm AB đặt trên hai gối tựa, chịu va chạm bởi vật khối lượng m rơi từ độ cao h xuống điểm giữa C của dầm (hình 11.15b). Ứng suất và độ võng lớn nhất đạt được tại giữa dầm và có giá trị bằng: $\sigma_m = 179,9\text{MPa}; \delta_m = 10,27\text{mm}$.

11.4.3. Va chạm theo phương nằm ngang. Hệ số động

Trong thực tế, va chạm ngang (hình 11.16) có thể gặp trong giao thông vận tải, phá dỡ công trình xây dựng, hoặc đóng cọc ngang,...



TP3-etc



Hình 11.16. Thí nghiệm va đập theo phương ngang và đo dao động

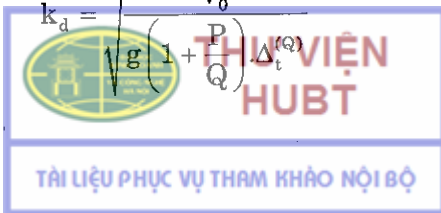
Xét vật Q bay với vận tốc v_0 và chạm vào P (hình 11.17a).

Ta có công của lực P_d gây nên chuyển vị y_d là :

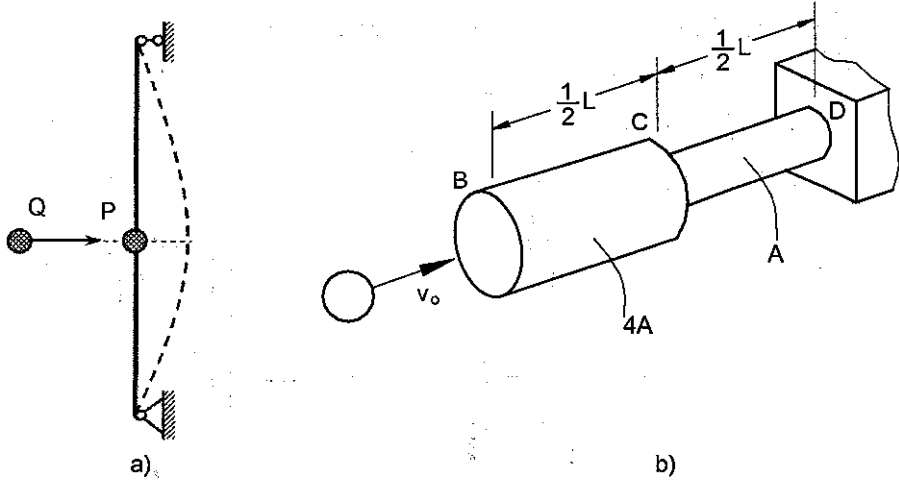
$$A = \frac{1}{2} P_d \cdot y_d . \text{ Thế năng không thay đổi nên: } \Pi = 0 \quad (11.39)$$

Tương tự như trên ta tính được hệ số k_d :

$$k_d = \sqrt{g \left(1 + \frac{P_t}{Q} \right) \Delta_t^{(Q)}} \quad (11.40)$$



Ví dụ 11.5 : Một vật nặng khối lượng m bay với vận tốc v_0 và chạm vào đầu B của thanh BCD (hình 11.17b). Biết đường kính của đoạn BC gấp hai lần đường kính đoạn CD, xác định ứng suất động lớn nhất của thanh.



Hình 11.17

Giải: Áp dụng công thức tính năng lượng của thanh gồm n đoạn, thay

$$n = 2 \text{ vào (10.13), ta có: } U = \frac{5P^2L}{16AE} \quad (1)$$

Trong đó A là diện tích mặt cắt ngang của đoạn CD. Giải (1) ta có lực

$$\text{tĩnh gây nên biến dạng là: } P = \sqrt{\frac{16UAE}{5L}} \quad (2)$$

Ứng suất lớn nhất đạt được trên đoạn CD:

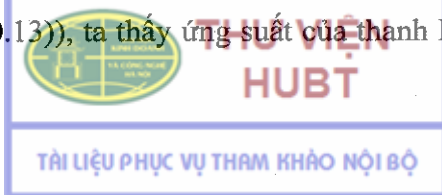
$$\sigma_m = \frac{P}{A} = \sqrt{\frac{16UE}{5AL}} \quad (3)$$

Thay năng lượng biến dạng bằng động năng của vật va chạm:

$$U = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (4)$$

$$\text{Ta có: } \sigma_m = \sqrt{\frac{8mv_0^2E}{5AL}} = 1,265\sqrt{\frac{mv_0^2E}{AL}} \quad (5)$$

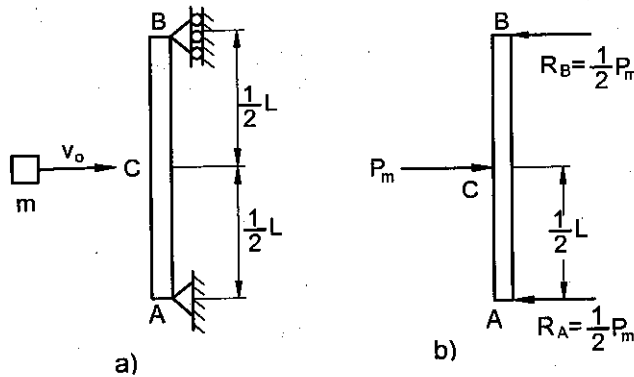
So sánh với ứng suất lớn nhất của thanh có mặt cắt ngang không đổi (thay $n = 1$ trong (10.13)), ta thấy ứng suất của thanh BCD lớn hơn 26,5%.



Điều đó chứng tỏ sự tăng đường kính của thanh làm giảm khả năng hấp thụ năng lượng biến dạng và ta cần tránh đối với hệ chịu va chạm.

Ví dụ 11.6: Vật có khối lượng m chuyển động với vận tốc v_0 va chạm vào điểm giữa C của dầm AB (hình 11.18a). Xác định:

- Tải trọng tĩnh tương đương P ;
- Ứng suất lớn nhất;
- Độ võng động lớn nhất.



Hình 11.18

Giải: a) Lực tĩnh tương đương P (hình 11.8b):

Ta có: Năng lượng biến dạng của dầm bằng động năng của vật ngay trước khi va chạm:

$$U = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (a)$$

Mặt khác, năng lượng đó bằng công của lực tĩnh tương đương gây nên chuyển vị theo phương ngang của điểm C:

$$U = \frac{1}{2} P \cdot x_C \quad (b)$$

Trong đó x_C là độ võng tại điểm giữa của dầm đặt trên hai gối tựa, ta có:

$$x_C = \frac{P L^3}{48 E I} \quad (c)$$

Thay (c) vào (b) ta có: $U = \frac{P^2 L^3}{96 E I} \quad (d)$

Giải (d) theo P với U xác định từ (a), ta có lực tĩnh tương đương bằng:

$$P = \sqrt{\frac{96UEI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2EI}{L^3}} \quad (e)$$

b) Ứng suất lớn nhất: Tại điểm giữa C của dầm, mômen uốn đạt giá trị lớn nhất: $M_m = \frac{PL}{4}$. Do đó ứng suất pháp lớn nhất tại mặt cắt đi qua C bằng:

$$\sigma_m = \frac{M_m \cdot c}{I} = \frac{PL \cdot c}{4I} \quad (g)$$

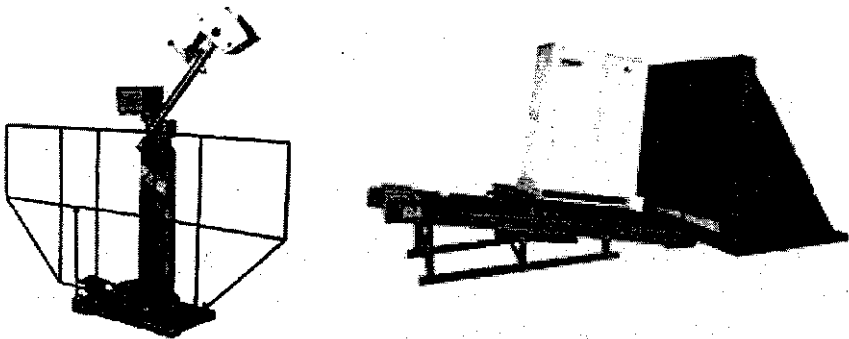
Thay P từ (e) vào ta có: $\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2EI}{L(I/c)^2}}$ (h)

c) Độ võng động lớn nhất: Thay P từ (e) vào (c) ta có:

$$x_{ac} = \frac{L^3}{48EI} \sqrt{\frac{48mv_0^2EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2L^3}{48EI}} \quad (i)$$

11.4.4. Va chạm xiên. Hệ số động

Trong thực tế hệ có thể chịu va chạm theo phương bất kỳ (hình 11.17) (ví dụ trong vũ trụ, hoặc trong vận chuyển hàng hóa, đóng cọc xiên...). Ta xác định hệ số động trong trường hợp tổng quát phụ thuộc vào góc giữa phương của chuyển động với trục dầm.



Hình 11.17. Thí nghiệm thử va đập theo phương xiên

Xét vật nặng có trọng lượng Q va chạm vào vật Q' gắn với dầm đàn hồi. Ký hiệu: v là vận tốc của Q ngay trước khi va chạm; α là góc giữa phương chuyển động của Q và trục x của dầm; β là góc giữa phương thẳng đứng và trục dầm.

Ta cũng giả thiết là sau khi va chạm, hai vật Q và Q' không tách rời nhau và hệ có khối lượng $(Q + Q')$ cùng chuyển động với vận tốc v_0 , tải trọng động Q_d gây nên độ võng động theo phương x và y là x_d và y_d .

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q + Q'}{g} \right) v_0^2 = -(Q + Q') \sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) + Q' \sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) + \frac{Q_d \cos \alpha}{2} x_d + \frac{Q_d \sin \alpha}{2} y_d \quad (1)$$

Trong đó vế trái của phương trình là động năng của hệ ngay khi bắt đầu va chạm, số hạng thứ nhất trong vế phải là sự giảm thế năng của hệ, các số hạng còn lại là công đàn hồi của dầm do lực Q' và Q_d gây nên.

Theo định luật bảo toàn động lượng, ta có :

$$v_0 = \frac{Q}{Q + Q'} v \quad (2)$$

Vế trái của (1) trở thành :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q + Q'}{g} \right) v_0^2 = \frac{Qv^2}{2g(1 + \frac{Q'}{Q})} \quad (3)$$

Phương trình (1) có thể viết dưới dạng sau :

$$\frac{Qv^2}{2g(1 + \frac{Q'}{Q})} = -(Q + Q') \sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) + Q' \sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) + \frac{Q_d \cos \alpha}{2} x_d + \frac{Q_d \sin \alpha}{2} y_d \quad (4)$$

Chuyển vị động theo phương dọc trục x_d và vuông góc với trục dầm y_d , cũng như tải trọng động được xác định qua chuyển vị tĩnh do lực Q đặt một cách từ từ lên hệ gây nên :

$$\begin{cases} x_d = x_t \cdot k_d \\ y_d = y_t \cdot k_d \\ Q_d = Q \cdot k_d \end{cases} \quad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta thu được phương trình :



$$\frac{1}{2}(x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha)k_d^2 - k_d \sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) - \frac{v^2}{2g(1 + \frac{Q'}{Q})} = 0 \quad (6)$$

Nghiệm dương của (6) chính là hệ số k_d :

$$k_d = \frac{1}{(x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha)} \left[\sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sqrt{(x_d^2 + y_d^2) \cos^2(\alpha - \beta) + (x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha) \frac{v^2}{g(1 + \frac{Q'}{Q})}} \right] \quad (7)$$

– Các trường hợp riêng

$\alpha = 0$: va chạm dọc theo trục thanh, ta có $\cos(\alpha - \beta) = \cos \beta$; $y_t = 0$

$$k_d = \cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{v^2}{gx_t(1 + \frac{Q'}{Q})}} \quad (8)$$

$\alpha = \beta$: Va chạm theo phương thẳng đứng, còn trục dầm nghiêng một góc bất kỳ, ta có :

$$k_d = \frac{1}{(x_t \cos \beta + y_t \sin \beta)} \left[\sqrt{(x_d^2 + y_d^2)} + \sqrt{(x_d^2 + y_d^2) + (x_t \cos \beta + y_t \sin \beta) \frac{v^2}{g(1 + \frac{Q'}{Q})}} \right] \quad (9)$$

$\alpha = \beta + 90^\circ$: Va chạm theo phương ngang và trục dầm nghiêng một góc bất kỳ, ta có :

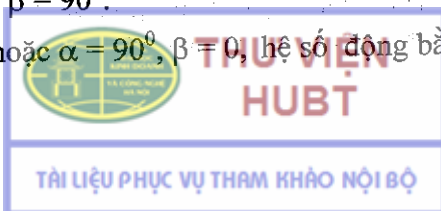
$$k_d = \frac{v}{\sqrt{g(1 + \frac{Q'}{Q})(y_t \cos \beta - x_t \sin \beta)}} \quad (10)$$

$\alpha = 0, \beta = 0$ hoặc $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ$, hệ số động bằng :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_t(1 + \frac{Q'}{Q})}} \quad (11)$$

Trong đó $\Delta_t = x_t$ đối với trường hợp $\alpha = 0, \beta = 0$; và $\Delta_t = y_t$ đối với trường hợp $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ$.

$\alpha = 0, \beta = 90^\circ$ hoặc $\alpha = 90^\circ, \beta = 0$, hệ số động bằng :



$$k_d = \frac{v}{\left[g\Delta_t \left(1 + \frac{Q'}{Q} \right) \right]^{1/2}} \quad (12)$$

Ta thấy (11) và (12) chính là công thức hệ số động trong trường hợp va chạm đứng và va chạm ngang.

Nếu vật Q rơi tự do từ độ cao H, ta thay vận tốc $v = \sqrt{2gH}$ vào công thức k_d .

11.4.5. Ứng suất và chuyển vị của hệ chịu va chạm

Ứng suất động tại điểm bất kỳ bằng ứng suất tĩnh tại điểm đó do lực bằng vật có trọng lượng Q đặt từ từ lên hệ gây nên, nhân với hệ số k_d .

