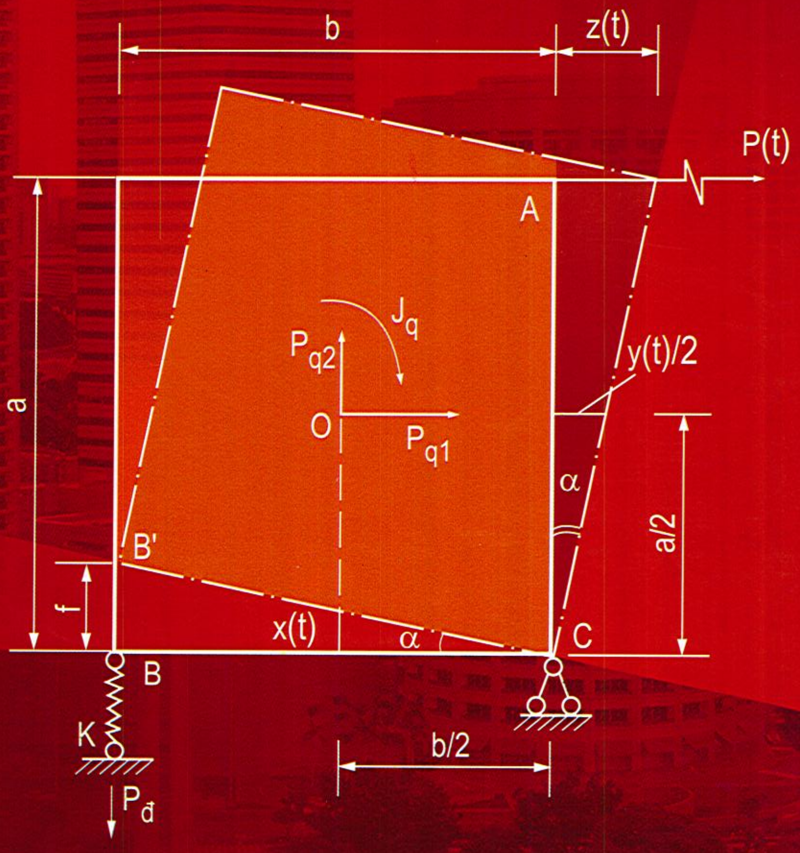
PGS. TS PHẠM ĐÌNH BA (Chủ biên)
PGS. TS NGUYỄN TÀI TRUNG

ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

PGS. TS. PHẠM ĐÌNH BA *(Chủ biên)*
PGS. TS. NGUYỄN TÀI TRUNG

ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

(Tái bản)

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2010

LỜI NÓI ĐẦU

Động lực học công trình *là phần chuyên đề của Cơ học công trình nghiên cứu các phương pháp tính toán công trình chịu các tác dụng động. Trong thực tế, ta thường phải giải quyết các bài toán về Động lực học công trình như: Các công trình nhà công nghiệp chịu tải trọng động; các công trình nhà cao tầng, các công trình cầu... chịu tác dụng động của gió bão và động đất; các công trình cầu chịu tải trọng động di động, các công trình thuỷ chịu tác dụng động của sóng biển...*

Tài liệu này sẽ trình bày các nội dung rất cơ bản của lí thuyết dao động công trình: Dao động hệ một bậc tự do; Dao động hệ hữu hạn bậc tự do; Dao động hệ vô hạn bậc tự do; Trên cơ sở đó có thể vận dụng để giải quyết các bài toán động lực học công trình trong thực tế với các hệ kết cấu khác nhau: Dầm, khung, dàn... chịu các tác dụng động khác nhau; Tài liệu cũng đề cập đến bài toán dao động của kết cấu khung cao tầng chịu tác dụng động đất. Ở tài liệu này, chủ yếu giải quyết các nội dung trong phạm vi của lí thuyết dao động tuyến tính; với bài toán dao động phi tuyến mới chỉ đề cập đến bài toán dao động đàn dẻo hệ một bậc tự do.

Tài liệu được biên soạn nhằm phục vụ cho các đối tượng đào tạo bậc đại học ngành xây dựng công trình, đồng thời đây cũng là tài liệu tham khảo cho các cán bộ kỹ thuật và các học viên cao học ngành công trình có liên quan.

Tuy có rất nhiều cố gắng trong biên soạn, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót, các tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Tác giả chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Xây dựng, các đồng nghiệp đã giúp đỡ để cuốn sách sớm ra mắt bạn đọc.

Các tác giả

MỞ ĐẦU

§1. NHIỆM VỤ CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Ở phần tĩnh học công trình của giáo trình Cơ học kết cấu, ta đã nghiên cứu các phương pháp tính toán công trình chịu tác dụng của tải trọng tĩnh. Trong thực tế, phần lớn các công trình xây dựng đều chịu tác dụng của tải trọng động.

Khái niệm về động lực học là khái niệm gắn liền với khái niệm về lực thay đổi theo thời gian; nghiên cứu động lực học công trình là nghiên cứu công trình chịu tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian.

Nhiệm vụ cơ bản của bài toán động lực học công trình là xác định chuyển vị và nội lực trong kết cấu công trình khi công trình chịu tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian: Trên cơ sở đó, sẽ xác định được các biến dạng và ứng suất cực đại để tính toán kiểm tra các công trình thực, đồng thời lựa chọn được kích thước kết cấu hợp lí đảm bảo biến dạng và ứng suất nhỏ để thiết kế các công trình mới, tránh các hiện tượng cộng hưởng.

Dưới tác dụng động của tải trọng thay đổi theo thời gian, hệ sẽ dao động và dao động đó được biểu thị dưới dạng chuyển vị của kết cấu. Do đó khi phân tích và giải quyết bài toán động lực học công trình sẽ cho phép xác định được sự thay đổi của chuyển vị theo thời gian tương ứng với quá trình thay đổi của tải trọng động. Các tham số khác như nội lực, ứng suất, biến dạng,... nói chung đều được xác định sau khi có sự phân bố chuyển vị của hệ. Tất cả các tham số đó đều là các hàm thay đổi theo biến thời gian phù hợp với tác dụng động bên ngoài. Tuy nhiên, đôi khi việc giải quyết bài toán động lực học công trình còn được tiến hành bằng việc đưa vào các hệ số động. Khi đó, nội lực chuyển vị và mọi tham số của hệ đều được tính toán thông qua hệ số động với các kết quả tính toán tĩnh. Tất cả các đại lượng đó đều là các giá trị cực đại ứng với một thời điểm xác định, không phải là các hàm theo biến thời gian.

§2. CÁC ĐẶC ĐIỂM CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Việc tính toán động lực học công trình khác với việc tính toán tĩnh học công trình ở những đặc điểm cơ bản dưới đây.

Trước hết, dưới tác dụng của tải trọng động thay đổi theo thời gian, trạng thái ứng suất biến dạng của hệ cũng sẽ biến đổi theo thời gian. Như vậy, bài toán động sẽ không có nghiệm duy nhất như bài toán tĩnh. Do đó, cần phải tìm sự liên tục của nghiệm tương ứng với mọi thời điểm thời gian biểu thị trạng thái thực của hệ. Chính vì thế mà việc tính toán động phức tạp và khó khăn hơn nhiều so với việc tính toán tĩnh.

Mặt khác, đặc điểm cơ bản của bài toán động được phân biệt rõ so với bài toán tĩnh ở chỗ: Ở bài toán tĩnh, dưới tác dụng của tải trọng tĩnh là tải trọng tác dụng chậm lên công trình, sự chuyển động của hệ là chậm và lực quán tính rất nhỏ có thể bỏ qua được. Ở bài toán động, tác dụng của tải trọng động lên công trình gây ra sự chuyển động của hệ với gia tốc lớn, và lực quán tính phụ thuộc vào gia tốc chuyển động (đạo hàm bậc hai của chuyển vị theo thời gian) là không thể bỏ qua được. Sự cần thiết phải kể đến lực quán tính là sự khác biệt cơ bản nhất của bài toán động lực học với bài toán tĩnh học.

Ngoài ra việc xét đến ảnh hưởng của lực cản cũng là một đặc điểm cơ bản phân biệt bài toán động với bài toán tĩnh. Bản chất của lực cản chuyển động (lực tắt dần) rất phức tạp và đa dạng. Vì vậy, việc tính lực cản phức tạp hơn so với tính lực quán tính. Trong tính toán, đôi khi không xét đến ảnh hưởng của lực cản, đôi khi lực cản được tính một cách gần đúng với những giả thiết phù hợp. Nhưng phải luôn thấy rằng lực cản luôn luôn có mặt và tham gia vào quá trình chuyển động của hệ.

§3. CÁC DẠNG TẢI TRỌNG ĐỘNG TÁC DỤNG LÊN CÔNG TRÌNH

Bất kì một kết cấu xây dựng nào trong quá trình sử dụng đều phải chịu tác dụng của tải trọng động ở dạng này hay dạng khác. Tải trọng động là tải trọng bất kì có độ lớn, phương, vị trí thay đổi theo thời gian. Tải trọng động tác dụng lên công trình rất đa dạng và phức tạp. Theo các đặc trưng của nó, tải trọng động với một quy luật bất kì nào đó được phân ra là tải trọng có chu kì và tải trọng không có chu kì.

1. Các tải trọng có chu kì

Tải trọng có chu kì là tải trọng lặp đi lặp lại theo thời gian qua các chu kì. Chu kì của tải trọng có thể là liên tục mà cũng có thể là gián đoạn. Nếu tải trọng tác dụng có quy luật hình sin hoặc cos với chu kì liên tục thì gọi là tải trọng điều hoà đơn giản, hay tải trọng rung động (hình M.1a). Tải trọng này phát sinh khi động cơ mô tơ có phần quay không cân bằng vì khối lượng đặt lệch tâm (hình M.1b). Mô tơ đặt trên hệ sẽ sinh ra lực quán tính li tâm:

$$P = Mr^2\rho \tag{M-1}$$

Trong đó:

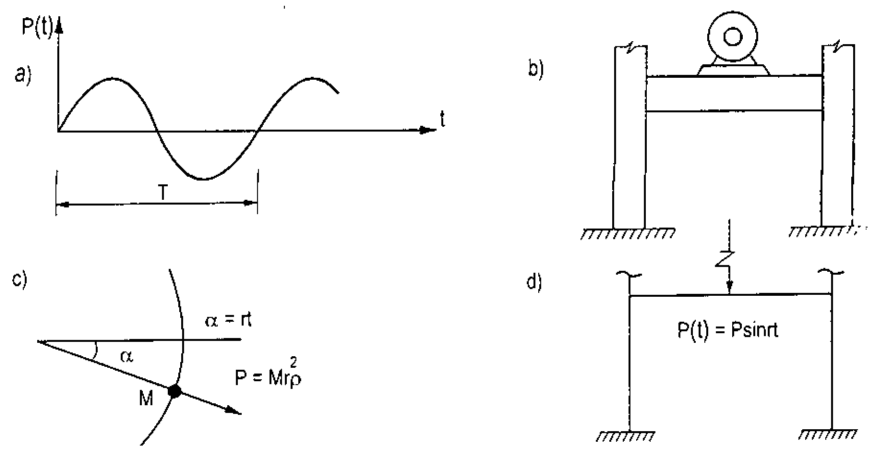
M - khối lượng phần quay;

ρ - độ lệch tâm;

r - vận tốc góc của mô tơ.

$$r = \frac{2\pi n}{60}\ , (1/s) \tag{M-2}$$

n - số vòng quay trong 1 phút.