Độ võng động (góc xoay động) tại điểm bất kỳ bằng độ võng tĩnh (góc xoay tĩnh) tại điểm đó do lực bằng vật có trọng lượng Q đặt từ từ lên hệ gây nên, nhân với hệ số k_d .

$$y_d = k_d \cdot y_t; \quad \varphi_d = k_d \cdot \varphi_t; \quad \sigma_d = k_d \cdot \sigma_t \quad (11.41)$$

Chú ý: Trong (11) và (12) ở trên độ võng tĩnh do vật Q đặt tĩnh *tại điểm va chạm* gây nên, do đó hệ số k_d là như nhau đối với mọi điểm trên hệ. Còn trong (11.41), chuyển vị / ứng suất tĩnh là do Q đặt tĩnh *tại điểm cần tính chuyển vị / ứng suất động* (có thể không trùng với điểm bị va chạm).

Sau khi tính được ứng suất động và độ võng động lớn nhất, ta có thể kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng của kết cấu khi chịu va chạm.

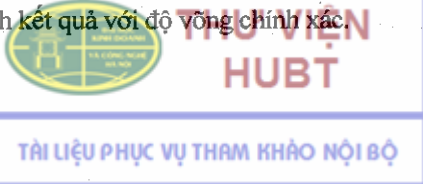
BÀI TẬP CHƯƠNG 11

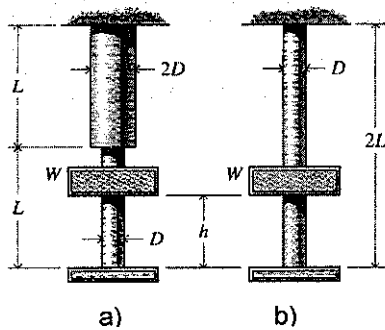
11.1. Hai thanh mặt cắt ngang tròn cùng chiều dài 2L, cùng vật liệu (hình BT11.1). Hãy so sánh năng lượng biến dạng khi thanh chịu va chạm dọc trục, biết ứng suất lớn nhất không vượt quá ứng suất chảy σ_Y .

11.2. Một vật có trọng lượng W rơi từ độ cao h và va chạm vào điểm D của dầm AB (hình BT11.2). Ký hiệu y_m là độ võng chính xác lớn nhất tại D và y'_m là độ võng nếu bỏ qua ảnh hưởng sự thay đổi thế năng của vật nặng.

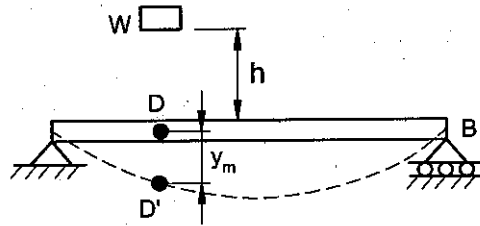
a) Hãy chỉ ra rằng sai số tương đối $(y'_m - y_m)/y_m$ không vượt quá $y'_m/2h$;

b) Kiểm tra lại kết quả của phần a) nếu không kể đến y_m khi tính sự thay đổi thế năng của vật nặng, so sánh kết quả với độ võng chính xác.



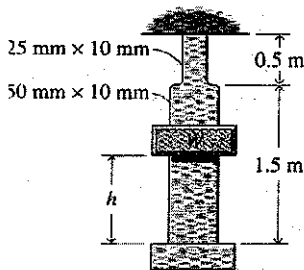


Hình BT11.1

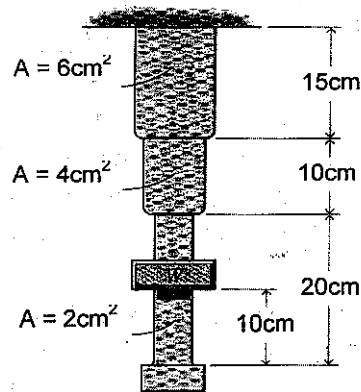


Hình BT11.2

11.3. Một vật có trọng lượng $W = 100\text{N}$ rơi từ độ cao h xuống đĩa tuyệt đối cứng gắn ở đầu tự do của thanh có $E = 200\text{GPa}$ (hình BT11.3). Xác định chiều cao cần thiết h , nếu ứng suất trong thanh không vượt quá 200MPa , bỏ qua sự tập trung ứng suất.



Hình BT11.3



Hình BT11.4

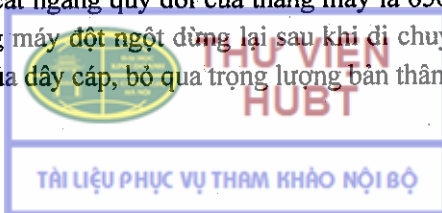
11.4. Một vòng có trọng lượng W rơi từ độ cao $h = 10\text{cm}$ xuống đĩa tuyệt đối cứng gắn ở đầu tự do của thanh (hình BT11.4). Biết $E = 20\text{kN/cm}^2$ và ứng suất trong thanh không vượt quá 18kN/cm^2 , xác định trọng lượng cho phép của vật nặng nếu:

- Thanh có mặt cắt ngang thay đổi như hình vẽ.
- Thanh có diện tích $A = 2\text{cm}^2$ không đổi trên toàn bộ chiều dài.

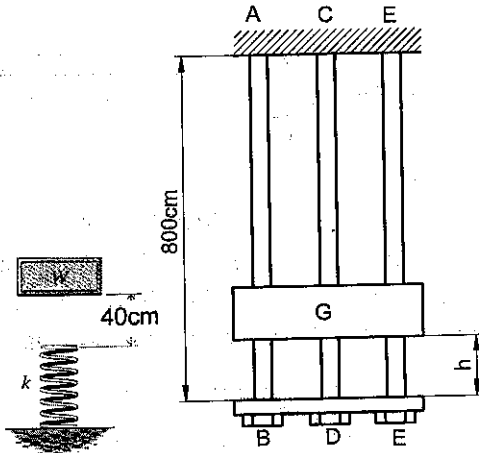
11.5. Một vật có trọng lượng 50N rơi từ độ cao $h = 40\text{cm}$ xuống lò xo hình trụ với độ cứng $k = 100\text{N/cm}$ (hình BT11.5) xác định:

- Độ lún của lò xo ;
- Lực tĩnh tương đương gây nên chuyển vị bằng độ lún của lò xo.

11.6. Một buồng thang máy có khối lượng 1400kg được hạ xuống với vận tốc $1,5\text{ m/s}$. Diện tích mặt cắt ngang quy đổi của thang máy là 650mm^2 và mô đun đàn hồi $E = 170\text{GPa}$. Nếu thang máy đột ngột dừng lại sau khi đi chuyển được 60m , xác định ứng suất kéo lớn nhất của dây cáp, bỏ qua trọng lượng bản thân của dây.

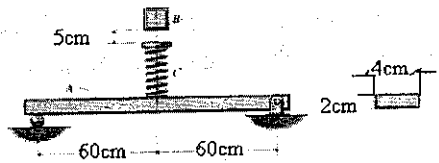


11.7. Vật G có trọng lượng 100N rơi từ độ cao h xuống đĩa cứng BDF gắn các thanh CD có đường kính 2 cm với thanh AB và EF có đường kính 1,5cm làm bằng thép với $E = 2,9 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$ (hình BT11.7). Biết ứng suất cho phép $\sigma_{\text{all}} = 24 \text{kN/cm}^2$, xác định chiều cao h cho phép.



Hình BT11.5

Hình BT11.7

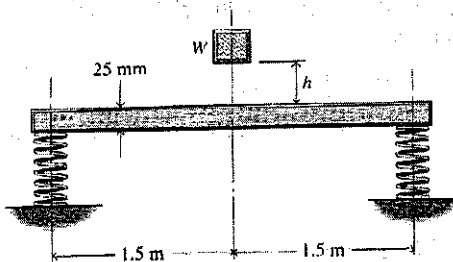


Hình BT11.8

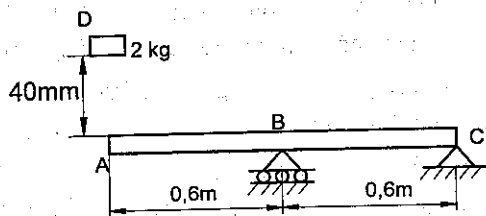
11.8. Một vật B có khối lượng $m = 2 \text{kg}$ rơi từ độ cao $h = 5 \text{cm}$ xuống lò xo gắn tại điểm giữa của dầm mặt cắt ngang chữ nhật như hình BT11.8. Xác định độ cứng của lò xo, biết độ võng lớn nhất của dầm do va chạm gây nên bằng 0,5mm, mô đun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{kN/cm}^2$.

11.9. Dầm có kích thước chiều rộng 75mm, chiều cao 25mm đặt trên hai lò xo hình trụ với độ cứng $k = 9 \text{kN/m}$ (hình BT11.9). Khi vật trọng lượng W đặt từ từ lên điểm giữa của dầm, hai đầu dầm lún xuống một đoạn bằng 2,5mm, còn điểm giữa dầm lún xuống thêm 3mm. Xác định :

- Trọng lượng W của vật nặng;
- Chiều cao h mà vật rơi xuống để ứng suất lớn nhất của dầm bằng 16MPa.



Hình BT11.9

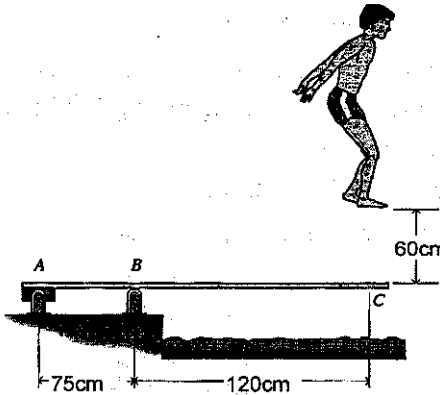


Hình BT11.10

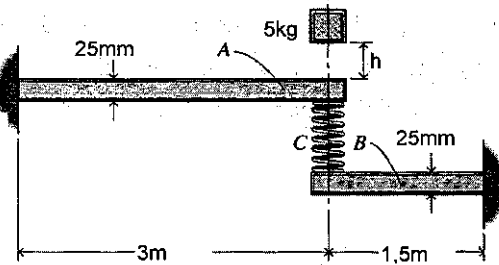
11.10. Vật D nặng 2 kg rơi từ độ cao h xuống đầu tự do của dầm AC có đường kính 16m, mô đun đàn hồi $E = 200 \text{GPa}$. Xác định :

- a) Độ võng động tại đầu A;
- b) Mômen uốn lớn nhất trên dầm;
- c) Ứng suất pháp động lớn nhất.

11.11. Một vận động viên bơi lội có khối lượng 70kg nhảy từ độ cao 60cm xuống ván nhảy có kích thước chiều rộng 60cm, chiều dày 5cm (hình BT11.11), mô đun đàn hồi của gỗ $E = 1800\text{kN/cm}^2$ và $\sigma_Y = 8,4\text{kN/cm}^2$. Xác định ứng suất pháp lớn nhất của ván nhảy.



Hình BT11.11



Hình BT11. 12

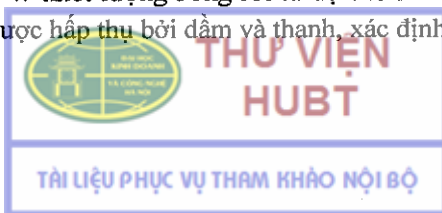
11.12. Hai dầm công-xôn A và B bằng hợp kim nhôm ($E = 70\text{GPa}$) có chiều rộng 100mm, chiều cao 25 mm gắn với lò xo hình trụ C có độ cứng 20kN/m (hình BT11.12). Một vật nặng 5kg rơi từ độ cao h xuống dầm A. Biết hệ số $k_d = 4$ và 80% năng lượng đàn hồi được hấp thụ để làm biến dạng dầm và lò xo, xác định :

- a) Độ cao h mà vật rơi xuống ;
- b) Năng lượng biến dạng đàn hồi hấp thụ bởi từng thành phần dầm và lò xo.

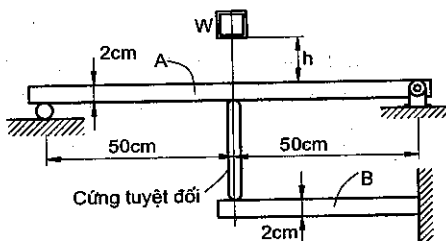
11.13. Dầm A và B được làm bằng gỗ ($E = 1200\text{kN/cm}^2$) gắn với thanh chống tuyệt đối cứng, một vật nặng 10kg rơi từ độ cao h xuống dầm A gây nên độ võng tại điểm giữa bằng 3cm (hình BT11.13). Nếu 90% năng lượng biến dạng được hấp thụ, hãy xác định :

- a) Độ cao h của vật nặng W;
- b) Hệ số động;
- c) Năng lượng biến dạng hấp thụ của từng dầm A và B.

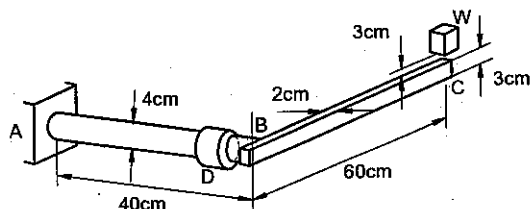
11.14. Hệ thanh trên hình BT11.14 gồm thanh thép AB đường kính 4cm ($G = 1200\text{kN/cm}^2$) gắn với dầm BC chiều rộng 2cm, chiều cao 3cm ($E = 3000\text{kN/cm}^2$) bằng vành D. Vật nặng W khối lượng 50kg rơi từ độ cao 3cm xuống đầu C. Nếu 80% năng lượng biến dạng được hấp thụ bởi dầm và thanh, xác định :



- a) Độ võng lớn nhất tại điểm C;
 b) Ứng suất lớn nhất trên dầm và thanh.