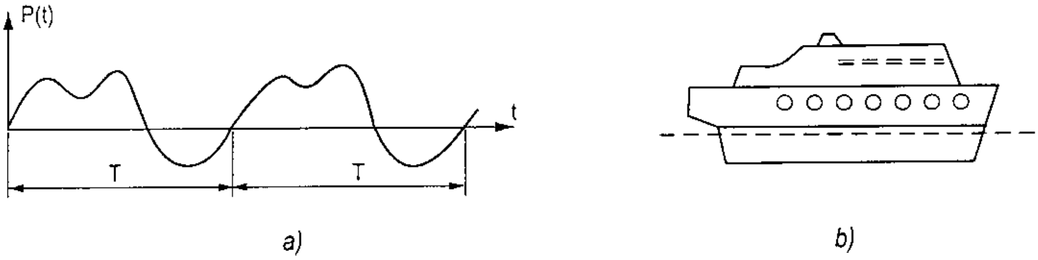


Hình M.1

Lực li tâm sẽ gây ra tải trọng động tác dụng lên hệ theo phương đứng và phương ngang. Tải trọng động tác dụng lên hệ theo phương đứng sẽ là:

$$P(t) = P.\sin rt \qquad \text{(M-3)}$$

Các dạng khác của tải trọng có chu kì thường phức tạp hơn. Sự phức tạp biểu hiện ở quy luật thay đổi của tải trọng trong mỗi chu trình (hình M.2a). Ví dụ như áp lực thuỷ động học do sự quay của cánh quạt tầu thuỷ (hình M.2b).

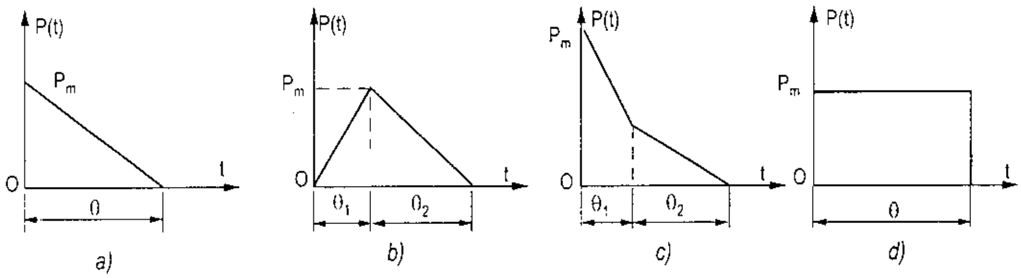


Hình M.2

2. Tải trọng không có chu kì

Tải trọng không có chu kì có thể là các loại tải trọng ngắn hạn và các tải trọng dài hạn dạng tổng quát:

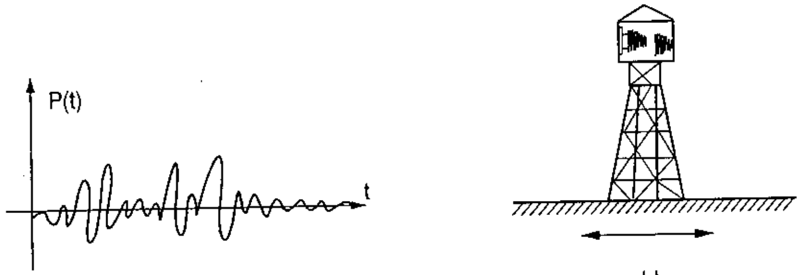
- *Tải trọng ngắn hạn:* Nguồn kích động đặc trưng của tải trọng ngắn hạn là các vụ nổ. Một số dạng tải trọng ngắn hạn cho ở hình M.3. Các dạng tải trọng hình M.3a, (M-3b) là dạng rất đặc trưng và thường gặp trong tính toán các công trình quân sự.



Hình M.3

Ở hình (M-3a) biểu thị áp lực của sóng va chạm (còn gọi là sóng xung kích) tác dụng vào công trình do các vụ nổ trong không khí. Sóng nổ sẽ truyền áp lực trực tiếp vào các công trình trên mặt đất, hoặc vào các mái công trình ngầm có chiều dày lớp đất lấp nhỏ. Đặc trưng của tải trọng này là tải trọng được tăng tức thời đến giá trị cực đại, sau đó giảm ngay theo quy luật tuyến tính. Ở hình (M-3b) biểu thị áp lực của sóng nén tác dụng vào các công trình vùi sâu trong đất do các vụ nổ trong đất gây ra. Sóng nổ sẽ truyền áp lực vào các mặt đáy và tường ngoài của công trình ngầm. Đặc trưng của tải trọng này là tải trọng được tăng nhanh theo quy luật tuyến tính đến giá trị cực đại, sau đó lại giảm cũng theo quy luật tuyến tính.

- *Tải trọng động dài hạn:* Tồn tại sau nhiều chu kì dao động, là dạng tải trọng thường gặp, thí dụ như tác dụng của động đất đối với các công trình xây dựng đều thuộc loại tải trọng này. Trên hình (M-4) mô tả sơ đồ tải trọng do các vụ động đất gây ra. Tải trọng động đất được đặc trưng bởi gia tốc ngang lớn và tương ứng xuất hiện lực quán tính ngang lớn.



a) b)

Hình M.4

Ngoài ra còn có nhiều tải trọng động phức tạp như tải trọng gió bão, sự thay đổi đột ngột của nhiệt độ môi trường, tác dụng của sóng biển,.. và các tải trọng ngẫu nhiên khác.

§4. PHÂN LOẠI DAO ĐỘNG

Tuỳ theo sự phân bố khối lượng trên hệ, cấu tạo và kích thước của hệ, tính chất của các loại tải trọng và các tác dụng động bên ngoài, ảnh hưởng và sự tương tác của môi trường dao động, cũng như sự làm việc của hệ v.v.. mà người ta có rất nhiều cách phân loại dao động khác nhau. Để thuận tiện cho việc phân tích dao động của các hệ, ta đưa ra một số cách phân loại sau:

1. Phân theo số bậc tự do của hệ dao động

Bậc tự do của hệ sẽ được xét ở phần dưới. Cách phân theo số bậc tự do đưa hệ về ba loại dao động sau:

- Dao động của hệ một bậc tự do;
- Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do (≥ 2);
- Dao động của hệ vô hạn bậc tự do.

2. Phân theo tính chất và nguyên nhân gây ra dao động

- Dao động tự do: Là dao động sinh ra do chuyển vị và tốc độ ban đầu của hệ. Điều kiện ban đầu được tạo nên do tác động của các xung lực tức thời và tách hệ ra khỏi vị trí cân bằng, nói cách khác dao động tự do là dao động không có tải trọng động duy trì trên hệ.

- Dao động cưỡng bức: Là dao động sinh ra do các tải trọng động (đã xét ở §3 - mở đầu) và các tác dụng động bên ngoài khác. Dao động cưỡng bức bao gồm rất nhiều loại như: Dao động của hệ chịu tải trọng có chu kì, hệ chịu tải trọng ngắn hạn, hệ chịu tải trọng di động, của các công trình và nhà cao tầng chịu tác dụng của gió, của các công trình chịu tải trọng động đất xung nhiệt v.v...

3. Phân theo sự tồn tại của lực

- Dao động không tắt dần: Là dao động bỏ qua ảnh hưởng của lực cản.

- Dao động tắt dần: Là dao động có xét tới lực cản.

4. Phân theo kích thước và cấu tạo của hệ: Theo cách phân loại này, dao động của hệ sẽ bao gồm:

- Dao động của hệ thanh (dầm, dàn, vòm, khung...);
- Dao động của tấm;
- Dao động của vỏ;
- Dao động của các khối móng;
- Dao động của hệ treo;
- Dao động của các kết cấu công trình đặc biệt v.v...

5. Phân theo dạng phương trình vi phân mô tả dao động

- Dao động tuyến tính: Là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính.

- Dao động phi tuyến: Là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân phi tuyến.

§5. BẬC TỰ DO CỦA HỆ DAO ĐỘNG

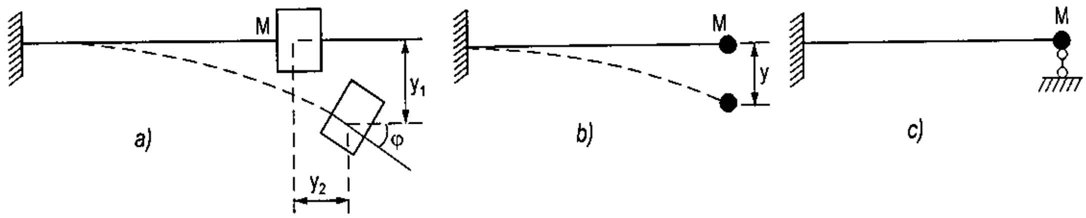
Bậc tự do của hệ dao động là số các tham số độc lập cần thiết để xác định đầy đủ vị trí của tất cả các khối lượng của hệ khi dao động.

Trước hết ta xét hệ với các khối lượng tập trung. Trong các hệ này có thể bỏ qua các lực quán tính của thanh và chỉ tính đến lực quán tính phát sinh do các khối lượng tập trung. Để tính bậc tự do, ta dùng các giả thiết sau:

- Coi các khối lượng tập trung của hệ là các chất điểm.

- Bỏ qua chiều dài co dãn do biến dạng uốn.

Xét ví dụ hệ cụ thể cho ở hình M.5. Hệ có một khối lượng tập trung.