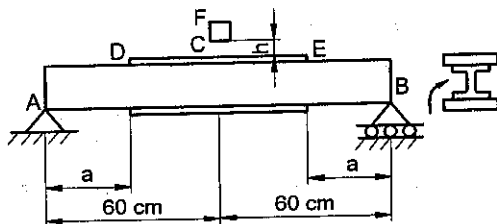
Hình BT11.13



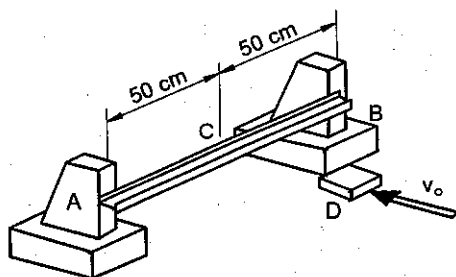
Hình BT11.14

11.15. Hai tấm mỏng 1×6 cm được ghép với mặt cắt ngang chữ I số hiệu W152 \times 24 (hình BT11.15). Vật nặng khối lượng 700 kg rơi từ độ cao 5 cm xuống điểm giữa C của dầm. Biết vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 200$ GPa, xác định :

- a) Ứng suất lớn nhất trên đoạn AD và tại giữa dầm với $a = 20$ cm;
 b) Xác định khoảng cách a sao cho ứng suất của dầm đạt giá trị nhỏ nhất.



Hình BT 11.15

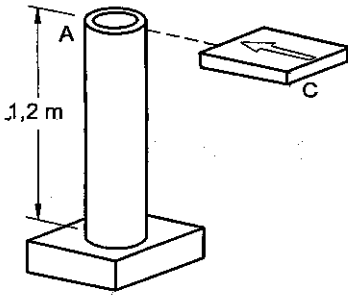


Hình BT 11.16

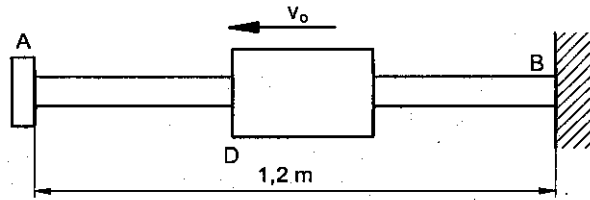
11.16. Dầm AB làm bằng thép ($E = 2,9 \cdot 10^4$ kN/cm²), mặt cắt ngang chữ I số hiệu W127 \times 24. Vật nặng D có khối lượng 5 kg bay với vận tốc 7 m/s và chạm vào điểm giữa C của dầm (hình BT11.16). Xác định:

- a) Tải trọng tĩnh tương đương;
 b) Ứng suất pháp lớn nhất của dầm;
 c) Độ võng lớn nhất của dầm.

11.17. Giải bài tập 11.16 đối với cột thép có bán kính trong 5 cm, bán kính ngoài 7 cm bị va chạm tại đầu tự do bởi vật nặng C bay với vận tốc v_0 (hình BT11.17), biết các thông số của vật liệu và vật nặng giống như bài trên.



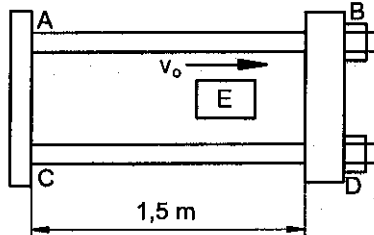
Hình BT 11.17



Hình BT 11.18

11.18. Vòng D khối lượng $m = 5\text{ kg}$ chuyển động dọc theo thanh AB với vận tốc $v_0 = 6\text{ m/s}$ và đập vào đĩa A gắn cứng với thanh (hình BT11.18). Cho $E = 200\text{ GPa}$ và ứng suất cho phép của thanh là 250 MPa , xác định đường kính nhỏ nhất của thanh.

11.19. Khối chữ nhật E chuyển động với vận tốc 16 m/s va chạm vào tấm đệm BC gắn cứng với hai thanh AB và CD (hình BT11.19) có đường kính bằng 2 cm . Biết các thanh bằng thép có $\sigma_V = 50\text{ kN/cm}^2$ và $E = 200\text{ GPa}$, xác định trọng lượng của vật E, cho hệ số an toàn bằng 5.



Hình BT11. 19

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Chương 1

1.1. Tại B: 35,7MPa; Tại C: 42,4MPa

1.2. *Chỉ dẫn:* Áp dụng công thức (1.1) để tính ứng suất trên từng đoạn, rồi tính độ giãn dài của từng đoạn theo công thức: $\Delta l = \frac{PL}{AE}$

1.3. 62,7kN

1.4. *Chỉ dẫn:* Tách nút F để tính lực dọc trong các thanh BF và CF, sau đó tính nội lực trong thanh CG.

1.5. $\sigma = 489\text{kPa}$; $\tau = 489\text{kPa}$

1.6. *Chỉ dẫn:* Áp dụng công thức (1.8)

1.7. $\sigma = -37,1\text{MPa}$; $\tau = 17,28\text{MPa}$

1.8. $A_A = 4330\text{mm}^2$; $A_B = 10000\text{mm}^2$; $A_C = 20000\text{mm}^2$

1.9. *Chỉ dẫn:* Áp dụng công thức: $\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_{\text{an}}$; $F = P/2$; $A = L \cdot 300(\text{mm}^2)$

1.10. Tương tự bài 1.9

1.11. a) $P = 113,8\text{kN}$; b) $P = 156,0\text{kN}$; c) $54,3\text{kN}$; d) 216kN

1.12. $P_{\text{max}} = 291\text{kN}$

1.13. $\sigma = 60,8\text{MPa}$; $\tau = 14,4\text{MPa}$

1.14. a) $\sigma_x = 114,1\text{MPa}$; b) $\tau = 83,7\text{MPa}$

Chương 2

2.1. a) 6,91mm; b) 160,0 MPa

2.2. a) 17,25MPa; b) 2,82 mm

2.3. a) 817mm; b) 15,28mm

2.4. a) 62,8kN ← tại A ; 37,2kN ← tại E

b) 46,3 μm → tại C

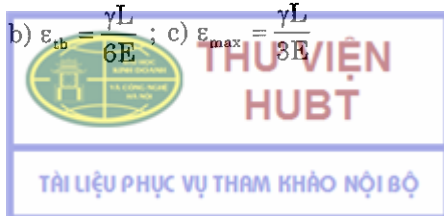
2.5. a) 0,0762 mm; b) $\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = 30,5\text{MPa}$; $\sigma_{EF} = 38,1\text{MPa}$

2.6. $\theta = 21,76^\circ$

2.7. -0,0518%

2.8. a) $\epsilon_c = 8100\mu\text{m} / \text{m}$; b) $\epsilon_c = 7770\mu\text{m} / \text{m}$

2.9. a) $\delta = \frac{\gamma L^2}{6E}$; b) $\epsilon_{\text{tb}} = \frac{\gamma L}{6E}$; c) $\epsilon_{\text{max}} = \frac{\gamma L}{3E}$



2.10. a) $\delta = 5,0\text{mm}$; b) $\epsilon_{ib} = 1667\mu\text{m} / \text{m}$; c) $\epsilon_{\text{max}} = 5000\mu\text{m} / \text{m}$

2.11. a) $0,0754\text{mm}$; b) $0,1028\text{mm}$; c) $0,1220\text{mm}$

2.12. **Chỉ dẫn** : Áp dụng định luật Húc tổng quát với $\epsilon_z = 0$

2.13. **Chỉ dẫn** : a) Áp dụng định luật Húc tổng quát với $\sigma_x = \sigma_z = 0$

2.14. $\Delta l \approx 0,332\text{m}$

2.15. $l \approx 13317\text{km}$

Chương 3

$$3.1. x_C = \frac{2R\sin\theta}{3\theta}; I_x = \frac{R^4}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right); I_y = \frac{R^4}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$

$$3.2. x_C = 0; y_C = \frac{4R\sin^2\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}; S_x = \frac{2}{3}R^3 \cdot \sin^3\alpha \text{ (hình BT3.2a)}$$

$$x_C = y_C = \frac{2R}{3(4 - \pi)} \approx 0,76R; S_x = \frac{R^3}{6} \text{ (hình BT3.2b)}$$

3.3. $h = 12\text{cm}$ hoặc $h = 6\text{cm}$

3.4. $x = 0,366a$; $y_C = 0,423h$

$$3.5. J_{xy} = \frac{h^2b^2}{4}; J_{x_0y_0} = -\frac{h^2b^2}{72}$$

3.6. $J_{\text{max}} = 1679\text{cm}^4$; $J_{\text{min}} = 257\text{cm}^4$; $\alpha_1 = 8^\circ 57'$; $\alpha_2 = 98^\circ 57'$ (hình BT3.6a)

$J_{\text{max}} = 7693,6\text{cm}^4$; $J_{\text{min}} = 3107\text{cm}^4$; $\alpha_1 = -33^\circ 36'$; $\alpha_2 = 56^\circ 24'$ (hình BT3.6b)

3.7. $I_u = I_{\text{max}} = 79300\text{mm}^4$; $I_v = I_{\text{min}} = 12850\text{mm}^4$; $\theta_{p1} = -16,85^\circ$; $\theta_{p2} = 73,2^\circ$

3.8. $I_{x_C} = 136\text{cm}^4$; $I_{y_C} = 448\text{cm}^4$

3.9. a) $I_x = 230 \cdot 10^6\text{mm}^4$;

b) $I_y = 267 \cdot 10^6\text{mm}^4$;

c) $I_z = 497 \cdot 10^6\text{mm}^4$

3.10. a) $I_x = 3,10\text{cm}^4$

b) $I_z = 3,86\text{cm}^4$

Chương 4

4.1. a) $117,9\text{MPa}$; b) $69,8\text{mm}$



$$4.2. \phi_A = \frac{TL}{4\pi Gt} \left(\frac{c_A + c_B}{c_A^2 \cdot c_B} \right)$$

4.3. *Chi dẫn*: Xét điều kiện bền của ống thép và ống đồng theo công thức (4.14) không được vượt quá τ_{all} , từ đó tính được mômen xoắn T.

4.4. a) Đoạn BC ; b) $51,2 \text{ kN/cm}^2$

4.5. a) $d_{AB} = 42,0 \text{ mm}$; b) $d_{BC} = 42,0 \text{ mm}$

4.6. *Chi dẫn*: Góc xoắn tại đầu trên của trục khoan $\phi = 4\pi$ (rad) xác định theo công thức (4.18), từ đó tính được mômen xoắn T rồi xác định ứng suất tiếp lớn nhất theo (4.14).

4.7. $\phi_{AB} = 0,152 \text{ rad}$; $\phi_{AC} = 0,144 \text{ rad}$

4.8. $\phi_A = 6,02^\circ$

4.9. a) $74,0 \text{ MPa}$; $9,56^\circ$; b) $61,5 \text{ MPa}$, $6,95^\circ$

4.10. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức (4.29)

4.11. a) $8,47 \text{ MPa}$; b) $8,47 \text{ MPa}$

4.12. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức (4.14), từ đó tính đường kính nhỏ nhất của trục. Góc xoắn tại D tính theo công thức (4.19);

4.13. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức $\phi_B = \frac{r_C}{r_B} \phi_C$ để tính góc xoắn tại bánh C, sau đó xác định mômen xoắn trên DC và CE, tổng của chúng cân bằng với mômen xoắn trên AB.

$$4.14. \phi = \frac{qL^2}{\pi Gc^4}$$

$$4.15. \phi = \frac{qL^2}{3\pi Gc^4}$$

Chương 5

5.1. a) $-61,6 \text{ MPa}$; b) $91,7 \text{ MPa}$

5.2. a) $116,4 \text{ kN/cm}^2$; b) $87,31 \text{ kN/cm}^2$

5.3. $80,2 \text{ kNm}$

5.4. $\sigma_{max} = 3,91 \text{ MPa}$; $\sigma_{min} = -6,04 \text{ MPa}$

5.5 – 5.6. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức tính ứng suất pháp của dầm chịu uốn thuần túy do mômen M_x hoặc M_y gây nên.

5.7. a) $-2P/\pi r^2$; b) $-5P/\pi r^2$



5.8. *Chi dẫn* : Nếu cả 3 lực tác dụng thì ta có thanh chịu kéo đúng tâm, nếu chỉ có lực tác dụng tại điểm 1 và 2 thì ta có thanh chịu kéo đồng thời uốn, sau đó áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để tính ứng suất pháp.

5.9. *Chi dẫn* : Tại B ta có thanh chịu kéo, tại A và C là chịu kéo lệch tâm

5.11. *Chi dẫn* : Phân tích mômen uốn thành 2 thành phần rồi áp dụng công thức thanh chịu uốn xiên.

5.12. Điểm A: $-2,80\text{MPa}$; điểm B : $0,452\text{MPa}$; Điểm D: $2,80\text{MPa}$

5.13. *Chi dẫn* : thanh chịu nén lệch tâm, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để tính ứng suất pháp.

5.14 – 5.15. *Chi dẫn* : Áp dụng công thức $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, với $\rho = R + h/2$;

$\ell = bh^3/12$; từ đó tính được mômen uốn M, rồi tính ứng suất pháp của thanh.

5.18. a) 1674 mm^2 ; b) $90,8 \text{ kNm}$

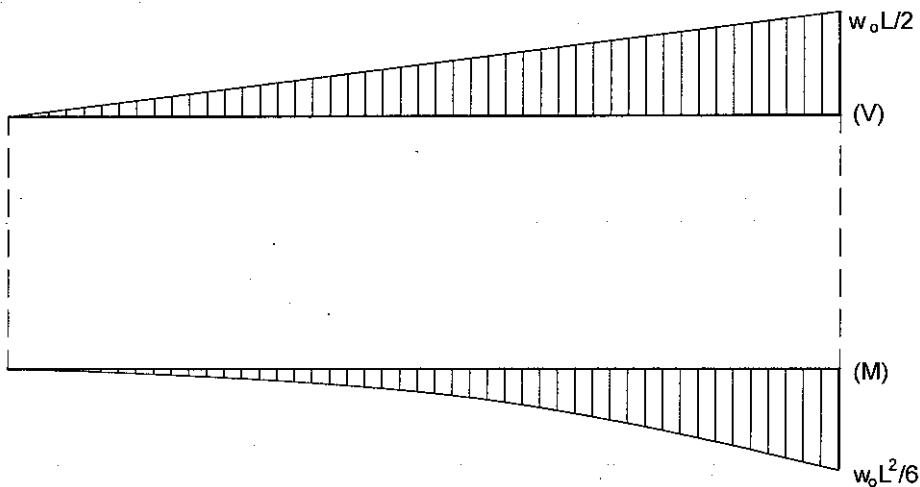
5.19 – 5.20. *Chi dẫn* : Áp dụng công thức: $n_1 = \frac{E_s}{E_b}$; $n_2 = \frac{E_b}{E_{al}}$ để tìm diện tích

qui đổi, và công thức (5.24) để tìm bán kính cong của dầm composite

Chương 6

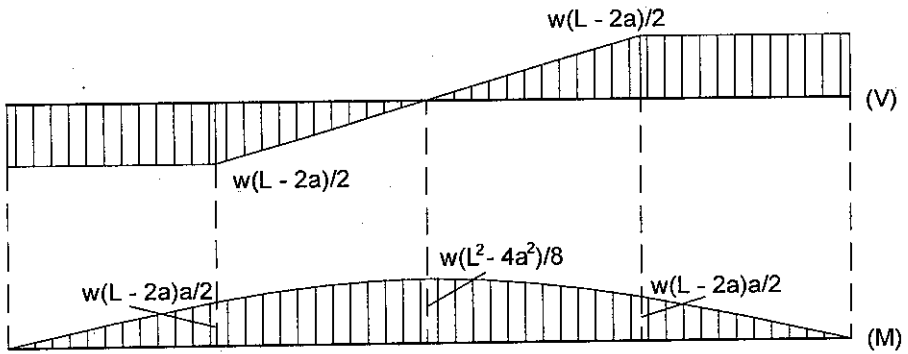
6.1.

a)



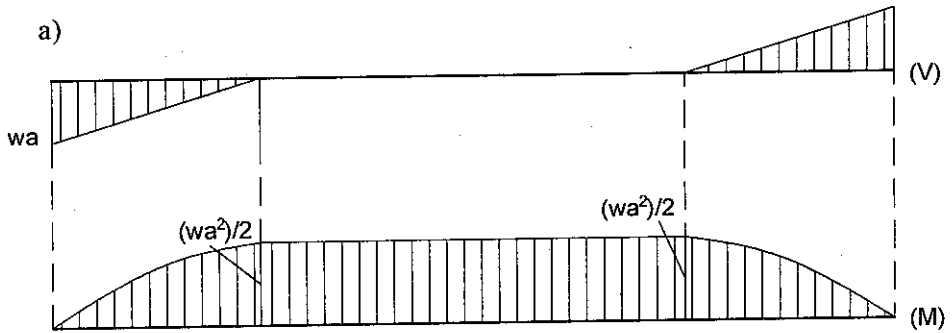
6.2.

a)



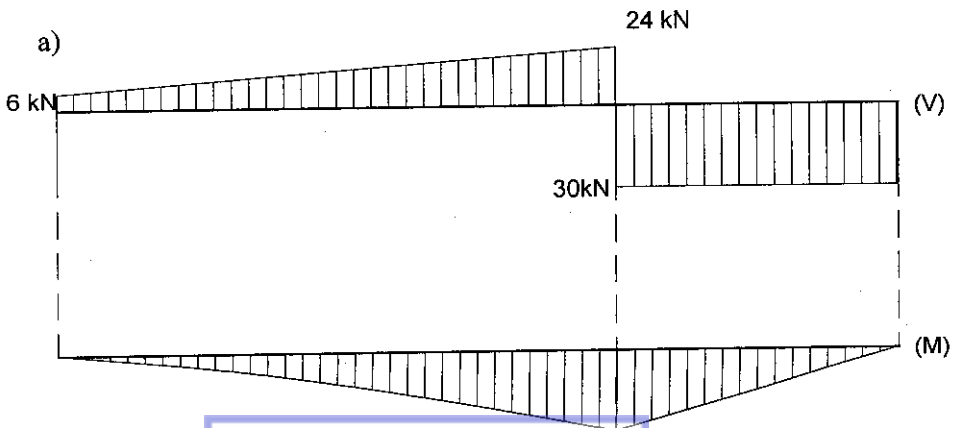
6.3.

a)

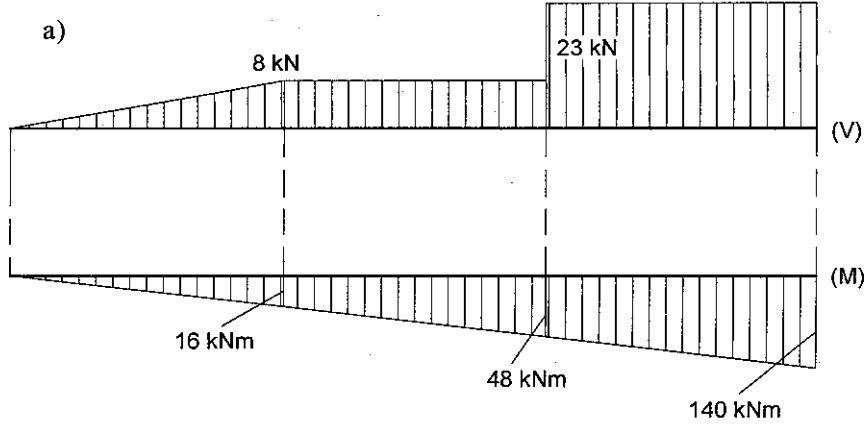


6.4.

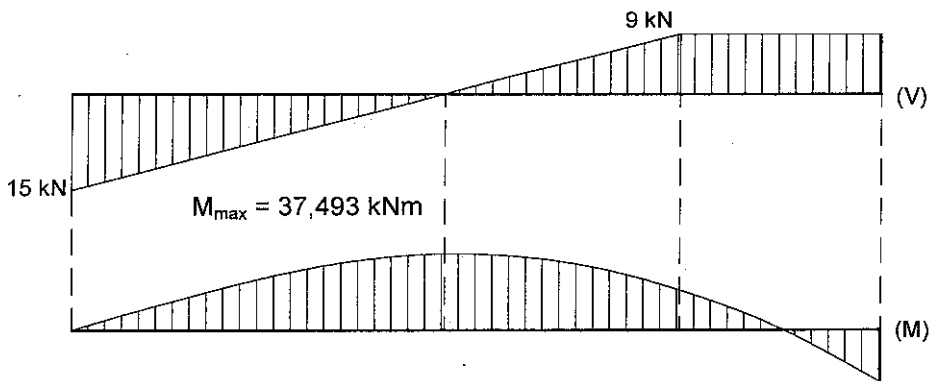
a)



6.5.

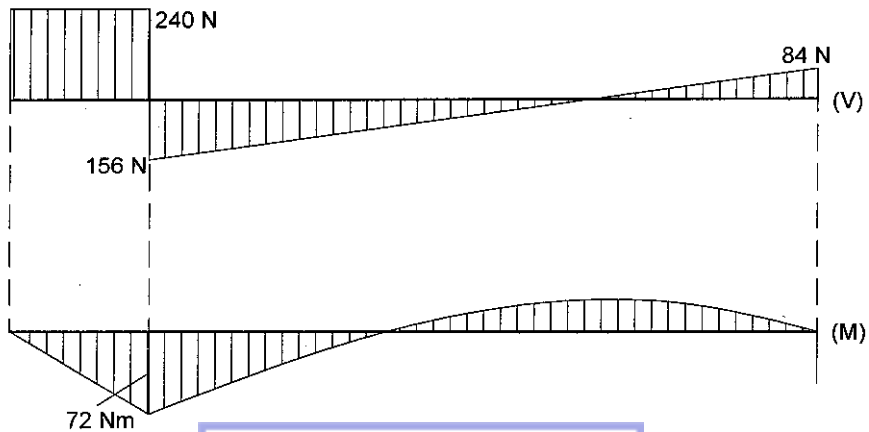


6.6. a)



b) $\sigma_{\max} = 74,98 \text{ kN/cm}^2$; $\tau_{\max} = 0,75 \text{ kN/cm}^2$

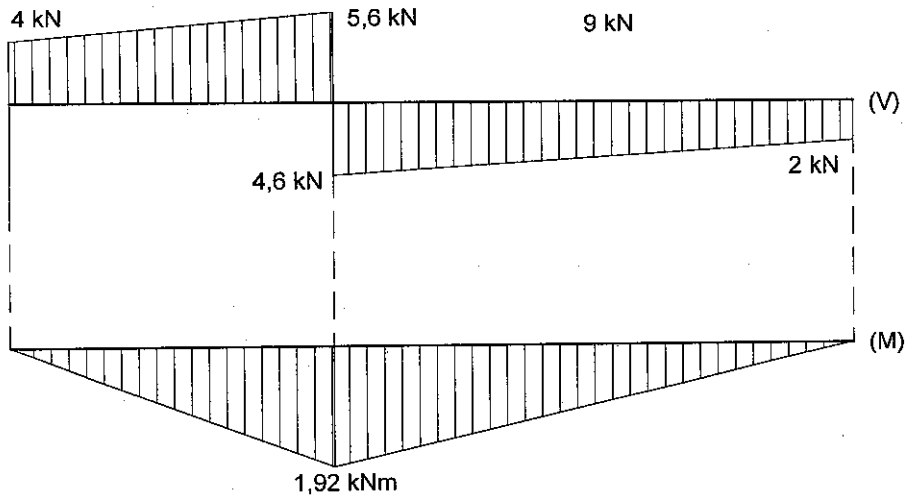
6.7. a)



b) $\sigma_{\max} = 346 \text{ N/cm}^2$



6.8. a)



b) $\sigma_{\max} = 38,7 \text{ MPa}$

6.9. *Chỉ dẫn:* Xác định P và Q từ trị số mômen uốn tại D, E cho trước và phương trình cân bằng tĩnh học.

6.10.

$$V = -w_0 \langle x-0 \rangle^1 + w_0 \langle x-2a \rangle^1 + \frac{3w_0 a}{2} \langle x-0 \rangle^0;$$

a)

$$M = -w_0 \frac{\langle x-0 \rangle^2}{2} + \frac{w_0}{2} \langle x-2a \rangle^2 + \frac{3w_0 a}{2} \langle x-0 \rangle^1$$

b) $M_E = \frac{1}{2} w_0 a^2$

6.11.

$$V = -w_0 \langle x-a \rangle^1 - \frac{3w_0 a}{4} \langle x-0 \rangle^0 + \frac{15w_0 a}{4} \langle x-2a \rangle^0;$$

a)

$$M = -w_0 \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} - \frac{3w_0 a}{4} \langle x-0 \rangle^1 + \frac{15w_0 a}{4} \langle x-2a \rangle^1$$

b) $M_E = -\frac{1}{2} w_0 a^2$

$$V = -\frac{w \langle x-0 \rangle^2}{a} + w \langle x-a \rangle^1 + \frac{w \langle x-a \rangle^2}{a};$$

6.12. a)

$$M = \frac{w \langle x-0 \rangle^3}{a} + w \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} + \frac{w \langle x-a \rangle^3}{a}$$

b) $M_C = -\frac{2}{3} w a^2$



6.13.

a) $V = 7 \langle x - 0 \rangle^0 - 3 \langle x - 0 \rangle^1 + 3 \langle x - 1 \rangle^1 - 3 \langle x - 3 \rangle^1 - 8 \langle x - 2 \rangle^0$
 $M = 7 \langle x - 0 \rangle^1 - 1,5 \langle x - 0 \rangle^2 + 1,5 \langle x - 1 \rangle^1 - 1,5 \langle x - 3 \rangle^1 - 8 \langle x - 2 \rangle^1$

b) $M_{\max} = 9,5 \text{ kNm}$

6.14.

a) $M_{\max} = 28,272 \text{ kN.m}$; $x = 0,75 \text{ m}$;
b) $\sigma_{\max} = 45,42 \text{ MPa}$; $\tau_{\max} = 10,38 \text{ MPa}$

6.15. Ứng suất pháp lớn nhất tại mép dưới mặt cắt ở điểm giữa của dầm, ứng suất tiếp lớn nhất tại đường trung hòa của mặt cắt ở hai đầu dầm.

6.16. $\ell = 1,8 \text{ m}$

6.17. $\ell = 1,9 \text{ m}$

6.18. $\ell_1 = 1,829 \text{ m}$; $\ell_2 = 1,22 \text{ m}$

6.20. a) $d = d_0 \left[4x(L-x) / L^2 \right]^{1/3}$

Chương 7

7.1. $33,7^0$; $123,7^0$; 24 kN/cm^2 , -2 kN/cm^2

7.2. $24,6^0$; $114,6^0$; $145,8 \text{ MPa}$; $54,2 \text{ Mpa}$

7.3. $-5,15^0 \leq \theta \leq 132,0^0$; và $174,85^0 \leq \theta \leq 312,0^0$

7.4. *Chi dẫn*: Sử dụng công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \leq 60 \text{ MPa}$$

7.5. Đáp số: a) 100 MPa ; b) 110 MPa

7.6. Đáp số: a) $94,3 \text{ MPa}$; b) $105,3 \text{ MPa}$

7.7. Đáp số: a) 55 MPa ; b) 50 MPa

7.8. Đáp số: a) 50 MPa ; b) $62,5 \text{ MPa}$

7.9. a) *Chi dẫn*: Áp dụng công thức (7.26) và (7.23); b) $\gamma_{\max} = |\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}|$

7.10. $\epsilon_x = 253 \cdot 10^{-6}$

7.11. a) $-300 \mu\text{m}/\mu\text{m}$; b) $435 \mu\text{m}/\mu\text{m}$; $-315 \mu\text{m}/\mu\text{m}$; $750 \mu\text{m}/\mu\text{m}$

7.13. $T = 113,2 \text{ kN.cm}$

7.14. $p = 1,421 \text{ MPa}$

7.15. *Chi dẫn*: Xem ví dụ 7.5



7.16. $P = 87\text{kN}$; $Q = 37,9\text{ kN}$

7.17. *Chi dẫn*: Trục chịu uốn đồng thời với xoắn; áp dụng công thức (7.42)

tính $\tau_{\max} \leq \tau_{\text{all}}$

7.18. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức (7.13), (7.16), (7.19) và nguyên lý cộng tác dụng (thanh chịu nén đồng thời với uốn)

7.19. $\tau_{\max} = P(2R + 4r/3) / \pi r^3$

7.20. *Chi dẫn*: Áp dụng công thức (7.13), và (7.19) và nguyên lý cộng tác dụng (thanh chịu nén đồng thời với uốn).