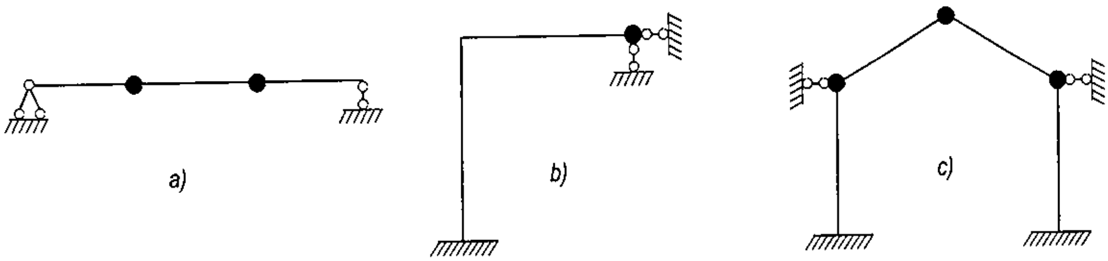


Hình M.5

Nếu không xét tới giả thiết trên, thì để xác định vị trí của khối lượng M cần phải có đủ 3 tham số là y_1, y_2 và φ. Vậy hệ sẽ có 3 bậc tự do. Với các giả thiết trên, để xác định vị trí của khối lượng M thì chỉ cần một tham số là y (hình M.5b). Vậy hệ chỉ có một bậc tự do.

Ta có thể xác định số bậc tự do bằng cách: Đặt vào các khối lượng của hệ các liên kết loại một vừa đủ để sao cho tất cả các khối lượng của hệ trở thành bất động, xem (hình M.5b).

Chú ý: Số bậc tự do của hệ dao động có thể nhỏ hơn, bằng, hoặc lớn hơn số khối lượng của hệ. Điều này dễ dàng được minh hoạ trên hình M.6.



Hình M.6

Ở hệ hình M.6a số bậc tự do bằng số khối lượng tập trung và bằng 2. Ở hệ hình (M.6b) có một khối lượng, nhưng lại có 2 bậc tự do. Ở hệ hình M.6c có 3 khối lượng, nhưng chỉ có 2 bậc tự do.

Ta xét hệ thanh với khối lượng phân bố. Ở hệ này ta không được phép bỏ qua lực quán tính của thanh và như vậy hệ sẽ có số bậc tự do là vô cùng. Để tính toán các hệ có khối lượng phân bố, cần phải thiết lập và giải hệ phương trình vi phân với các đạo hàm riêng, bởi vì trong trường hợp này lực quán tính phụ thuộc vào cả toạ độ và cả thời gian.

Số bậc tự do của hệ có thể được xem xét trên cơ sở việc rời rạc hoá hệ có khối lượng phân bố liên tục là hệ vô hạn bậc tự do về hệ hữu hạn bậc tự do. Việc rời rạc hoá có thể được tiến hành bằng cách tập trung khối lượng, hay chia phần tử.

§6. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Như đã biết, nhiệm vụ cơ bản của bài toán động lực học công trình là xác định sự thay đổi của chuyển vị theo thời gian của một hệ đã cho dưới tác dụng cảu tải trọng động. Các biểu thức toán học để xác định các chuyển vị động được gọi là các phương trình chuyển động của hệ. Nó được biểu thị ở dạng các phương trình vi phân, và phản ánh đặc trưng dao động của hệ. Giải các phương trình chuyển động đó ta sẽ xác định được các hàm chuyển vị cần tìm theo thời gian.

Việc thiết lập và đưa ra được phương trình vi phân chuyển động của hệ là giai đoạn quan trọng nhất trong tất cả sự phân tích dao động của bất kì một hệ nào. Phương trình vi phân chuyển động của hệ có thể được xây dựng trên cơ sở phương pháp tĩnh hoặc dựa trên các nguyên lí biến phân năng lượng. Dưới đây sẽ trình bày một số phương pháp sau:

1. Phương pháp tĩnh động (phương pháp áp dụng nguyên lí Đalambe)

Phương pháp tĩnh động là phương pháp áp dụng nguyên lí Đalambe đối với bài toán động lực học công trình. Nó dựa vào điều kiện xét cân bằng lực của phần tĩnh học trong đó có bổ sung thêm các lực quán tính đặt vào các khối lượng.

Như vậy, trên cơ sở nguyên lí Đalambe, để tìm phương trình vi phân chuyển động của các khối lượng trên hệ, ta chỉ việc viết các phương trình cân bằng lực của các khối lượng có kể đến các lực quán tính của chúng.

Các lực quán tính của các khối lượng được viết một cách tổng quát như sau:

$$F_{x,q} = -M\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -M\ddot{X}(t)$$

$$F_{y,q} = -M\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = -M\ddot{Y}(t) \qquad \text{(M-4)}$$

$$J_{u,q} = -J_0(u)\frac{d^2\alpha_u(t)}{dt^2} = -J_0(t)\ddot{\alpha}_u(t)$$

Trong đó: M - khối lượng tập trung của hệ;

$X(t)$, $Y(t)$ - chuyển vị tịnh tiến của khối lượng M theo phương của trục x và y;

$\alpha_u(t)$ - chuyển vị xoay của khối lượng M quanh trục u là trục vuông góc với mặt phẳng xoy;

$F_{x,q}$, $F_{y,q}$, $J_{u,q}$ - các lực quán tính của khối lượng M tương ứng với các chuyển vị tịnh tiến theo phương x, y và chuyển vị xoay quanh trục u;

$J_o(u) = \int_M \rho_u^2\, dm$ - mômen quán tính của khối lượng M với trục u, ρ_u là khoảng cách từ phân tố khối lượng đm đến trục u.

Hệ phương trình chuyển động viết đối với hệ phẳng sẽ là:

$$\begin{aligned} &\Sigma X - \Sigma M\ddot{X}(t) = 0 \\ &\Sigma Y - \Sigma M\ddot{Y}(t) = 0 \qquad \text{(M-5)} \\ &\Sigma J_u - \Sigma MJ_0(u)\ddot{\alpha}_u(t) = 0 \end{aligned}$$

Nhớ rằng $\sum X$ bao gồm không chỉ tải trọng động tác dụng vào khối lượng M, mà chứa cả lực đàn hồi và lực tắt dần đặt vào khối lượng M đó, tất cả các lực chiếu theo phương X, $\sum Y$, $\sum J_u$ cũng tương tự như vậy.

Đôi khi, phương trình vi phân chuyển động của hệ nhận được từ việc tìm biểu thức chuyển vị của các khối lượng do các tải trọng động, lực tắt dần và lực quán tính đặt vào các khối lượng gây ra. Lúc này, ta hiểu rằng toàn hệ đạt trạng thái cân bằng sau khi đã bổ sung các lực cần thiết vào các khối lượng của hệ.

Nói chung đối với đa số các bài toán động học đơn giản, phương pháp tĩnh động cho phép thiết lập các phương trình chuyển động của hệ rất thuận tiện và đơn giản.

Ví dụ minh hoạ các phương pháp sẽ được trình bày ở chương 1.

2. Phương pháp sử dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ

Khi sơ đồ kết cấu công trình khá phức tạp, đặc biệt là hệ có các khối lượng phân bố và các liên kết đàn hồi,... thì phép ghi trực tiếp điều kiện cân bằng lực của tất cả các lực tác dụng lên hệ với các đại lượng véctơ là rất khó khăn. Khi đó cần phải thiết lập phương trình vi phân chuyển động từ các biểu thức đại lượng vô hướng của công hay năng lượng. Một phương pháp hợp lí được sử dụng tiện lợi là phương pháp dựa trên nguyên lí chuyển vị khả dĩ. Phù hợp với nguyên lí này, phương trình vi phân chuyển động của hệ được xác định từ biểu thức công của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ bằng không. Để nhận được phương trình chuyển động của hệ, ta tiến hành các bước sau:

- Xác định tất cả các lực đặt vào các khối lượng của hệ, trong đó kể cả lực quán tính được xác định phù hợp với nguyên lí Đalambe;
- Đưa vào các chuyển vị khả dĩ tương ứng với các bậc tự do của hệ;
- Tính biểu thức công của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ và cho bằng không.

3. Phương pháp ứng dụng nguyên lí Haminton

Với các hệ phức tạp người ta còn sử dụng phương pháp ứng dụng nguyên lí biến phân động học Haminton. Phương pháp này sẽ đưa ra phương trình vi phân chuyển động từ biểu thức biến phân các hàm năng lượng của hệ. Nguyên lí Haminton có thể biểu thị như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta R\, dt = 0 \qquad \text{(M-6)}$$

Hay: $$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + R)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta R)\, dt = 0 \qquad \text{(M-6')}$$

Trong đó:

δT, δU - biến phân của động năng và thế năng của hệ;

δR - biến phân công do các lực không bảo toàn tác dụng lên hệ gây ra, bao gồm lực cản chuyển động và tải trọng ngoài.

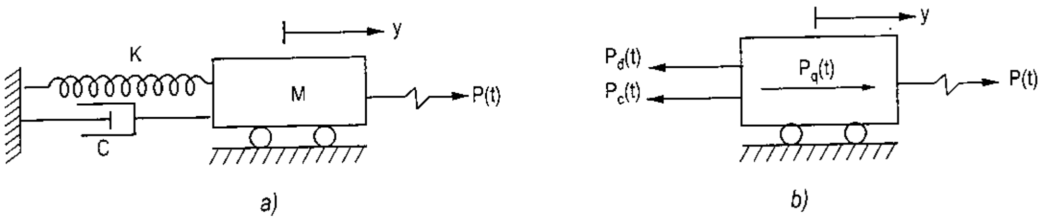
Phù hợp với nguyên lí này, biến phân của động năng, thế năng cộng với biến phân của công do tải trọng ngoài và lực tắt dần trong khoảng thời gian bất kì từ t_1 đến t_2 phải bằng không. Sử dụng phương pháp này có thể cho phép nhận được phương trình vi phân chuyển động của bất kì một hệ đã cho nào. Phương pháp này khác với phương pháp sử dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ ở chỗ: các lực quán tính và lực đàn hồi đều không có mặt khi thiết lập phương trình vi phân chuyển động, thay vào chúng là các giá trị động năng và thế năng tương ứng. Với các hệ phức tạp sử dụng phương pháp này cũng rất tiện lợi, bởi vì (M-6) biểu thị các đại lượng vô hướng.

Chương 1
DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

§1. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG TỔNG QUÁT HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1. Các lực tác động và các tham số cơ bản của hệ động học

Xét một mô hình đơn giản cho trên (hình 1.1). Hệ gồm có một khối lượng M chịu tác dụng của tải trọng động thay đổi theo thời gian P(t). Hệ được gắn với vật bất động bằng một lò xo đàn hồi không trọng lượng với độ cứng k, và một bộ giảm chấn c biểu thị sự tiêu hao năng lượng trong quá trình dao động. Các con lăn đảm bảo cho khối lượng chỉ có thể chuyển vị tịnh tiến theo phương ngang.



Hình 1.1

Các tham số vật lí cơ bản của hệ động học cho ở hình 1.1 cũng như đối với bất kì hệ kết cấu dao động tuyến tính khác đều bao gồm: khối lượng của hệ, các tính chất đàn hồi của hệ như độ cứng, độ mềm, có đặc trưng tiêu phí năng lượng trong quá trình dao động và các nguồn kích động cũng như các tác dụng động bên ngoài.