7.21. a) $7,50\text{MPa}$; b) $11,25\text{MPa}$; c) $56,3^0$; $13,52\text{MPa}$

7.22. $-14,98\text{MPa}$; $17,29\text{MPa}$

7.23. Tại A: $\sigma = 18,39\text{MPa}$, $\tau = 0,391\text{MPa}$; Tại B: $\sigma = 21,3\text{MPa}$, $\tau = 0,293\text{MPa}$;
Tại C: $\sigma = 24,1\text{MPa}$, $\tau = 0$.

7.24. Tại A: $\sigma = 86,5\text{MPa}$, $\tau = 0$; Tại B: $\sigma = 57,0\text{ MPa}$, $\tau = 9,47\text{ MPa}$; Tại C: $\sigma = 42,2\text{MPa}$, $\tau = 2,83\text{ MPa}$; Tại D: $\sigma = 12,74\text{MPa}$, $\tau = 0$;

7.25.

Điểm H: a) $\sigma_{\max} = 30,1\text{ MPa}$; $\sigma_{\min} = -0,62\text{ MPa}$; $-8,2^0$; $81,8^0$; b) $\tau_{\max} = 0$;

Điểm K: a) $\sigma_{\max} = 0,12\text{MPa}$; $\sigma_{\min} = -51,4\text{MPa}$; $2,8^0$; $92,8^0$; b) $\tau_{\max} = 25,8\text{MPa}$.

Chi dẫn: Phân tích lực theo phương thẳng đứng và nằm ngang, áp dụng công thức (7.13), (7.19) và nguyên lý cộng tác dụng (thanh chịu nén đồng thời với uốn).

7.26. *Chi dẫn*: Áp suất chất lỏng trong thành ống bằng trọng lượng riêng chất lỏng nhân với chiều cao kể từ mặt thoáng, áp dụng công thức (7.34) và (7.35).

Chương 8

8.1.

a) $y = -w(x^5 - 5L^4x + 4L^5) / 120EI$; b) $wL^5 / 30EI \downarrow$; c) $wL^4 / 24EI$

8.2. a) $y = -w(x^4 - 4L^3x + 3L^4) / 24EI$; b) $wL^4 / 8EI \downarrow$; c) $wL^3 / 6EI$

8.3. *Chi dẫn*: Áp dụng hàm gián đoạn

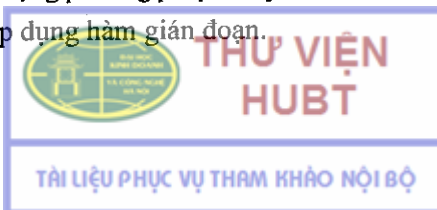
8.4. *Chi dẫn*: Áp dụng hàm gián đoạn

8.5. a) $6,55 \cdot 10^{-3}\text{ rad}$; b) $0,226\text{ cm}$

8.6. a) $y_m = 0,00652 w_0L^4/EI$ tại $x = 0,519L$; b) $0,229\text{ cm}$

8.7. *Chi dẫn*: Áp dụng phương pháp tích phân liên tiếp phương trình tải trọng $w(x)$.

8.8. *Chi dẫn*: Áp dụng hàm gián đoạn.



8.9. a) $y_A = wL^4 / 30EI$; b) $y_A = 13wL^4 / 240EI$

8.10. *Chi dẫn* : Áp dụng hàm gián đoạn, thay cặp lực tại C bằng mômen uốn tập trung.

8.11. $y_C = 7wL^4 / 10EI$

8.12. a) $R_A = 26,7kN$, $R_D = 45,3kN$, $M_D = 111,4 kN.m$; b) $y_B = 8,99mm$

8.13. Tách hai dầm và thay lực tương tác tại C thỏa mãn điều kiện tương thích về chuyển vị.

8.14. $y_B = 7PL^3 / 12EI$; $y_C = 23PL^3 / 12EI$

8.15. *Chi dẫn* : Áp dụng phương pháp mômen diện tích

8.16. a) $y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3ax^2)$; b) $a = 3L / 4$; c) $a = L / 3$

8.17. *Chi dẫn*: Độ võng toàn phần $y_B^{tp} = y_B^{(AB)} + y_B^{(CD)}$

8.19. *Chi dẫn*: Độ võng toàn phần $y_B^{tp} = y_B^{(AC)} + \Delta l^{(BD)}$

8.20. *Chi dẫn* : Áp dụng hàm gián đoạn.

Chương 9

9.1. $d = 6,325 \text{ cm}$

9.2. *Chi dẫn*: Xác định phân lực liên kết rồi dùng phương pháp tách nút, xác định lực dọc trong các thanh, sau đó tính lực tới hạn trong thanh chịu nén.

9.3. *Chi dẫn* : Tương tự như bài 9.2

9.4. $d = 102 \text{ mm}$

9.5. *Chi dẫn* : Tương tự như bài 9.2

9.6. $P_{max} = 3,78 \text{ kN}$

9.7. $P_{cr} = k.L$

9.8. $P_{cr} = K / L$

9.9. $P_{cr} = K / L$

9.10. $P_{cr} = 2kL / 9$

9.11. $d > 392mm$

9.12. $P_{cr} = ka^2 / 2l$

9.13. a) Áp dụng công thức (9.36, 9.37), từ đó tính được lực nén lớn nhất:

$$P_{all} = \sigma_{all} \cdot A$$

b) Tính độ mảnh (L/r) trong từng mặt phẳng xz ($L = 3m$) và yz ($L = 6m$) rồi áp dụng công thức (9.35b, c).



9.14. Áp dụng công thức (9.28) và (9.31)

9.15. a) 1568 kN; b) 633 kN

Chương 10

10.1. a) 264kN.cm; b) Thanh CD: 1,378kN.cm/cm³ ; Thanh EF: 8,83 kN.cm/cm³

10.2. 14,70 J

10.3. Sử dụng công thức : $x_D = \sum_i \frac{(N_{iP} \overline{N_{ik}}) \cdot \ell_i}{AE_i}$

10.4. $y_C = 3,19\text{mm}$

10.5. $y_A = 59,8\text{mm}$

10.6. $y_C = \frac{3Pa^3}{16EI}$

10.7. $y_C = \frac{3Pa^3}{4EI}$

10.8. $\varphi_B = \frac{5M_0L}{16EI}$

10.9. $\varphi_B = \frac{3M_0L}{16EI}$

10.11. $x_D = \frac{5PL^3}{6EI}$

10.12. $N_{BC} = P / (1 + 2 \cos^3 \varphi)$

10.13. $N_{BC} = 3P / 4$

10.14. $N_{AB} = 7P / 8$; $N_{BC} = 0,583P$

10.15. Chỉ dẫn: Áp dụng công thức 10.27 đối với thanh chịu kéo, nén.

10.16. $N_{AB} = 2P / 3$

10.17. $x_C = 0,38 \text{ cm}$

10.18. $y_B = \pi PR^3 / 2EI$

Chương 11

11.1. $U_a = \frac{5\sigma_Y^2 V}{8E}$; $U_b = \frac{\sigma_Y^2 V}{E}$

11.2. Chỉ dẫn: Sử dụng công thức $y_m = y_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t}} \right)$, với y_t là độ võng

tĩnh tại D do trọng lượng W đặt tĩnh lên dầm.

11.3. $h = 1,592\text{m}$



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

11.4. *Chỉ dẫn:* Sử dụng công thức:

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot k_d = \frac{W}{A} + \sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WhE}{AL}} \leq \sigma_{\max}$$

Với A là diện tích mặt cắt ngang, L là chiều dài của từng đoạn thanh, trọng lượng W được chọn là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức trên các đoạn thanh.

11.5. a) $\delta = 2,56$ cm ; b) $W = 256$ N

11.6. $\sigma = 117,2$ MPa

11.7: $h = 11,5$ cm

11.8. *Chỉ dẫn:* sử dụng công thức: $y_m = y_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t}}\right)$, độ võng tĩnh tại

điểm va chạm $y_t = \frac{W}{C} + \frac{WL^3}{48EI}$, từ đó tính được độ cứng C của lò xo.

11.9. a) $W = 4,5$ kg; b) $h = 17,35$ mm

11.10. a) 23,6mm; b) 64,4 N.m ; c) 157,6 MPa

11.11. *Chỉ dẫn:* $\sigma_m = \sigma_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t}}\right)$ với: $\sigma_t = \frac{PL}{S}$;

$$y_t = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^2 a}{3} + \frac{PL^3}{3} \right)$$

Trong đó S là mômen chống uốn của dầm, $L = 1,8$ m, $a = 0,75$ m, $P = 700$ N

11.12. a) $h = 43,4$ mm; b) $U_A = 0,424$ J ; $U_S = 0,696$ J ; $U_B = 1,718$ J

11.13. a) $h = 8,12$ cm; b) $k_d = 11,54$; c) $U_A = 150$ N.cm ; $U_B = 75$ N.cm

11.14. *Chỉ dẫn:*

$$y_t^C = y_C^{\text{uon}} + \varphi_B \cdot L ; \sigma_m = \sigma_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t^C}}\right) ; \tau_m = \tau_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t^C}}\right)$$

Trong đó góc xoắn tại đầu B: $\varphi_B = \frac{PL \cdot a}{GJ}$; $L = 30$ cm; $a = 20$ cm, J: mômen

quán tính độc cực của thanh AB

11.17. $v_0 = 2,55$ m/s

11.18. $d = 24,7$ mm



PHỤ LỤC

A – ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA MỘT SỐ VẬT LIỆU TIÊU BIỂU

Vật liệu	Khối lượng riêng (Mg/m ³)	Ứng suất tỷ lệ			Ứng suất bền			Giới hạn bền (MPa)	Môđun Đàn hồi (GPa)	Môđun Trượt (GPa)	Tỷ lệ dẫn dài trên 50mm	Hệ số dẫn nở vì nhiệt (10 ⁻⁶ /°C)
		Kéo (MPa)	Nén (MPa)	Trượt (MPa)	Kéo (MPa)	Nén (MPa)	Trượt (MPa)					
Kim loại đen												
Sắt thô	7,70	210	b		330	b	170	160	190		30 ^a	12,1
Thép kết cấu	7,87	250	b		450	b		190	200	76	28 ^a	11,9
Thép (0,2%C hóa cứng)	7,87	430	b		620	b			210	80	22	11,9
Thép (0,4%C Cán nóng)	7,87	360	b		580	b		260	210	80	29	
Thép(0,8%C Cán nóng)	7,87	520	b		840	b			210	80	8	
Gang xám	7,20				170	690		80	100		0,5	12,1
Gang dễ uốn	7,37	220	b		340	b			170		20	11,9
Gang có nhiều máu	7,37	480			690				170		4	11,9
Inox (18-8) đã tôi	7,92	250	b		590	b		270	190	86	55	17,3
Inox(18-8) cán nguội	7,92	1140	b		1310	b		620	190	86	8	17,3
Thép SAE 4340 đã xử lý nhiệt	7,84	910	1000		1030	b	650	520	200	76	19	
Kim loại màu												
Nhôm đúc 195-T6	2,77	160	170		250		210	50	71	26	5	
Nhôm thô 2014-T4	2,80	280	280	160	430	b	260	120	73	28	20	22,5
Nhôm thô 2024-T4	2,77	330	330	190	470	b	280	120	73	28	19	22,5
Nhôm thô 6061-T6	2,71	270	270	180	310	b	210	93	70	26	17	22,5
Magiê AZ80 kéo	1,83	240	180		340	b	140	130	45	16	12	25,9

dài												
Magiê AZ63 đúc trong khuôn cát	1,83	100	96		270	b	130	100	45	16	12	25,9
Hợp kim Niken-đồng (Monel)	8,84	340	b		620	b		270	180	65	35	14,0
Đồng đỏ cán nguội	8,75	410			520				100	39	4	17,6
Đồng đỏ tôi	8,75	100	b		270	b			100	39	50	17,6
Đồng thau cán nguội	8,86	520			690				100	45	3	16,9
Đồng thau tôi	8,86	140	b		340	b			100	45	50	16,9
Hợp kim Titan tôi	4,63	930	b		1070	b			96	36	13	
Hợp kim Thép-Niken (FeNi36)	8,09	290	b		480	b			140	56	41	1,1
Phi kim												
Gỗ linh sam tươi	0,61	33	23		27	6,2			11			
Gỗ linh sam khô	0,55	56	44		51	7,6			13			
Gỗ sồi tươi	1,02	30	18		24	8,3			10			3,4
Gỗ sồi khô	0,69	58	32		48	12,4			12			
Bê tông rắn trung bình	2,41		8		21				21			10,8
Bê tông rắn cao	2,41		14		34				31			10,8

B - ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA ỚNG THÉP CHUẨN

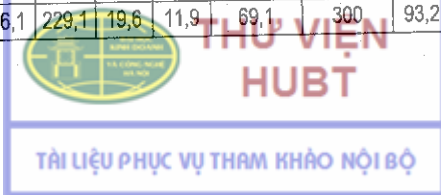
Kích thước				Đặc trưng				
Đường kính chuẩn d (mm)	Đường kính ngoài d _o (mm)	Đường kính trong d _i (mm)	Bề dày thành t (mm)	Khối lượng m (kg/m)	Diện tích A (mm ²)	Mômen quán tính I (10 ⁶ mm ⁴)	Mômen chống uốn S (10 ³ mm ³)	Bán kính quán tính r (mm)
Ống có trọng lượng vừa								
13	21,3	15,8	2,77	1,264	161,3	0,007	0,672	6,6
19	26,7	20,9	2,87	1,681	214,8	0,015	1,163	8,5
25	33,4	26,6	3,38	2,499	318,7	0,036	2,179	10,7
32	42,2	35,1	3,56	3,376	431,6	0,081	3,851	13,7
38	48,1	40,9	3,68	4,045	515,5	0,129	5,342	15,8
51	60,3	52,5	3,91	5,428	693,5	0,277	9,193	20,0
64	73,0	62,7	5,16	8,611	1099	0,637	17,44	24,1
76	88,9	77,9	5,49	11,27	1437	1,256	28,25	29,5
89	101,6	90,1	5,74	13,55	1729	1,992	39,17	34,0

102	114,3	102,3	6,02	16,05	2048	3,011	52,60	38,4
127	141,3	128,2	6,55	21,74	2774	6,310	89,31	47,8
152	168,3	154,1	7,11	28,21	3600	11,71	139,3	57,2
203	219,1	202,7	8,18	42,46	5419	30,2	275,5	74,7
254	273,1	254,5	9,27	60,20	7684	66,9	490	93,2
305	323,9	304,8	9,53	73,71	9406	116,3	718	111,3
Ông nặng								
38	48,3	38,1	5,08	5,399	689	0,163	6,75	15,4
51	60,3	49,3	5,54	7,466	953	0,361	11,98	19,5
64	70,0	59,0	7,01	11,39	1454	0,801	21,93	23,5
76	88,9	73,7	7,62	15,24	1946	1,621	36,54	29,0
102	114,3	97,2	8,56	22,28	2843	4,000	69,67	37,6
152	168,3	146,3	10,97	42,49	5423	16,85	200	55,9
Ông rất nặng								
38	48,3	27,9	10,16	9,53	1216	0,236	0,564	13,9
51	60,3	38,2	11,07	13,43	1714	0,546	1,104	17,9
64	70,0	45,0	14,02	20,36	2600	1,195	1,997	21,4
76	88,9	58,4	15,24	27,63	3526	2,494	3,42	26,7
102	114,3	80,1	17,12	40,96	5226	6,360	6,79	34,8
152	168,3	124,4	21,95	79,06	10090	27,61	20,0	52,3

C - ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA THÉP DÁT ĐỊNH HÌNH

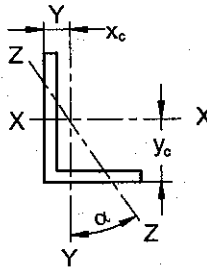
Chữ T

Số hiệu	Diện tích A (mm ²)	Đế			Thân	Đối với trục x				Đối với trục y		
		Chiều cao (mm)	Bề rộng (mm)	Bề dày (mm)	Bề dày (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	y _c (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)
WT457x171	21805	455,9	418,3	32,0	19,3	389	1098	133	102	196	936	94,7
x119	15160	457,3	304,8	25,9	16,5	308	914	142	120	61,2	403	63,5
WT381x 98	12515	384,9	267,8	25,4	15,6	175	613	118	99,1	40,8	305	57,2
x 80	10260	378,8	266,1	19,3	13,8	145	524	119	102	30,4	228	54,6
WT305x77	9870	305,6	323,9	19,1	12,7	78,7	328	89,2	65,8	54,1	333	73,9
x70	8905	308,7	230,3	22,2	13,1	77,4	333	93,2	75,9	22,7	197	50,3
x63	8000	306,1	229,1	19,6	11,9	69,1	300	93,2	75,4	19,6	172	49,5



x46	5875	301,5	178,8	15,0	10,9	54,5	256	96,3	87,9	7,16	80,3	35,1
WT229x57	7225	231,3	280,3	17,3	10,8	29,9	161	64,5	45,7	31,7	226	66,3
x45	5690	231,6	191,9	17,7	10,5	26,9	152	68,8	54,9	10,4	109	42,9
x37	4730	228,5	190,4	14,5	9,0	22,3	128	68,6	53,8	8,32	87,7	41,9
x30	3795	227,3	152,8	13,3	8,0	18,6	110	70,1	58,2	3,98	51,9	32,3
WT203x74	9485	215,5	264,8	25,0	14,9	32,0	187	57,9	44,7	38,8	293	63,8
x37	4755	206,5	179,6	16,0	9,7	17,6	111	61,0	48,0	7,74	86,2	40,4
x30	3800	203,3	177,7	12,8	7,7	13,8	87,7	60,2	46,0	5,99	67,5	39,9
x19	2475	199,3	139,7	8,8	6,4	9,78	67,0	62,7	53,1	2,00	28,5	28,4
WT178x89	11420	183,9	372,6	23,9	15,0	21,5	141	43,4	31,5	103	552	95,0
x61	7740	181,7	257,3	21,7	13,0	17,1	117	47,0	35,3	30,9	239	63,0
x51	6445	178,3	254,9	18,3	10,5	13,6	93,2	46,0	32,8	25,3	198	62,5
x36	4560	177,4	204,0	15,1	8,6	10,4	73,4	47,5	34,3	10,7	105	48,5
x 22	2850	175,8	170,9	9,8	6,9	7,91	58,2	52,6	40,1	4,07	47,7	37,8
x 16	2095	174,5	127,0	8,5	5,8	6,16	47,7	54,4	44,7	1,46	22,9	26,4
WT152x89	11355	166,6	312,9	28,1	18,0	18,1	135	39,9	32,5	71,6	459	79,5
x71	9095	161,4	308,9	22,9	14,0	13,3	100	38,4	28,7	56,2	364	78,5
x54	6840	155,6	305,8	17,0	10,9	9,66	74,4	37,6	25,9	40,6	265	77,2
x37	4735	154,8	205,2	16,2	9,4	7,78	62,1	40,6	29,7	11,7	114	49,8
X22	2840	156,7	165,6	11,2	6,6	5,62	45,1	44,5	32,3	4,25	51,1	38,6
x12	1525	152,3	101,3	6,7	5,6	3,62	33,4	48,8	44,2	0,587	11,6	19,6
WT127x83	10645	144,3	264,5	31,8	19,2	11,9	105	33,5	30,7	49,1	370	68,1
x65	8325	137,7	260,7	25,1	15,4	8,66	78,2	32,3	26,9	37,2	285	66,8
x45	5690	129,8	256,0	17,3	10,7	5,37	49,8	30,7	22,5	24,2	188	65,3
x22	2850	133,0	147,6	13,0	7,6	3,86	36,7	36,8	27,9	3,48	47,0	34,8
x 9	1140	125,3	100,6	5,3	4,8	1,81	20,0	39,9	34,5	0,454	9,03	19,9
WT102 x 43	5515	111,1	208,8	20,6	13,0	3,80	42,8	26,2	22,2	15,6	150	53,3
x30	3785	104,8	205,0	14,2	9,1	2,39	27,7	25,1	18,7	10,2	99,6	51,8
x18	2285	100,7	165,0	10,2	6,2	1,47	17,7	25,4	17,7	3,80	46,0	40,9
x13	1695	103,4	133,4	8,4	5,8	1,42	17,2	29,0	21,2	1,66	24,9	31,2
x7	955	100,2	100,1	5,2	4,3	0,895	11,7	30,5	24,2	0,437	8,72	21,4
WT176 x 15	1895	78,7	152,9	9,3	6,6	0,733	11,4	19,7	14,2	2,76	36,2	38,1
x9	1150	76,6	101,6	7,1	5,8	0,549	9,24	21,9	17,2	0,624	12,3	23,3
WT51 x 10	1230	52,8	103,1	8,8	7,1	0,219	5,26	13,3	11,2	0,803	15,6	25,4

Chữ L không đều cạnh



Số hiệu	Diện tích A (mm ²)	Chiều cao (mm)	Đế		Thân	Đối với trục x				Đối với trục y		
			Bề rộng (mm)	Bề dày (mm)	Bề dày (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	yc (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)
L229x102x15,9	39,1	4985	27,0	188	73,7	85,3	3,46	43,4	26,4	21,8	21,5	0,216
x12,7	31,7	4030	22,1	153	74,2	84,1	2,88	35,6	26,7	20,6	21,7	0,220
L203x152x25,49	65,8	83,85	33,6	247	63,2	67,3	16,1	146	43,9	41,9	32,5	0,543
x19,1	50,3	6415	26,4	192	64,3	65,0	12,8	113	44,7	39,6	32,8	0,551
x12,7	34,2	4355	18,4	131	65,0	62,7	9,03	78,5	45,5	37,3	33,0	0,558
L203x102x25,4	55,7	7095	29,0	231	64,0	77,5	4,83	64,6	26,2	26,7	21,5	0,247
x19,1	42,7	5445	22,9	179	64,8	74,9	3,90	50,3	26,7	24,2	21,6	0,258
x12,7	29,2	3710	16,0	123	65,8	72,6	2,81	35,2	27,4	21,8	22,0	0,267
L178x102x19,1	39,0	4960	15,7	138	56,4	63,8	3,77	49,7	27,7	25,7	21,8	0,324
x12,7	26,6	3385	11,1	95,2	57,2	61,5	2,72	34,7	28,2	23,3	22,1	0,335
x9,5	20,2	2570	8,57	72,8	57,7	60,2	2,12	26,7	28,7	22,1	22,4	0,340
L152x102x19,1	35,1	4475	10,2	102	47,8	52,8	3,61	48,7	28,4	27,4	21,8	0,428
x12,7	24,1	3065	7,24	71,0	48,5	50,5	2,61	34,1	29,2	25,1	22,1	0,440
x9,5	18,3	3230	5,62	54,4	49,0	49,3	2,04	26,2	29,7	23,9	22,3	0,446
L152x89x12,7	22,8	2905	6,91	69,5	48,8	52,8	1,77	26,1	24,7	21,2	19,3	0,344
x9,5	17,4	2205	5,37	53,1	49,3	51,8	1,39	20,2	25,1	20,0	19,5	0,350
L127x89x19,1	29,5	3750	5,79	70,1	39,4	44,5	2,31	36,4	24,8	25,3	19,0	0,464
x12,7	20,2	2580	4,16	49,0	40,1	42,2	1,69	25,6	25,7	23,0	19,2	0,479
x9,5	15,5	1970	3,24	37,5	40,6	40,9	1,32	19,8	25,9	21,9	19,4	0,486
x6,4	10,4	1330	2,24	25,7	41,1	39,6	0,928	13,6	26,4	20,7	19,6	0,492

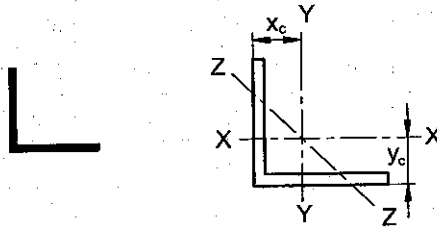


THƯ VIỆN
HUBT

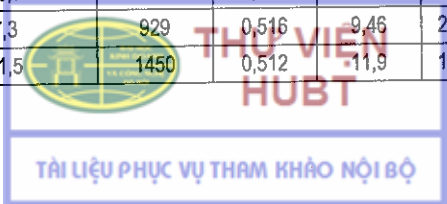
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

L127x76x12,7	19,0	2420	3,93	47,7	40,4	44,5	1,07	18,8	21,1	19,1	16,5	0,357
x9,5	14,6	1845	3,07	36,7	40,9	43,2	0,849	14,6	21,5	17,9	16,6	0,364
x6,4	9,82	1250	2,13	25,1	41,1	42,2	0,599	10,1	21,9	16,7	16,8	0,371
L102x89x12,7	17,7	2260	2,21	31,8	31,2	31,8	1,58	24,9	26,4	25,4	18,3	0,750
x9,5	13,5	1725	1,74	24,4	31,8	30,7	1,23	19,2	26,9	24,3	18,5	0,755
x6,4	9,22	1170	1,21	16,9	32,3	29,5	0,870	13,2	27,2	23,1	18,6	0,759
L102x76x12,7	16,5	2095	21,0	31,0	31,8	33,8	1,01	18,4	21,9	21,0	16,2	0,543
x9,5	12,6	1600	1,65	23,9	32,0	32,5	0,799	14,2	22,3	19,9	16,4	0,551
x6,4	8,63	1090	1,15	16,4	32,5	31,5	0,566	9,82	22,8	18,7	16,5	0,558
L89x76x12,7	15,2	1935	1,44	23,8	27,2	28,7	0,970	18,0	22,4	22,2	15,8	0,714
x9,5	11,8	1485	1,13	18,5	27,7	27,4	0,770	13,9	22,8	21,1	15,9	0,721
x6,4	8,04	1005	0,795	12,7	28,2	26,4	0,541	9,65	23,2	19,9	16,0	0,727
L89x64x12,7	14,0	1775	1,35	23,1	27,7	30,5	0,566	12,5	17,9	17,9	13,6	0,486
x9,5	10,7	1360	1,07	17,9	27,9	29,5	0,454	8,70	18,3	16,8	13,6	0,496
x6,4	7,29	929	0,749	12,4	28,4	28,2	0,323	6,75	18,7	15,6	13,8	0,506
L76x64x12,7	12,6	1615	0,866	17,0	23,2	25,4	0,541	12,2	18,3	19,1	13,2	0,667
x9,5	9,82	1240	0,691	13,3	23,6	24,3	0,433	9,52	18,7	17,9	13,3	0,676
x6,4	6,70	845	0,487	9,19	24,0	23,1	0,309	6,62	19,1	16,8	13,4	0,684
L76x51x12,7	11,5	1450	0,799	16,4	23,5	27,4	0,280	7,77	13,9	14,8	10,9	0,414
x9,5	8,78	1115	0,637	12,8	23,9	26,4	0,226	6,08	14,2	13,7	10,9	0,428
x6,4	6,10	768	0,454	8,88	24,3	25,2	0,163	4,26	14,6	12,5	11,0	0,440
L64x51x9,5	7,89	1000	0,380	8,96	19,5	20,7	0,214	5,95	14,7	14,8	10,7	0,614
x6,4	5,39	684	0,272	6,24	19,9	20,0	0,155	4,16	15,0	13,6	10,8	0,626