Trong quá trình dao động, hệ chịu tác động của các lực rất đa dạng. Các lực tác động chủ yếu bao gồm:

- *Tải trọng động* thay đổi theo thời gian và các kích động bên ngoài như đã xét ở phần mở đầu.

- *Lực đàn hồi:*

Lực đàn hồi xuất hiện khi hệ tách khỏi vị trí cân bằng và có xu hướng đưa hệ về vị trí cân bằng ban đầu, lực này luôn luôn tương ứng và phụ thuộc vào chuyển vị động của hệ. Ta kí hiệu lực đàn hồi là P_d.

$$P_d = P(y)$$

Sự phụ thuộc của lực đàn hồi vào chuyển vị động của hệ có thể là tuyến tính hoặc phi tuyến. Ở các hệ dao động đàn hồi tuyến tính, ta có:

$$P_d = Ky \qquad (1\text{-}1)$$

Trong đó y là chuyển vị động của hệ, k là hệ số cứng, là lực do chuyển vị bằng đơn vị gây ra tương ứng với phương của bậc tự do.

- Lực ma sát:

Lực này thường ngược chiều với chuyển động và có khả năng khử dao động của hệ, vì vậy người ta còn gọi lực này là lực cản hay lực tắt dần. Có hai loại ma sát: ma sát trong (trong vật liệu) và ma sát ngoài (ma sát tại các gốc tựa và lực cản của môi trường của hệ dao động). Ma sát xuất hiện rất lớn trong các công cụ và thiết bị giảm chấn để khử dao động. Các đặc trưng của lực ma sát rất đa dạng và phức tạp sẽ được xem xét cụ thể ở những phần sau. Ở đây mới chỉ đưa ra mô hình cản nhớt tuyến tính; trong đó lực cản phụ thuộc vào vận tốc dao động của hệ. Nếu kí hiệu lực cản là P_c thì:

$$P_c = C\dot{y} \qquad (1\text{-}2)$$

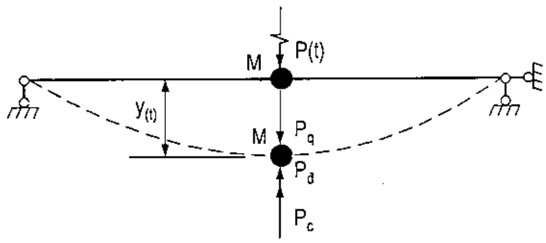
trong đó: C - hệ số tắt dần;

$\dot{y}$ - vận tốc dao động của hệ.

Tất cả các lực tác dụng vào khối lượng được mô tả trên hình 1.1b.

2. Xây dựng phương trình vi phân dao động tổng quát hệ một bậc tự do

Phương trình vi phân dao động tổng quát có thể được xây dựng từ một trong các phương pháp đã trình bày ở phần mở đầu. Ta khảo sát dao động của hệ một khối lượng tập trung đặt trên dầm đơn giản. Dầm được xem là vật thể đàn hồi không trọng lượng. Khối lượng chịu tác dụng của tải trọng trong thay đổi theo thời gian P(t) hình 1.2, hệ có một bậc tự do, đó là chuyển vị theo phương đứng y(t), chuyển vị này xác định vị trí của khối lượng M.



Hình 1.2

a) Phương pháp tĩnh động (Phương pháp áp dụng nguyên lí Đalambe)

Khi xét điều kiện cân bằng lực tĩnh học của khối lượng, ta bổ sung thêm *lực quán tính:*

$$P_q = -M\ddot{y}(t) \qquad (1\text{-}3)$$

Như vậy các lực đặt và khối lượng bao gồm: Tải trọng động $P_{(t)}$, lực đàn hồi P_d, lực cản P_c và lực quán tính P_q. Trên hình 1.2 và hình 1.1b đối với hệ ở hình 1.1a đã biểu thị sự tác dụng của tất cả các lực đó vào khối lượng M.

Phương trình chuyển động biểu thị sự cân bằng lực của tất cả các lực đó viết theo (M-5) sẽ là:

$$P_d + P_c - P_q = P(t) \qquad (1\text{-}4)$$

Thế các biểu thức (1-1), (1-2), (1-3) vào (1-4), ta nhận được:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \tag{1-5}$$

(1-5) là phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do. Phương trình này có thể nhận được từ biểu thức viết dưới dạng chuyển vị của khối lượng như sau:

Nếu gọi δ_{11} là chuyển vị tại khối lượng do lực đơn vị bằng 1 gây ra, thì chuyển vị động tương ứng với sự dao động của hệ sẽ là:

$$y(t) = \delta_{11}P(t) + \delta_{11}P_q - \delta_{11}P_c$$

Hay:

$$\frac{1}{\delta_{11}}y(t) + P_c - P_q = P(t)$$

Thay: $\frac{1}{\delta_{11}} = K$, P_c theo (1-2), P_q theo (1-3) vào biểu thức trên ta sẽ nhận được (1-5) như ở trên.

b) Phương pháp áp dụng nguyên lí Hamintơn

Để thiết lập phương trình vi phân dao động theo nguyên lí Hamintơn, ta cần phải xác định các biểu thức biến phân của động năng, thế năng, công do lực tắt dần và tải trọng động. Với hệ 1 bậc tự do cho trên hình 1.1 và hình 1.2, biểu thức động năng của hệ dễ dàng được xác định bởi tích số giữa khối lượng với bình phương vận tốc:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$$

Suy ra:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} = M\dot{y}\delta\dot{y}$$

Biểu thức thế năng của hệ được biểu thị bởi năng lượng biến dạng của lò xo đàn hồi:

$$U = \frac{1}{2}Ky^2$$

Suy ra:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial y}\delta y = Ky\delta y$$

Tải trọng động và lực tắt dần là các lực không bảo toàn của hệ, công của các lực này

$$R = P(t).y - C\dot{y}y$$

Và do đó

$$\delta R = P(t)\delta y - c\dot{y}\delta y \tag{c}$$

Thay các biến phân (a), (b), (c) vào phương trình (M-6) ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} [M\dot{y}\delta\dot{y} - c\dot{y}\delta y - Ky\delta y + P(t)\delta y]\, dt = 0 \tag{1-6}$$

Lấy tích phân từng phần số hạng đầu tiên của (1-6):

$$\int_{t_1}^{t_2} M\ddot{y}\,\delta y\,dt = M\dot{y}\,\delta y \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} M\dot{y}\,\delta\dot{y}\,dt \qquad (1\text{-}7)$$

Trong đó: $\delta\dot{y} = \dfrac{d(\delta y)}{dt}$

Phù hợp với nguyên lí Hamintơn, số hạng đầu tiên ở phần phải của phương trình (1-7) bằng không, bởi vì biến phân δy bằng không tại các giới hạn của tích phân t_1 và t_2. Vì vậy, thế (1-7) vào (1-6) ta sẽ được:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky + P(t)]\,\delta y\,dt = 0 \qquad (1\text{-}8)$$

Bởi vì δy là tuỳ ý, nên trong trường hợp tổng quát, phương trình (1-8) sẽ thoả mãn khi biểu thức trong dấu ngoặc bằng không. Biểu thức này chính là phương trình vi phân chuyển động (1-5) đã nhận được ở phương pháp tĩnh động.

c) Phương pháp áp dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ

Khi xây dựng phương trình vi phân dao động theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ ta cho khối lượng một chuyển vị khả dĩ δy. Lúc này mỗi trong tất cả các lực tác dụng vào khối lượng cho trên hình 1.1b hoặc hình 1.2 đều thực hiện một công tương ứng với chuyển vị khả dĩ δy đó. Ta có thể biểu thị công tổng quát bằng phương trình sau:

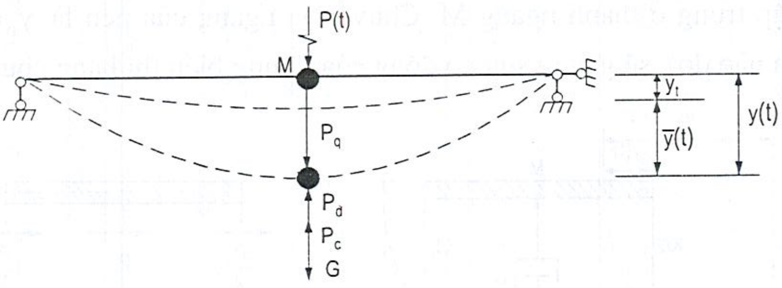
$$\delta A = P_q\,.\,\delta y - P_c\,\delta y - P_d\,\delta y + P(t)\,\delta y = 0 \qquad (1\text{-}9)$$

Trong đó dấu âm biểu thị lực tác dụng ngược với phương của chuyển vị khả dĩ: thế các biểu thức (1-1), (1-2), (1-3) vào (1-9) ta được:

$$[-M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky + P(t)]\,\delta y = 0 \qquad (1\text{-}10)$$

Vì δy là tùy ý, nên biểu thức trong ngoặc phải bằng không, đó chính là biểu thức của phương trình vi phân chuyển động (1-5).

d) Phương trình vi phân chuyển động khi xét đến trọng lượng bản thân của khối lượng



Hình 1.3

Khi tính đến trọng lượng bản thân của khối lượng, trong phương trình (1-4) phải tính đến lực trọng lực:

$$G = K\,.\,y_t \qquad (1\text{-}11)$$

Trong đó: y_t là độ võng tính - hình 1.3. Phương trình cân bằng lực trong trường hợp này sẽ là:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) + G \qquad (1\text{-}12)$$

Chuyển vị toàn phần y(t) được biểu thị bằng tổng của chuyển vị tĩnh y_t do trọng lượng bản thân gây ra và chuyển vị động $\bar{y}(t)$:

$$y(t) = y_t + \bar{y}(t) \qquad (1\text{-}13)$$

Đưa các biểu thức (1-11) và (1-13) vào (1-12), sau khi đơn giản ta được:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + K\bar{y} = P(t) \qquad (1\text{-}14)$$

Vì độ võng tính không thay đổi theo thời gian, nên: $\ddot{y}_t = \ddot{\bar{y}}(t)$ và $\dot{y}(t) = \dot{\bar{y}}(t)$, do đó ta có thể viết phương trình (1-14) như sau:

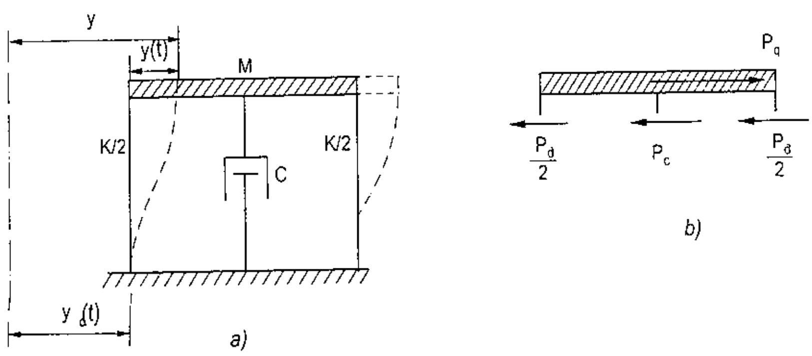
$$M\ddot{\bar{y}} + C\dot{\bar{y}}(t) = K\bar{y} = P(t) \qquad (1\text{-}15)$$

So sánh các phương trình vi phân chuyển động (1-15) và (1-5) ta thấy rằng: các phương trình vi phân chuyển động nhận được từ điều kiện cân bằng tĩnh của hệ động học không bị ảnh hưởng bởi trọng lượng bản thân. Lúc này hệ sẽ dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh ứng với độ võng ban đầu y_t. Từ (1-15) ta sẽ tìm được chuyển vị động $\bar{y}(t)$. Các chuyển vị cũng như ứng suất toàn phần của hệ sẽ là tổng của các thành phần tương ứng.

e) Phương trình vi phân chuyển động do sự kích động của nền

Sự kích động của nền do các vụ động đất, hoặc các vụ nổ lớn trong đất gây ra sự dao động không thể bỏ qua được đối với nhà và công trình. Đặc trưng cơ bản của tải trọng động đất là chuyển vị ngang rất lớn của nền cùng với gia tốc của nó. Mô hình đơn giản về sự dao động của nhà do tác dụng của chuyển vị ở nền cho trên hình 1.4.

Giả thiết rằng thanh ngang của khung có độ cứng bằng vô cùng, khối lượng của toàn bộ kết cấu tập trung ở thanh ngang M. Chuyển vị ngang của nền là $y_o(t)$ (so với một trục tính toán nào đó), sẽ gây ra sự dao động của khung biểu thị bằng chuyển vị của khối



Hình 1.4

lượng M theo phương ngang. Hệ có một bậc tự do là y_t. Hai thanh đứng được xem là không trọng lượng và không chịu nén dọc theo phương của các thanh. Lực cản đàn hồi đối với chuyển vị của thanh ngang được đặc trưng bởi độ cứng đàn hồi ở mỗi thanh đứng K/2. Lực cản tắt dần được biểu thị bằng bộ giảm chấn C.

Phương trình cân bằng lực của hệ được viết từ hình 1-4b:

$$P_đ + P_c - P_q = 0 \tag{1-16}$$

Chuyển vị toàn phần của khối lượng so với trục tính toán do kích động của nền gây ra là (xem hình 1.4a):

$$y_{\Sigma}^{t} = y_n(t) + y(t) \tag{1-17}$$

Trong đó y(t) là chuyển vị của bản thân kết cấu tính tại vị trí khối lượng theo phương ngang. Như vậy, lực quán tính của khối lượng sẽ là:

$$P_q = -M(\ddot{y}_n(t) + \ddot{y}(t)) \tag{1-18}$$

Các lực đàn hồi và lực cản chỉ liên quan đến chuyển vị y(t) của hệ: $P_đ = Ky(t)$; $P_c = C\dot{y}(t)$. Thay các lực này vào (1-16) ta nhận được:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) + M\ddot{y}_n(t) = 0 \tag{1-19}$$

Ở (1-19), ta xem $\quad P_h(t) = -M\ddot{y}_n(t) \qquad (1\text{-}20)$

Như tải trọng tác dụng lên hệ và gây ra dao động của hệ, tải trọng này bằng tích của khối lượng với gia tốc của nền. Dấu âm biểu thị tải trọng đó ngược chiều với gia tốc của nền.

Phương trình (1-19) được viết lại:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = P_h(t) \tag{1-21}$$

g) Một số thí dụ

Thí dụ 1-1 (áp dụng nguyên lí Đalambe và áp dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ)

Xây dựng phương trình vi phân dao động của hệ cho ở hình 1.5.

Hệ là vật cứng có dạng tấm chữ nhật, chiều dài a, chiều rộng b. Hệ được liên kết với đất bởi một khớp bất động và một liên kết thanh đàn hồi có độ cứng là K. Hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P_{(t)}$ theo phương ngang đặt tại góc A của tấm.

Cho khối lượng trên một đơn vị diện tích của tấm là γ, mô men quán tính của tấm lấy với trục qua tâm của tấm: $J_o = M\left(\dfrac{a^2 + b^2}{12}\right)$, trong đó M là khối lượng của tấm, M = γab.

Khi biên độ dao động không lớn, chuyển động của hệ này có thể được đặc trưng bởi một chuyển vị ngang tại điểm A là điểm đặt tải trọng động: Z(t), nghĩa là, hệ này có một bậc tự do. (Đặt một liên kết loại 1 vào A là hệ không chuyển động được). Như vậy, tất cả các lực tác dụng lên hệ đều được biểu thị qua chuyển vị Z(t) đó.

Lực đàn hồi đặt tại liên kết đàn hồi ở gối B:

$$P_d = K\,.\,f = K.(b\,.\,tg\alpha) = K\cdot\frac{b}{a}\,Z(t) \tag{a}$$

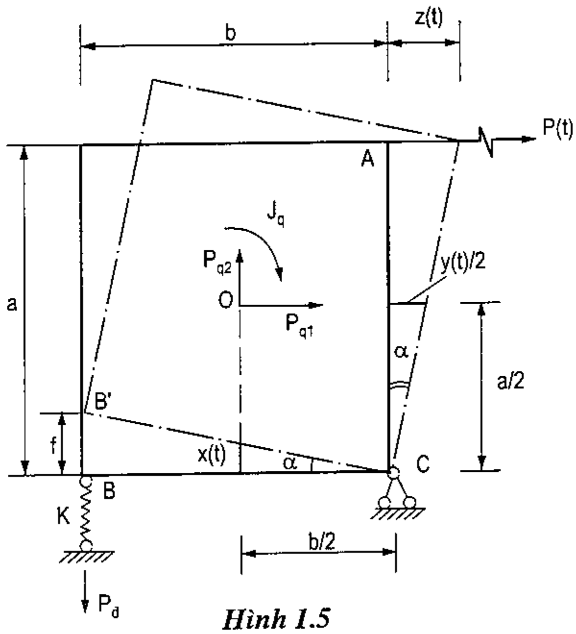
Lực quán tính của khối lượng theo phương ngang và phương đứng tính tại điểm giữa kết cấu:

$$P_{q1} = -M\frac{\ddot{Z}(t)}{2} = -\frac{1}{2}\,(\gamma ab)\,\ddot{Z}(t) \tag{b}$$

$$P_{q2} = -M\ddot{x}(t) = -(\gamma\, ab)\,\frac{b}{2a}\,\ddot{Z}(t) = -\frac{1}{2}\,(\gamma b^2)\,\ddot{Z}(t) \tag{c}$$

Lực quán tính mômen (ứng với chuyển vị xoay):

$$J_q = -J_o\ddot{\alpha}(t) = -\left(\gamma ab\,\frac{a^2+b^2}{12}\,\frac{\ddot{Z}(t)}{a}\right) \tag{d}$$



Hình 1.5

Cách thứ nhất: Áp dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ:

Ta cho khối lượng một vị khả dĩ δy tương ứng với bậc tự do của hệ. Tính công khả dĩ của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng; phù hợp với phương trình (1-10), ta có:

$$-\,P_d\left(\frac{b}{a}\delta z\right) + P_{q1}\left(\frac{\delta z}{2}\right) + P_{q2}\left(\frac{b}{2a}\delta z\right) + J_q\left(\frac{\delta z}{a}\right) + P(t).\delta z = 0 \tag{e}$$

Thay các lực đài hồi và lực quán tính theo (a), (b), (c), (d) vào (e), ta được:

$$\left\{\gamma ab\left[\frac{1}{12}\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{1}{4}\right]\ddot{y}(t)+K\frac{b^2}{a^2}y(t)-P(t)\right\}\delta z=0 \qquad \text{(f)}$$

Đặt $M^*=\dfrac{\gamma ab}{3}\left(\dfrac{b^2}{a^2}+1\right)$

$$K^*=\frac{b^2}{a^2}\cdot K \qquad \text{(g)}$$

$$P^*(t)=P(t)$$

Ta viết lại (f) như sau:

$$\left\{M^*\ddot{Z}(t)+K^*Z(t)-P^*(t)\right\}\delta z=0$$

Vì δy tùy ý, nên biểu thức trong ngoặc phải bằng không, từ đó ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$M^*\ddot{Z}(t)+K^*Z(t)=P^*\,Z(t) \qquad \text{(1-22)}$$

Cách thứ hai: Áp dụng phương pháp tĩnh động

Ta viết điều kiện cân bằng lực khi lấy tổng mômen của tất cả các lực đối với điểm C của hệ: $\sum M_c=0$ ta có:

$$P_d\,.\,b-P_{q1}\cdot\frac{a}{2}-P_{q2}\cdot\frac{b}{2}-J_q=P(t).\,a \qquad \text{(h)}$$

Thay các lực quán tính và lực đàn hồi theo (a), (b), (c), (d) vào (h), ta được:

$$\gamma ab\left[\frac{1}{12}\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)+\frac{1}{4}+\frac{b^2}{4a^2}\right]\ddot{Z}(t)+K\frac{b^2}{a^2}Z(t)=P(t) \qquad \text{(i)}$$

Phương trình này chính là phần trong ngoặc của biểu thức (f) của phương pháp áp dụng nguyên lí chuyển vị khả dĩ ở trên. Như vậy, phương trình vi phân dao động của hệ hòan toàn trùng với kết quả ở phương trình (1-22)

Thí dụ 1.2: (áp dụng nguyên lí Hamintơn) khối lượng phân bố.

Xây dựng phương trình vi phân dao động của cột tháp hình 1-6. Cột tháp là hệ đàn hồi liên tục có độ cứng uốn EJ(x) và khối lượng phân bố trên một đơn vị dài là m(x). Tháp chịu *tác dụng của động đất với chuyển vị của nền là $y_n(t)$* và tải trọng theo phương đứng đặt tại đỉnh tháp N.

Đây là hệ có khối lượng phân bố, nên hệ sẽ có vô số bậc tự do. Nếu hệ có 1 bậc tự do với một khối lượng tập trung chịu tác dụng của động đất, thì việc thiết lập phương trình vi phân chuyển động là tương đối đơn giản như đã trình bày ở mục 4. Nhưng ở đây, với hệ đàn hồi liên tục có vô số bậc tự do, ta cũng có thể tính gần đúng hệ như hệ một bậc tự do với giả thiết rằng: Trong quá trình chuyển động của hệ, hệ chỉ biến dạng theo một dạng uốn duy nhất.