Chữ L đều cạnh

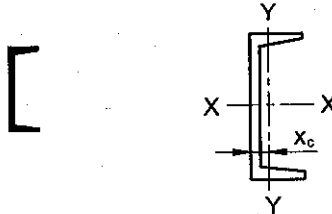


Số hiệu	Khối lượng (kg/m)	Diện tích A (mm ²)	Đối với trục x hoặc trục y				Đối với trục z
			I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	x _c hoặc y _c (mm)	r (mm)
L203 x 203 x 25,4	75,9	9675	37,0	259	62,0	60,2	39,6
x 22,2	67,0	8515	33,1	229	62,2	58,9	39,9
x 19,1	57,9	7355	29,0	200	62,7	57,9	40,1
x 15,9	48,7	6200	24,7	169	63,2	56,6	40,1
x 12,7	39,3	5000	20,2	137	63,5	55,6	40,4
L152 x 152 x 25,4	55,7	7095	14,8	140	45,7	47,2	29,7
x 22,2	49,3	6275	13,3	125	46,0	46,2	29,7
x 19,1	42,7	5445	11,7	109	46,5	45,2	29,7
x 15,9	36,0	4585	10,1	92,8	46,7	43,9	30,0
x 12,7	29,2	3710	8,28	75,5	47,2	42,7	30,0
x 9,5	22,2	2815	6,61	57,8	47,8	41,7	30,2
L127 x 127 x 22,2	40,5	5150	7,41	84,7	37,8	39,9	24,7
x 19,1	35,1	4475	6,53	74,2	38,4	38,6	24,8
x 15,9	29,8	3780	5,66	63,3	38,6	37,6	24,8
x 12,7	24,1	3065	4,70	51,8	39,1	36,3	25,0
x 9,5	18,3	2330	3,64	39,7	39,6	35,3	25,1
L102 x 102 x 19,1	27,5	3510	3,19	46,0	30,2	32,3	19,8
x 15,9	23,4	2975	2,77	39,3	30,5	31,2	19,8
x 12,7	19,0	2420	2,31	32,3	31,0	30,0	19,9
x 9,5	14,6	1845	1,81	24,9	31,2	29,0	20,0
x 6,4	9,8	1250	1,27	17,2	31,8	27,7	20,2
L89 x 89 x 12,7	16,5	2095	1,52	24,4	26,9	26,9	17,3
x 9,5	12,6	1600	1,19	18,8	27,2	25,7	17,4
x 6,4	8,6	1090	0,837	13,0	27,7	24,6	17,6
L76 x 76 x 12,7	14,0	1775	0,924	17,5	22,8	23,7	14,8
x 9,5	10,7	1360	0,732	13,7	23,2	22,6	14,9
x 6,4	7,3	929	0,516	9,46	23,6	21,4	15,0
L64 x 64 x 12,7	11,5	1450	0,512	11,9	18,8	20,5	12,4



x 9,5	8,8	1115	0,410	9,28	19,1	19,4	12,4
x 6,4	6,1	768	0,293	6,46	19,5	18,2	12,5
L51 x 51 x 9,5	7,0	877	0,199	5,75	15,1	16,2	9,88
x 6,4	4,75	605	0,145	4,05	15,5	15,0	9,93
x 3,2	2,46	312	0,079	2,15	15,9	13,9	10,1

CHỮ C



Số hiệu	Diện tích A (mm ²)	Bản cánh			Thân	Đối với trục x			Đối với trục y			
		Chiều cao (mm)	Bề rộng (mm)	Bề dày (mm)	Bề dày (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	x _c (mm)
C457x86	11030	457,2	106,7	15,9	17,8	281	1230	160	7,41	87,2	25,9	21,9
x 77	9870	457,2	104,1	15,9	15,2	261	1140	163	6,83	83,1	26,4	21,8
x 68	8710	457,2	101,6	15,9	12,7	241	1055	167	6,29	79,0	26,9	22,0
x 64	8130	457,2	100,3	15,9	11,4	231	1010	169	5,99	76,9	27,2	22,3
C381 x 74	9485	381,0	94,4	16,5	18,2	168	882	133	4,58	61,9	22,0	20,3
x 60	7615	381,0	89,4	16,5	13,2	145	762	138	3,84	55,2	22,5	19,7
x 50	6425	381,0	86,4	16,5	10,2	131	688	143	3,38	51,0	23,0	20,0
C305 x 45	5690	304,8	80,5	12,7	13,0	67,4	442	109	2,14	33,8	19,4	17,1
x 37	4740	304,8	77,4	12,7	9,8	59,9	395	113	1,86	30,8	19,8	17,1
x 31	3930	304,8	74,7	12,7	7,2	53,7	352	117	1,61	28,3	20,3	17,7
C254 x 45	5690	254,0	77,0	11,1	17,1	42,9	339	86,9	1,64	27,0	17,0	16,5
x 37	4740	254,0	73,3	11,1	13,4	38,0	298	89,4	1,40	24,3	17,2	15,7
x 30	3795	254,0	69,6	11,1	9,6	32,8	259	93,0	1,17	21,6	17,6	15,4
x 23	2895	254,0	66,0	11,1	6,1	28,1	221	98,3	0,949	19,0	18,1	16,1
C229 x 30	3795	228,6	67,3	10,5	11,4	25,3	221	81,8	1,01	19,2	16,3	14,8
x 22	2845	228,6	63,1	10,5	7,2	21,2	185	86,4	0,803	16,6	16,8	14,9
x 20	2540	228,6	61,8	10,5	5,9	19,9	174	88,4	0,733	15,7	17,0	15,3
C203 x 28	3555	203,2	64,2	9,9	12,4	18,3	180	71,6	0,824	16,6	15,2	14,4
x 20	2605	203,2	59,5	9,9	7,7	15,0	148	75,9	0,637	14,0	15,6	14,0
x 17	2180	203,2	57,4	9,9	5,6	13,6	133	79,0	0,549	12,8	15,9	14,5
C178 x 22	2795	177,8	58,4	9,3	10,6	11,3	127	63,8	0,574	12,8	14,3	13,5
x 18	2320	177,8	55,7	9,3	8,0	10,1	114	66,0	0,487	11,5	14,5	13,3

x 15	1850	177,8	53,1	9,3	5,3	8,87	99,6	69,1	0,403	10,2	14,8	13,7
C152 x 19	2470	152,4	54,8	8,7	11,1	7,24	95,0	54,1	0,437	10,5	13,3	13,1
x 16	1995	152,4	51,7	8,7	8,0	6,33	82,9	56,4	0,360	9,24	13,4	12,7
x 12	1550	152,4	48,8	8,7	5,1	5,45	71,8	59,4	0,288	8,06	13,6	13,0
C127 x 13	1705	127,0	47,9	8,1	8,3	3,70	58,3	46,5	0,263	7,37	12,4	12,1
x 10	1270	127,0	44,5	8,1	4,8	3,12	49,2	49,5	0,199	6,19	12,5	12,3
C102 x 11	1375	101,6	4,37	7,5	8,2	1,91	37,5	37,3	0,180	5,62	11,4	11,7
x 8	1025	101,6	40,2	7,5	4,7	1,60	31,6	39,6	0,133	4,64	11,4	11,6
C76 x 9	1135	76,2	40,5	6,9	9,0	0,862	22,6	27,4	0,127	4,39	10,6	11,6
x 7	948	76,2	38,0	6,9	6,6	0,770	20,3	28,4	0,103	3,82	10,4	11,1
x 6	781	76,2	35,8	6,9	4,6	0,691	18,0	29,7	0,082	3,31	10,3	11,1

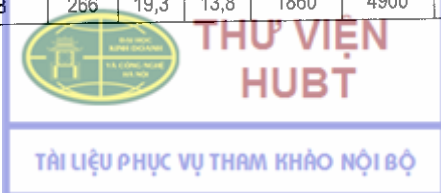
Chữ I

Số hiệu	Diện tích A (mm ²)	Bản cánh			Thân	Đối với trục x			Đối với trục y		
		Chiều sâu (mm)	Bề rộng (mm)	Bề dày (mm)	Bề dày (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)
S610 x 180	22970	622,3	204,5	27,7	20,3	1315	4225	240	34,7	339	38,9
x 158	20130	622,3	199,9	27,7	15,7	1225	3935	247	32,1	321	39,9
x 149	18900	609,6	184,0	22,1	18,9	995	3260	229	19,9	216	32,3
x 134	17100	609,6	181,0	22,1	15,9	937	3065	234	18,7	206	33,0
x 119	15160	609,6	177,8	22,1	12,7	874	2870	241	17,6	198	34,0
S508 x 143	18190	515,6	182,9	23,4	20,3	695	2705	196	20,9	228	33,8
x 128	16320	515,6	179,3	23,4	16,8	658	2540	200	19,5	218	34,5
x 112	14190	508,0	162,2	20,2	16,1	533	2100	194	12,4	153	29,5
x 98	12520	508,0	158,9	20,2	12,8	495	1950	199	11,5	145	30,2
S457 x 104	13290	457,2	158,8	17,6	18,1	358	1690	170	10,0	127	27,4
x 81	10390	457,2	152,4	17,6	11,7	335	1465	180	8,66	114	29,0
S381 x 74	9485	381,0	143,3	15,8	14,0	202	1060	146	6,53	91,3	26,2
x 64	8130	381,0	139,7	15,8	10,4	186	977	151	5,99	85,7	27,2
S305 x 74	9485	304,8	139,1	16,7	17,4	127	832	116	6,53	94,1	26,2
x 61	7740	304,8	133,4	16,7	11,7	113	744	121	5,66	84,6	26,9

x 52	6645	304,8	129,0	13,8	10,9	95,3	626	120	4,11	63,7	24,1
x 47	6030	304,8	127,0	13,8	8,9	90,7	596	123	3,90	61,3	25,4
S254 x 52	6645	254,0	125,6	12,5	15,1	61,2	482	96,0	3,48	55,4	22,9
x 38	4815	254,0	118,4	12,5	7,9	51,6	408	103	2,83	47,7	24,2
S203 x 34	4370	203,2	105,9	10,8	11,2	27,0	265	78,7	1,79	33,9	20,3
x 27	3490	203,2	101,6	10,8	6,9	24,0	236	82,8	1,55	30,5	21,1
S178 x 30	3795	177,8	98,0	10,0	11,4	17,6	198	68,3	1,32	26,9	18,6
x 23	2905	177,8	93,0	10,0	6,4	15,3	172	72,6	1,10	23,6	19,5
S152 x 26	3270	152,4	90,6	9,1	11,8	10,9	144	57,9	0,961	21,3	17,1
x 19	2370	152,4	84,6	9,1	5,9	9,20	121	62,2	0,758	17,9	17,9
S127 x 22	2800	127,0	83,4	8,3	12,5	6,33	99,8	47,5	0,695	16,6	15,7
x 15	1895	127,0	76,3	8,3	5,4	5,12	80,6	52,1	0,508	13,3	16,3
S102 x 14	1800	101,6	71,0	7,4	8,3	2,83	55,6	39,6	0,376	10,6	14,5
x 11	1460	101,6	67,6	7,4	4,9	2,53	49,8	41,7	0,318	9,41	14,8
S76 x 11	1425	76,2	63,7	6,6	8,9	1,22	32,0	29,2	0,244	7,67	13,1
x 8.5	1075	76,2	59,2	6,6	4,3	1,05	27,5	31,2	0,189	6,39	13,3

Chữ I bản rộng cánh

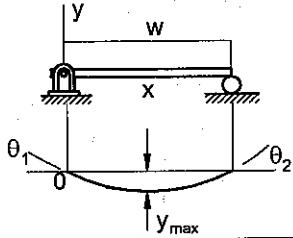
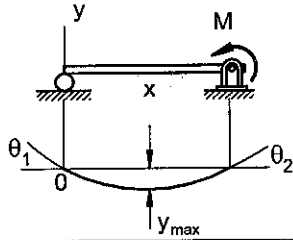
Số hiệu	Diện tích A (mm ²)	Bản cánh			Thân	Đối với trục x			Đối với trục y		
		Chiều sâu (mm)	Bề rộng (mm)	Bề dày (mm)	Bề dày (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	S (10 ³ mm ³)	r (mm)
W914 x 342	43610	912	418	32,0	19,3	6245	13715	378	391	1870	94,7
x 238	30325	915	305	25,9	16,5	4060	8880	366	123	805	63,5
W838 x 299	38130	855	400	29,2	18,2	4785	11210	356	312	1560	90,4
x 226	28850	851	294	26,8	16,1	3395	7980	343	114	775	62,7
x 193	24710	840	292	21,7	14,7	2795	6655	335	90,7	620	60,7
W762 x 196	25100	770	268	25,4	15,6	2400	6225	310	81,6	610	57,2
x 161	20450	758	266	19,3	13,8	1860	4900	302	60,8	457	54,6