Giả sử hàm độ võng ứng với chuyển vị theo phương ngang là φ(x), và biên độ dao động của hệ ở dạng tổng quát Z(t) là chuyển vị tại đỉnh tháp. Như vậy

$$y(x,t) = \varphi(x) \, . \, Z(t) \qquad (1\text{-}23)$$

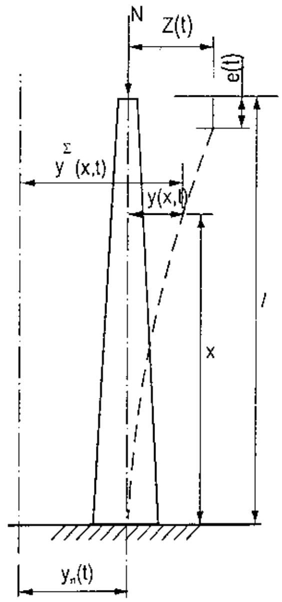
Ở ví dụ này ta sẽ áp dụng phương pháp Hamintơn để xây dựng phương trình vi phân dao động của hệ. Ta sẽ lần lượt xác định các động năng và thế năng có trong hệ. Động năng của cột tháp dễ dàng viết được:

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} m(x)\left[\ddot{y}(x,t)\right]^2 dx \qquad (1\text{-}24)$$

Thế năng biến dạng uốn bằng:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EJ(x)\left[y''(x,t)\right]^2 dx \qquad (1\text{-}25)$$

Trong đó: $y''(x,t) = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$



Hình 1.6

Để xác định thế năng gây ra do lực dọc trục tháp N, ta cần phải tính đến thành phần chuyển vị theo phương đứng tại đỉnh tháp e(t). Khi chịu biến dạng uốn y(x, t) thành phần này được tính trên cả chiều dài của cột tháp:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [y'(x,t)]^2 dx$$

Do đó, thế năng ứng với tải trọng N sẽ là:

$$U(N) = -N.e(t) = -\frac{N}{2} \int_0^l [y(x,t)]^2 dx \qquad (1\text{-}26)$$

Trong đó, dấu trừ biểu thị việc giảm thế năng của lực N khi tăng chuyển vị $e_{(t)}$.

Ở hệ đã cho không có các lực không bảo toàn (lực cản, tải trọng động), nên áp dụng nguyên lí Hamintơn (M-5) trong trường hợp này sẽ đơn giản hơn:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)\, dt = 0$$

Thế (1-24), (1-25), (1-26) vào phương trình trên, sau khi xác định các biến phân ta sẽ được:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x)\dot{y}'(x,t)\delta\dot{y}'(x,t)dx - \int_0^l EJ(x)y''(x,t)\ \delta y''dx + N\int_0^l y'(x,t)\delta y'dx \right] dt = 0 \quad (1\text{-}27)$$

Tính đến các quan hệ:

$$\dot{y}^{\Sigma}_{(x,t)} = \dot{y} + \dot{y}_n;\ y'' = \varphi''.z; y' = \varphi' z;\ y' = \varphi' z\ ;\ \dot{y} = \varphi \dot{z}$$

$$\delta \dot{y}' = \delta \dot{y}\ ;\ \delta y'' = \varphi'' \delta z\ ;\ \delta y' = \varphi' dz;\ \delta \dot{y} = \varphi \delta \dot{z}$$

và thay chúng vào phương trình (1-27) ta sẽ được:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\dot{Z}\delta\dot{Z} \int_0^1 m(x)\varphi^2 dx + \delta\dot{Z}\dot{Y}_{(n)}(t) \int_0^1 m(x)\varphi dx - Z\delta z \int_0^1 EJ(x)(\varphi'')^2 dx +$$

$$+ NZ\delta Z \int_0^1 (\varphi')^2 dx \Big] dt = 0 \qquad (1\text{-}28)$$

Tích phân theo từng phần đối với hai thành phần đầu tiên của phương trình (1-28) ta sẽ đi đến:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m^* \dot{Z} + (K^* - K_G^*) Z - P^*_{h(t)} \right] \delta\ Z dt = 0 \qquad (1\text{-}29)$$

Trong đó:

$m^* = \int_0^1 m(x)\varphi^2 dx$ - khối lượng tổng quát;

$K^* = \int_0^1 EJ(x)(\varphi'')^2 dx$ - độ cứng tổng quát; (1-30)

$K_G^* = N \int_0^1 (\varphi')^2 dx$ - độ cứng hình học tổng quát;

$P_h^*(x) = -y_n''\ (x) \int_0^1 m(x)\varphi dx$ - tải trọng hiệu dụng tổng quát.

Nếu kí hiệu: $\overline{K}^* = K^* - K_G^*$ - độ cứng tổng quát tổng cộng, thì phương trình (1-29) sẽ là:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m^* Z'' + \overline{K}^* Z - P_h^*(t) \right] \delta\ Z dt = 0$$

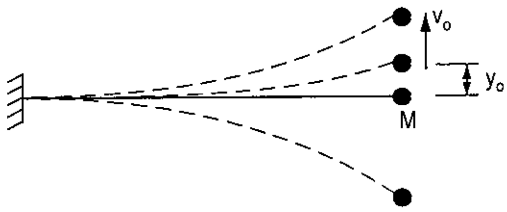
Vì biến phân δ Z là tùy ý nên biểu thức trong ngoặc của phương trình trên phải bằng không, ta sẽ nhận được:

$$m^* \ddot{Z}(t) + \overline{K}^* Z(t) = P_h^*(t) \qquad (1\text{-}31)$$

(1-31) chính là phương trình vi phân dao động của hệ đã cho.

Các phương trình (1-31), (1-22) là phương trình vi phân chuyển động của hệ một bậc tự do phức tạp, trong đó Z(t), được gọi là tọa độ tổng quát duy nhất, nó đặc trưng cho chuyển động của hệ một bậc tự do. Các tham số có kí hiệu dấu hoa thị gọi là tham số tổng quát của hệ một bậc tự do tương ứng với tọa độ tổng quát Z(t). Đó là các tham số vật lí đối với các hệ phức tạp như hệ có các phần cứng, hệ có khối lượng và độ cứng đàn hồi phân bố.

§2. DAO ĐỘNG TỰ DO HỆ 1 BẬC TỰ DO KHÔNG XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN



Hình 1.7

Xét hệ một bậc tự do cho ở hình 1.7. Nếu tách hệ đàn hồi này ra khỏi vị trí cân bằng với chuyển vị ban đầu của khối lượng y_o, hoặc tác động lên hệ một xung lực nào đó đặc trưng bởi tốc độ ban đầu của khối lượng v_o, thì khối lượng sẽ dao động. Các dao động chỉ sinh ra do các kích động ban đầu như vậy được gọi là dao động tự do. Các dao động này được thực hiện bởi các lực đàn hồi phát sinh trong hệ do các kích động ban đầu. Với các dao động tự do, tải trọng không tồn tại trong quá trình dao động của hệ, vì vậy vế phải của phương trình vi phân dao động tổng quát hệ một bậc tự do (1-5) bằng không. Phương trình vi phân dao động tự do trong trường hợp này có dạng:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = 0 \tag{1-32}$$

Khi không xét tới ảnh hưởng của lực cản c = 0, phương trình vi phân dao động do sẽ là:

$$M\ddot{y} + Ky = 0 \tag{1-33}$$

Phương trình (1-33) là phương trình vi phân cấp hai không có vế phải và có hệ số hằng số. Để giải phương trình vi phân này, ta sử dụng phép thế Ơle với nghiệm:

$$y(t) = De^{st} \tag{1-34}$$

Thế biểu thức này vào phương trình (1-33) ta sẽ được:

$$(MS^2 + \dot{K})De^{st} = 0 \tag{1-35}$$

Đưa vào kí hiệu:

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \tag{1-36}$$

Ta viết lại phương trình (1-35):

$$(S^2 + \omega^2)\,De^{st} = 0$$

$e^{st} \neq 0$ với t bất kì, do đó: $S^2 + \omega^2 = 0$, ta suy ra:

$$S = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\ \omega i \tag{1-37}$$

Trong đó $i = \sqrt{-1}$ - đơn vị ảo.

Phù hợp với biểu thức (1-37), ta sẽ nhận được 2 giá trị $S_1 = i\omega$ và $S_2 = -i\omega$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai (1-33) đặc trưng bằng (1-34) sẽ phải phụ thuộc vào hai hằng số tùy ý:

$$y(t) = D_1\, e^{s1t} + D_2\, e^{s2t} \tag{1-38}$$

Thế các giá trị S_1 và S_2 vào (1-38) ta sẽ được:

$$y(t) = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \tag{1-39}$$

Phương trình (1-39) có thể biểu thị ở dạng hàm lượng giác thuận lợi hơn bằng cách sử dụng phương trình Ơle:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t \tag{1-40}$$

Thế (1-40) vào (1-39) ta được:

$$y(t) = (D_1 + D_2)\cos\omega t + (D_1 - D_2) i\omega\cos\omega t \tag{1-41}$$

$$\dot{y}(t) = -(D_1 + D_2)\omega\sin\omega t + (D_1 - D_2) i\omega\cos\omega t \tag{1-42}$$

Các hằng số D_1 và D_2 được xác định từ điều kiện ban đầu: tại $t = 0$ có:

$$y(o) = y_o, \quad \dot{y}(o) = v_o \tag{1-43}$$

Đưa điều kiện ban đầu (1-43) vào (1-41) và (1-42) ta được:

$$D_1 + D_2 = y_o, \quad D_1 - D_2 = \frac{v_o}{i\omega} \tag{1-44}$$

Thế (1-44) vào (1-41) ta nhận được phương trình dao động tự do của hệ một bậc tự do:

$$y(t) = y_o\cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t \tag{1-45}$$

Ta có thể viết gọn hơn phương trình dao động (1-45) ở dạng một hàm lượng giác như sau, ta đưa vào các kí hiệu mới A và γ, với:

$$\left.\begin{aligned} y_o &= A\sin\gamma \\ \frac{v_o}{\omega} &= A\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-46}$$

Lúc này (1-45) sẽ có dạng:

$$\left.\begin{aligned} &y(t) = A\sin(\omega t + \gamma) \\ \text{Và:}\quad &v(t) = \dot{y}(t) = A\omega\cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}\right\} \tag{1-47}$$

Trong đó A và γ được xác định từ (1-46):

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}\ ; \ \gamma = \mathrm{arctg}\frac{\omega y_o}{v_o} \tag{1-48}$$

Nếu kí hiệu:

$$\left.\begin{aligned} y_o &= A\cos\theta \\ \frac{v_o}{\omega} &= A\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-49}$$

Thì (1-45) sẽ có dạng:

$$y(t) = A\cos(\omega t - \theta) \tag{1-50}$$

Trong đó: $$\theta = \mathrm{arctg}\frac{v_o}{\omega y_o} \tag{1-51}$$

Dưới đây sẽ đưa ra phương trình dao động đối với các trường hợp khác nhau của điều kiện kích động ban đầu:

- Hệ chỉ chịu chuyển vị ban đầu: $y(o) = y_o$, $v(o) = 0$.