W686 x 217	27675	695	355	24,8	15,4	2345	6735	290	184	1040	81,5
x 140	17870	684	254	18,9	12,4	1360	3980	277	51,6	406	53,8
W610 x 155	19740	611	324	19,1	12,7	1290	4230	257	108	667	73,9
x 125	15935	612	229	19,6	11,9	985	3210	249	39,3	342	49,5
x 92	11750	603	179	15,0	10,9	645	2145	234	14,4	161	35,1
W533 x 150	19225	543	312	20,3	12,7	1005	3720	229	103	660	73,4
x 124	15675	544	212	21,2	13,1	762	2800	220	33,9	320	46,5
x 92	11805	533	209	15,6	10,2	554	2080	217	23,9	228	45,0
W457 x 144	18365	472	283	22,1	13,6	728	3080	199	83,7	592	67,3
x 113	14385	463	280	17,3	10,8	554	2395	196	63,3	452	66,3
x 89	11355	463	192	17,7	10,5	410	1770	190	20,9	218	42,9
W406 x 149	18970	431	265	25,0	14,9	620	2870	180	77,4	585	64,0
x 100	12710	415	260	16,9	10,0	397	1915	177	49,5	380	62,5
x 60	7615	407	178	12,8	7,7	216	1060	168	12,0	135	39,9
x 39	4950	399	140	8,8	6,4	125	629	159	3,99	57,2	28,4
W356 x 179	22775	368	373	23,9	15,0	574	3115	158	206	1105	95,0
x 122	15550	363	257	21,7	13,0	367	2015	154	61,6	480	63,0
x 64	8130	347	203	13,5	7,7	178	1025	148	18,8	185	48,0
x 45	5710	352	171	9,8	6,9	121	688	146	8,16	95,4	37,8
W305 x 143	18195	323	309	22,9	14,0	347	2145	138	112	728	78,5
x 97	12325	308	305	15,4	9,9	222	1440	134	72,4	477	76,7
x 74	9485	310	205	16,3	9,4	164	1060	132	23,4	228	49,8
x 45	5670	313	166	11,2	6,6	99,1	633	132	8,45	102	38,6
W254 x 89	11355	260	256	17,3	10,7	142	1095	112	48,3	377	65,3
x 67	8580	257	204	15,7	8,9	103	805	110	22,2	218	51,1
x 45	5705	266	148	13,0	7,6	70,8	531	111	6,95	94,2	34,8
x 33	4185	258	146	9,1	6,1	49,1	380	108	4,75	65,1	33,8
W203 x 60	7550	210	205	14,2	9,1	60,8	582	89,7	20,4	200	51,8
x 46	5890	203	203	11,0	7,2	45,8	451	88,1	15,4	152	51,3
x 36	4570	201	165	10,2	6,2	34,5	342	86,7	7,61	92,3	40,9
x 22	2865	206	102	8,0	6,2	20,0	193	83,6	1,42	27,9	22,3
W152 x 37	4735	162	154	11,6	8,1	22,2	274	68,6	7,12	91,9	38,6
x 24	3060	160	102	10,3	6,6	13,4	167	66,0	1,84	36,1	24,6
W127 x 24	3020	127	127	9,1	6,1	8,87	139	54,1	3,13	49,2	32,3
W102 x 19	2470	106	103	8,8	7,1	4,70	89,5	43,7	1,61	31,1	25,4

D – ĐỘ VỒNG, GÓC XOAY CỦA DÀM CHỊU UỐN

Thứ tự	Tải trọng và liên kết (chiều dài L)	Góc xoay tại đầu mút	Độ võng lớn nhất
1		$\theta = -\frac{PL^2}{2EI}$ $x = L$	$\theta = -\frac{PL^3}{3EI}$ $x = L$
2		$\theta = -\frac{wL^3}{6EI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{wL^4}{8EI}$ $x = L$
3		$\theta = -\frac{wL^3}{24EI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{wL^4}{30EI}$ $x = L$
4		$\theta = +\frac{ML}{EI}$ $x = L$	$y_{\max} = +\frac{ML^2}{2EI}$ $x = L$
5		$\theta_1 = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$ $x = L$ $\theta_2 = +\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ $x = \sqrt{(L^2 - b^2)}/3$ $y_{x=L/2} = -\frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$
6		$\theta_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$ $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{PL^2}{16EI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$ $x = L/2$

7		$\theta_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$ $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{wL^3}{24EI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ $x = L/2$
8		$\theta_1 = -\frac{ML}{6EI}$ $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{ML}{3EI}$ $x = L$	$y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x = L/\sqrt{3}$ $y_{x=L/2} = -\frac{ML^2}{16EI}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Mechanics of Materials* – F.P. Beer, E.R. Johnston, J.T.DeWolf – Fourth Edition. Mac-GrawHill, 2006
2. *Strength of Materials* – W. Nash – Mac-Graw Hill, 2000
3. *Strength of Materials & Mechanics of Solids* – Problems solvers – M.Fogiel (Chief Editor), New Jersey, 1996.
4. *Mechanics of Materials* – William Riley, D. Sturges, Don Morris – John Wiley & Sons Inc. 1999
5. *Mechanics of Materials* – J.M.Geer – Mac-Graw Hill. 2001
6. *Strength of Materials* – Timoshenko X.P – Mac-Graw Hill. 1976
7. *Sức bền vật liệu tập 1 & 2* – Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai – NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002
8. *Bài tập Sức bền vật liệu* – Thái Thế Hùng, Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai, Hoàng Thị Bích Thủy, Trần Đình Long – NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005.
9. *Sức bền vật liệu* – Chủ biên : Nguyễn Y Tô – NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1970.
10. *Sức bền vật liệu* – Bùi Trọng Lưu, Vũ Đình Lai, Lê Quang Minh – NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1973.
11. *Sức bền vật liệu tập 1 & 2* – Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vương – NXB Giáo dục, 2006.
12. *Bài tập Sức bền vật liệu* – Bùi Trọng Lưu, Vũ Đình Lai, Lê Văn Trình, Hồ Thiệu Tuấn, Bùi Ngọc Ba – NXB Giáo dục, 1987.
13. *Bài tập Sức bền vật liệu* – Bùi Trọng Lưu, Nguyễn Văn Vương – NXB Giáo dục, 1999.
14. *Sức bền vật liệu* – Đỗ Kiến Quốc, Nguyễn Thị Hiền Lương, Bùi Công Thành, Lê Hoàng Tuấn, Trần Tấn Quốc – NXB ĐH Quốc gia T/p Hồ Chí Minh, 2002.
15. *Bài tập Sức bền vật liệu* – Mi-ơ- liu- bốp (bản dịch tiếng Việt) – NXB Mir, Matxcova, 1977.



16. *Dynamic Amplification factor in the Problem of Inclined Impact* – Phan Van Khoi, *Vietnam Journal of Mechanics*, Volume 22, N^o 2, 2/2000, pp.124-128.

17. *Теория упругости* – Тимошенко С П, Гудье ДЖ. Москва – "Наука", 1976.

18. *Elasticity- Theory, Applications and Numerics* – Martin H. Sadd – ELSEVIER Inc. NY. 2005.

19. *Bài tập Đàn hồi ứng dụng* – Nhĩ Phương Mai (chủ biên), Nguyễn Nhật Thăng (tái bản lần thứ ba, có chỉnh lý và bổ sung) – NXB Giáo dục, 2009.

20. *Lý thuyết Đàn hồi* – Nhĩ Phương Mai – NXB Giáo dục, 2009.

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu.....	3
Chương 1. Khái niệm về ứng suất và biến dạng	5
1.1. Mở đầu.....	5
1.2. Mô hình hóa kết cấu.....	6
1.3. Khái niệm về ứng suất.....	9
1.4. Ứng suất trên mặt nghiêng bất kỳ của thanh chịu lực dọc trục.....	11
1.5. Ứng suất trong trường hợp tổng quát.....	12
1.6. Các tiêu chuẩn thiết kế.....	13
Bài tập chương 1.....	16
Chương 2. Ứng suất và biến dạng trong hệ chịu tải trọng dọc trục	20
2.1. Khái niệm.....	20
2.2. Biến dạng dài trong thanh chịu lực dọc trục.....	21
2.3. Biểu đồ ứng suất – Biến dạng.....	22
2.4. Định luật Húc, mô đun đàn hồi, hệ số Poát-xông.....	23
2.5. Trường hợp chịu lực phức tạp. Định luật Húc tổng quát.....	26
2.6. Bài toán siêu tĩnh.....	27
2.7. Biến dạng do ảnh hưởng của nhiệt độ.....	29
2.8. Hiện tượng tập trung ứng suất.....	29
Bài tập chương 2.....	31
Chương 3. Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang	35
3.1. Khái niệm.....	35
3.2. Mômen tĩnh, trọng tâm của hình phẳng.....	35
3.3. Mômen tĩnh và trọng tâm của hình ghép bởi nhiều hình đơn giản.....	37
3.4. Mômen quán tính của mặt cắt ngang.....	39
3.5. Công thức chuyển trục song song.....	43
3.6. Mômen quán tính của một số hình ghép.....	43
3.7. Công thức xoay trục.....	46
Bài tập chương 3.....	52
Chương 4. Xoắn thuần túy	55



4.1. Khái niệm.....	55
4.2. Biến dạng của trục chịu xoắn.....	56
4.3. Công thức ứng suất tiếp và góc xoắn.....	57
4.4. Bài toán siêu tĩnh khi xoắn.....	64
4.5. Thiết kế trục truyền.....	67
4.6. Xoắn thanh mặt cắt ngang không tròn.....	68
4.7. Thanh mặt cắt ngang thành mỏng.....	69
Bài tập chương 4.....	73
Chương 5. Uốn thuần túy.....	79
5.1. Khái niệm.....	79
5.2. Uốn thuần túy thanh mặt cắt ngang đối xứng.....	79
5.3. Biến dạng của dầm chịu uốn thuần túy.....	81
5.4. Ứng suất và biến dạng trong miền đàn hồi.....	83
5.5. Uốn dầm làm từ các vật liệu khác nhau.....	86
5.6. Tải trọng lệch tâm tác dụng trong mặt phẳng đối xứng.....	91
5.7. Uốn trong mặt phẳng không đối xứng.....	93
5.8. Trường hợp tổng quát của tải trọng lệch tâm.....	96
Bài tập chương 5.....	99
Chương 6. Dầm chịu uốn ngang phẳng.....	104
6.1. Khái niệm.....	104
6.2. Biểu đồ lực cắt và mômen uốn.....	105
6.3. Ứng suất tiếp của dầm chịu uốn ngang phẳng.....	112
6.4. Sử dụng hàm gián đoạn xác định lực cắt và mômen uốn.....	126
6.5. Thiết kế dầm chịu uốn.....	138
Bài tập chương 6.....	139
Chương 7. Ứng suất – biến dạng trong trường hợp tổng quát.....	144
7.1. Khái niệm.....	144
7.2. Trạng thái ứng suất phẳng.....	145
7.3. Trạng thái ứng suất khối.....	150
7.4. Trạng thái biến dạng.....	153
7.5. Các thuyết bền.....	157
7.6. Ứng suất trong vỏ mỏng chịu áp suất bên trong.....	163
7.7. Ứng suất trong thanh chịu uốn ngang phẳng.....	168
7.8. Trục chịu uốn và xoắn đồng thời.....	169



7.9. Ứng suất trong trường hợp chịu lực tổng quát.....	173
Bài tập chương 7.....	179
Chương 8. Biến dạng của dầm chịu uốn.....	185
8.1. Khái niệm.....	185
8.2. Biến dạng của dầm chịu uốn ngang phẳng.....	186
8.3. Xác định độ võng trực tiếp từ tải trọng phân bố.....	186
8.4. Dầm siêu tĩnh chịu uốn.....	191
8.5. Áp dụng hàm gián đoạn xác định độ võng, góc xoay.....	195
8.6. Phương pháp mômen diện tích.....	202
Bài tập chương 8.....	212
Chương 9. Ổn định.....	217
9.1. Mở đầu.....	217
9.2. Công thức Ô-le đối với thanh liên kết khớp tại hai đầu.....	217
9.3. Mở rộng công thức Ô-le với các điều kiện biên khác nhau.....	220
9.4. Nén lệch tâm. Công thức cát tuyến.....	223
Bài tập chương 9.....	234
Chương 10. Phương pháp năng lượng.....	238
10.1. Khái niệm.....	238
10.2. Các định lý cơ bản.....	244
10.3. Phương pháp nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin.....	254
10.4. Giải hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực đơn vị.....	256
10.5. Dầm liên tục.....	266
Bài tập chương 10.....	271
Chương 11. Hệ chịu tải trọng động.....	275
11.1. Khái niệm.....	275
11.2. Hệ chuyển động với gia tốc là hằng số.....	275
11.3. Bài toán dao động của hệ đàn hồi một bậc tự do.....	277
11.4. Bài toán va chạm.....	284
Bài tập chương 11.....	296
Chỉ dẫn và Đáp số.....	302
Phụ lục.....	314
Tài liệu tham khảo.....	327
Mục lục.....	329



Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bàn thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc CTCP sách ĐH - DN TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập nội dung và sửa bản in:

NGUYỄN HÀ XUÂN

Trình bày bìa:

BÍCH LA

Thiết kế sách và chế bản:

NGUYỄN HÀ XUÂN

SỨC BỀN VẬT LIỆU - LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP
(DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT)

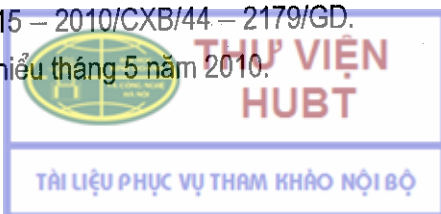
Mã số: 7B774Y0 - DAI

In 1.500 bản (QĐ : 21), khổ 16 x 24 cm. In tại Công ty Cổ phần In Hà Nội

Địa chỉ : Lô 6B, CN5 cụm công nghiệp Ngọc Hồi, huyện Thanh Trì, Hà Nội.

Số ĐKKH xuất bản: 15 - 2010/CXB/44 - 2179/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2010.





CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn ; Tel : 043.9724715



VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

TÌM ĐỌC

SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

- | | |
|---|-------------------|
| 1. Vật liệu phi kim và công nghệ gia công | Nguyễn Trường Kỳ |
| 2. Máy phay và thực hành gia công trên máy phay | Phí Trọng Hảo |
| 3. Nguyên lý cắt | Phùng Xuân Sơn |
| 4. Chi tiết máy | Nguyễn Xuân Ngọc |
| 5. Cơ học kỹ thuật | Nguyễn Văn Khang |
| 6. Giáo trình công nghệ CNC | Nguyễn Văn Thiện |
| 7. Bài tập nhiệt động kỹ thuật | Lê Nguyên Minh |
| 8. Thực hành cắt gọt kim loại trên máy tiện và máy phay | Nguyễn Hùng Cường |
| 9. Bài tập đàn hồi ứng dụng | Nhữ Phương Mai |
| 10. Lý thuyết đàn hồi | Nguyễn Nhật Thăng |
| | Nhữ Phương Mai |

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

- Tại TP. Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền.
- Tại TP. Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh ; 62 Nguyễn Chí Thanh.
- Tại TP. Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng - Quận 3.
Chi nhánh Công ty CP Sách Đại học - Dạy nghề, 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.
- Tại TP. Cần Thơ : 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.vn



8 93 4980 059005



THƯ VIỆN
HUBT



TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Giá: 45.000 đ