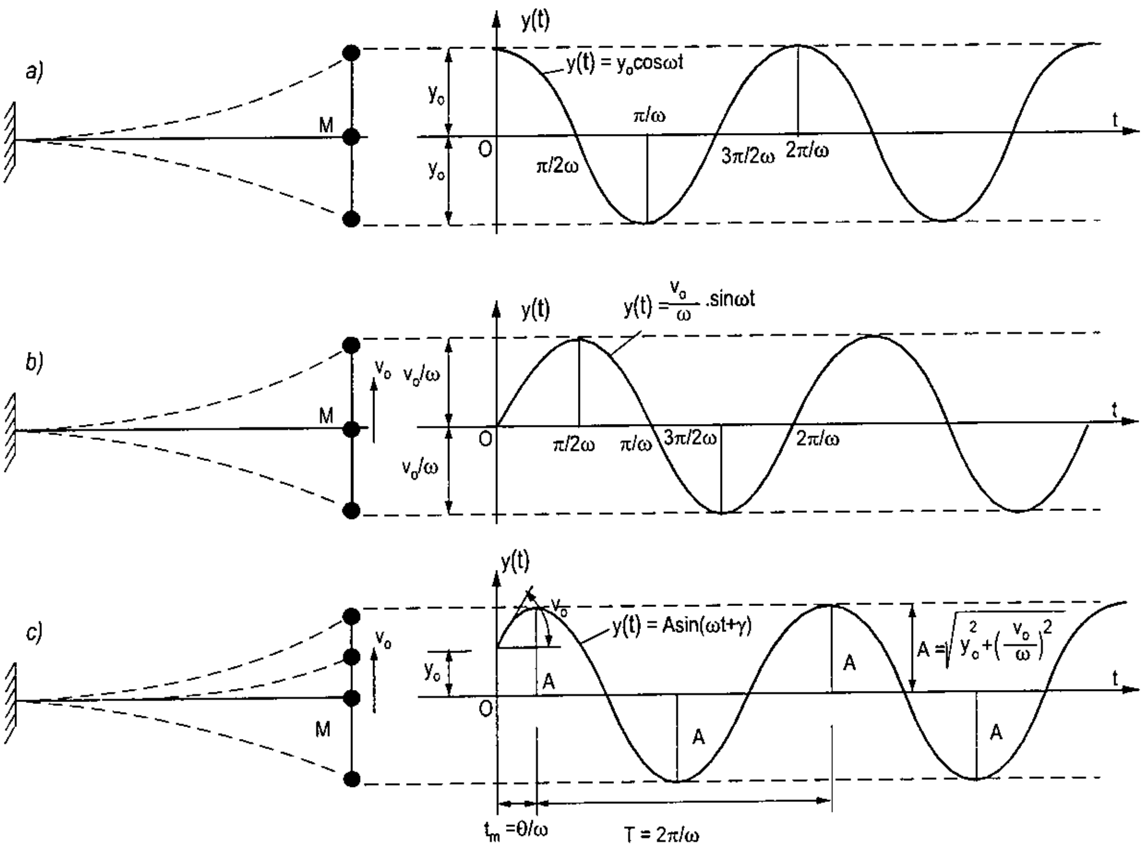
Thay điều kiện ban đầu này vào (1-51) và (1-48) ta sẽ nhận được $\theta = 0$ và $A = y_o$. Do đó phương trình dao động trong trường hợp này viết theo (1-50) sẽ là:

$$y(t) = y_o \cos\omega t \tag{1-52}$$

- Hệ chỉ chịu tốc độ ban đầu: $v(o) = v_o$, $y(o) = 0$.

Thay điều kiện ban đầu này vào (1-48) ta sẽ nhận được $\gamma = 0$ và $A = \dfrac{v_o}{\omega}$. Do đó, phương trình dao động trong trường hợp này viết theo (1-47) sẽ là:

$$y(t) = \frac{v_o}{\omega} \sin\omega t \tag{1-53}$$



Hình 1.8

- Hệ chịu cả chuyển vị ban đầu và tới tốc độ ban đầu: $y(o) = y_o$, $v(o) = v_o$. Lúc này phương trình dao động như đã ghi ở trên (1-47) hoặc (1-50), trong đó, A, γ, θ được xác định theo (1-48) và (1-51). Ta cũng dễ thấy rằng: trường hợp này là tổ hợp của hai trường hợp trên. Điều đó được thể hiện ở phương trình dao động viết theo (1-45).

$$y(t) = y_o \cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t$$

Trong đó: (1-52) và (1-53) là hai dao động thành phần phù hợp với hai số hạng ở vế phải của phương trình (1-45).

Đường biểu diễn chuyển động của khối lượng M theo thời gian tương ứng với các trường hợp trên được mô tả lần lượt trên hình 1.8a, b, c. Chúng là các dao động điều hòa đơn giản.

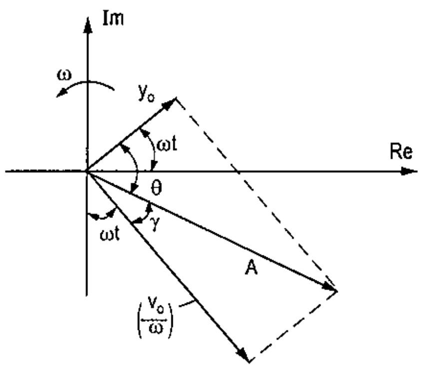
Người ta còn biểu thị dao động tự do của khối lượng M ở dạng véc tơ quay cho trên hình 1.9. Chuyển động của khối lượng được xác định bằng phần thực của hai véc tơ quay $\overline{y}_o$ và $\left(\frac{\overline{v}_o}{\omega}\right)$, hay bằng hình chiếu của chúng lên phương ngang. Biên độ dao động là độ dài của véc tơ hợp của hai véc tơ đó: $A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$.

Chuyển động của khối lượng M thực hiện dao động điều hòa đơn giản còn có thể biểu thị được bằng một đường cong trong hệ tọa độ $y_{(t)}$ và $v_{(t)}$. Từ phương trình dao động (1-53) và phương trình vận tốc.

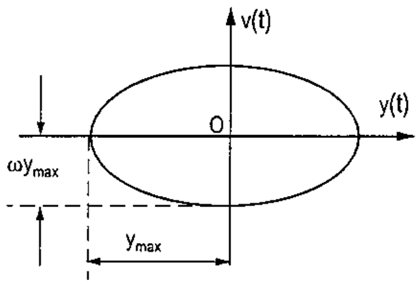
$$v(t) = v_o\cos\omega t$$

Ta sẽ dễ dàng đi đến phương trình sau:

$$\frac{y^2}{y_{max}^2} + \frac{v^2}{(\omega y_{max})^2} = 1 \qquad (1\text{-}54)$$



Hình 1.9



Hình 1.10

Đường cong thỏa mãn phương trình này chính là đường elíp môtả trên hình 1.10. Đường cong đó gọi là quỹ đạo pha, mặt phẳng chứa đường cong này gọi là mặt phẳng pha. Trong các phương trình dao động tự do (1-47), (1-50), A như đã biết là biên độ dao động, còn γ hoặc θ gọi là độ lệch pha. Đó chính là các góc lệch của véctơ dao động toàn phần $\overline{A}$ với các véc tơ dao động thành phần $\left(\frac{\overline{v}_o}{\omega}\right)$ và $\overline{y}_o$. Đại lượng ω là tần số vòng của dao động.

Dưới đây ta sẽ xét chu kì và tần số của dao động điều hòa.

- Chu kì dao động: kí hiệu là T, là thời gian cần thiết để thực hiện một dao động toàn phần, nghĩa là: chu kì là thời gian để khối lượng lặp lại quá trình dao động như trước. Dễ thấy rằng:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (s) \tag{1-55}$$

- Tần số dao động: kí hiệu là f

Là số lần dao động trong một giây:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1/s) \tag{1-56}$$

- Tần số vòng, hay tần số dao động riêng: kí hiệu là ω.

Từ (1-55) ta suy ra: $\omega = \frac{1}{T} \cdot 2\pi$, nghĩa là: ω là số lần dao động trong 2π giây, vì vậy *ω gọi là tần số vòng hay tần số tuần hòan của dao động riêng và gọi tắt là tần số dao động riêng.*

Công thức xác định tần số dao động riêng:

Từ (1-36) và biến đổi công thức này ta dễ dàng có được các công thức xác định tần số dao động riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{1}{M.\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \tag{1-57}$$

Trong đó: K - hệ số cứng của hệ;

g - gia tốc trọng trường;

y_t - chuyển vị của khối lượng M do lực G = M.g tác dụng tĩnh tại vị trí khối lượng gây ra.

Từ công thức (1-57) ta thấy rằng: Tần số dao động riêng của hệ không phụ thuộc vào các kích động ban đầu, nó chỉ phụ thuộc vào khối lượng và độ cứng của hệ.

Có thể xác định tần số dao động riêng của hệ đàn hồi bất kì theo phương pháp năng lượng. *Phương pháp này dựa trên định luật bảo toàn năng lượng:* Trong quá trình dao động tổng động năng và thế năng của hệ là một đại lượng không đổi:

$$T + U = C = const \tag{1-58}$$

Biểu thức tính động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 = \frac{1}{2}M\omega^2.y_{max}^2\cos^2(\omega t + \gamma) \qquad (1\text{-}59)$$

Trong đó:

$$y_{max} = A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

Thế năng của hệ:

$$U = \frac{1}{2}Ky^2 = \frac{1}{2}Ky_{max}^2.\sin^2(\omega t + \gamma) \qquad (1\text{-}60)$$

Từ (1-59) và (1-60) ta thấy: Trong quá trình dao động của hệ, khi thế năng biến dạng của hệ đạt giá trị lớn nhất thì động năng của hệ bằng không, và ngược lại động năng của hệ đạt giá trị lớn nhất, thì thế năng của hệ bằng không. Do đó, phù hợp với biểu thức (1-58) ta có:

$$T_{max} + 0 = C$$

Và

$$0 + U_{max} = C$$

Hay:

$$T_{max} = U_{max} \qquad (1\text{-}61)$$

Dễ thấy từ biểu thức (1-60):

$$U_{max} = \frac{1}{2}Ky_{max}^2 \qquad (1\text{-}62)$$

Từ biểu thức (1-59), ta đặt:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}My_{max}^2\cos^2(\omega t + \gamma) \;;\; \text{Ta có } \overline{T}_{max} = \frac{1}{2}My_{max}^2 \qquad (1\text{-}63)$$

Do đó:

$$T_{max} = \omega^2\overline{T}_{max}$$

Thế biểu thức trên vào biểu thức (1-61) ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{T}_{max}}} \qquad (1\text{-}64)$$

Trong đó U_{max} được xác định theo (1-62), $\overline{T}_{max}$ được xác định theo (1-63).

Đối với hệ có khối lượng phân bố, dạng dao động xẩy ra phù hợp với đường đàn hồi X(x), ta có các công thức xác định động năng lớn nhất và thế năng lớn nhất như sau:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\sum\int_0^l EJ_x\left[X''_{(x)}\right]^2dx \qquad (1\text{-}65)$$

$$\overline{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum\int_0^l m_xX_{(x)}^2dx \qquad (1\text{-}66)$$

Dấu tổng Σ là lấy với tất cả các thanh trong hệ.

Thí dụ 1.3:

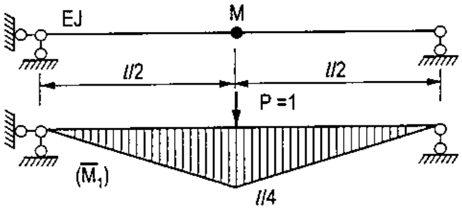
Xác định tần số dao động riêng của hệ cho trên hình 1.11a. Hệ gồm khối lượng tập trung M đặt tại giữa dầm.

Trước hết ta xác định chuyển vị do lực đơn vị đặt tại khối lượng theo phương dao động của hệ (hình 1.11b). Dễ dàng xác định được:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}$$

Thế δ_{11} vào (1-57) ta nhận được biểu thức xác định tần số dao động riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EJ}{M.l^3}}$$



Hình 1.11

Thí dụ 1.4:

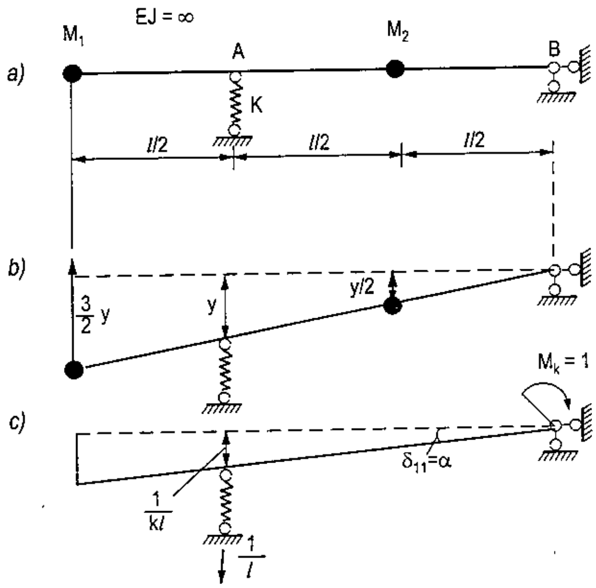
Xác định tần số dao động riêng của hệ cho trên hình 1.12a, độ cứng của liên kết đàn hồi là K.

Cách thứ nhất

Xác định tần số dao động riêng theo công thức (1-57): Hệ này có hai khối lượng nhưng chỉ có một bậc tự do. Tham số đặc trưng cho dao động của hệ có thể chọn là góc xoay tương đối tại gối tựa bên phải α, đó chính là chuyển vị tổng quát của hệ.

Để xác định δ_{11} trong trường hợp này, phù hợp với chuyển vị tổng quát của hệ ta cần đặt vào gối tựa B một mô men đơn vị M = 1 (hình 1.12c). Mô men này gây ra phản lực tại gối A bằng $\frac{1}{l}$ phản lực tại gối A tương ứng tạo nên chuyển dịch thẳng theo phương đứng tại gối là $\frac{1}{kl}$. Do đó, chuyển vị đơn vị:

$$\delta_{11} = \frac{1}{kl^2}$$



Hình 1.12

Mômen quán tính khối lượng trong trường hợp này được tính như sau:

$$J_m(u) = M_1\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + M_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = l^2\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)$$

Cuối cùng phù hợp với (1-57) ta có:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{J_m.\delta_{11}}} = \frac{K}{\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)} = 2\sqrt{\frac{K}{9M_1 + M_2}}$$

Cách thứ 2:

Xác định tần số dao động riêng theo công thức (1-64):

Trong trường hợp tổng quát, nếu hệ gồm một số khối lượng tập trung và một số các liên kết đàn hồi thì U_{max} và T_{max} được xác định như sau:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_i y_{i,max}^2 \;; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

m: Số liên kết đàn hồi

$$\overline{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} M_k y_{k,max}^2 \;; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

n: Số khối lượng tập trung

Chuyển vị của các khối lượng được biểu thị qua chuyển vị tại vị trí liên kết đàn hồi cho trên hình 1.12b.

Ta có:

$$U_{max} = \frac{1}{2}Ky^2$$

$$\overline{T}_{max} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} M_k y_{k\,max}^2 = \frac{1}{2}\left[M_1\left(\frac{3}{2}y\right)^2 + M_2\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$$

Thay các giá trị này vào (1-64):

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{T}_{max}}} = \frac{K}{\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)}$$

Kết quả này hoàn toàn trùng với kết quả của cách tính trên.

Khi kể đến ảnh hưởng của trọng lượng bản thân phương trình vi phân dao động tự do (1-33) được bổ sung thêm trọng lượng bản thân G:

$$M\ddot{y} + Ky = G \tag{1-67}$$

Từ đó ta có:

$$y + \ddot{\omega}y = \frac{G}{M}$$

Nghiệm của phương trình vi phân này được biểu thị ở dạng (1-13)

$$y(t) = y_t + \bar{y}(t)$$

Trong đó $\bar{y}(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, còn yt là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Nghiệm tổng quát được xác định theo (1-47):

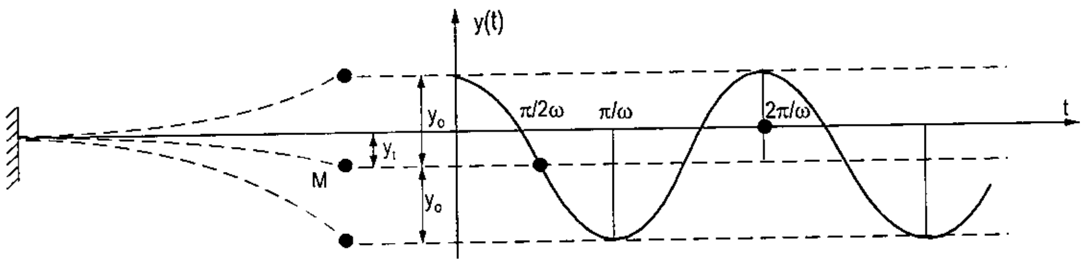
$$\bar{y}(t) = A\sin(\omega t + \gamma)$$

Nghiệm riêng chính là chuyển vị tĩnh do trọng lượng bản thân khối lượng gây ra. Điều này dễ dàng thấy được, bởi vì, ta có thể xem nghiệm riêng bằng hằng số C. Thế giá trị này vào phương trình vi phân (1-67) ta nhận được:

$$C = \frac{G}{M.\omega^2} = G.\delta_{11} = y_t$$

Vậy phương trình dao động tự do khi kể đến trọng lượng bản thân có dạng:

$$y(t) = A.\sin(\omega t + \gamma) + y_t \tag{1-68}$$



Hình 1.13

Nghĩa là, khi tính đến trọng lượng bản thân, dao động của hệ sẽ xảy ra xung quanh vị trí cân bằng tĩnh.

Trên hình 1.13 mô tả dao động của hệ khi kể đến ảnh hưởng của trọng lượng bản thân với trường hợp sự kích động ban đầu: $y(o) = y_o$, $v(o) = 0$.

§3. DAO ĐỘNG TỰ DO HỆ 1 BẬC TỰ DO CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN

Bất kì một quá trình chuyển động nào của hệ đàn hồi trong thực tế đều chịu ảnh hưởng của lực cản. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh hưởng của chúng đến các quá trình dao động rất phức tạp. Trong tính toán dao động kể đến tác dụng của lực cản, có nhiều tác giả đưa ra các giả thiết khác nhau về lực cản. Các giả thiết này phù hợp với những điều kiện thực tế nhất định và cho phép đảm bảo độ chính xác của các kết quả tính toán. Ở đây chỉ đưa ra một số giả thiết cơ bản như giả thiết lực cản tỉ lệ với vận tốc chuyển động của Phôi, giả thiết lực cản ma sát khô của Culông, giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi của Xôrôkin: Trước hết ta sẽ nghiên cứu dao động tự do chịu ảnh hưởng của lực cản.

1. Dao động tự do kể đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết của Phôi

Giả thiết của Phôi xem rằng: lực cản các quá trình chuyển động tỉ lệ với vận tốc chuyển động. Như đã trình bày ở phần đầu chương này, công thức (1-2) xác định lực cản theo giả thiết của Phôi:

$$P_c = c\dot{y} \tag{1-69}$$

Phù hợp với giả thiết này phương trình vi phân dao động tự do được mô tả theo (1-32)

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = 0 \tag{1-70}$$

Để giải phương trình vi phân này, ta sử dụng phép thế Ơle:

$$y(t) = D.e^{st} \tag{1-71}$$

$$(Ms^2 + cs + K)\,D.e^{st} = 0 \tag{1-72}$$

Sau khi chia cho MDe^{st}, phương trình (1-72) có dạng:

$$s^2 + \frac{c}{M}s + \omega^2 = 0 \tag{1-73}$$

Đặt:

$$2\alpha = \frac{c}{M} \tag{1-74}$$

Thì (1-73) được viết lại:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega^2 = 0 \tag{1-75}$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng này là:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \omega^2} \tag{1-76}$$

Như vậy giá trị S phụ thuộc vào rất nhiều vào hệ số tắt dần c, do đó dạng dao động tắt dần được biểu thị bằng phương trình (1-71) sẽ phụ thuộc vào hệ số tắt dần của hệ. Công thức (1-76) xác định giá trị S phụ thuộc vào dấu của biểu thức trong căn sẽ cho ta ba dạng chuyển động của hệ khi xét đến ảnh hưởng của lực cản, điều đó tương ứng với biểu thức trong căn có giá trị dương, âm hay bằng không.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, ta xét trường hợp giới hạn là trường hợp biểu thức trong căn của (1-76) bằng không, khi đó: $\frac{c}{2M} = \omega$, (tức là $\alpha = \omega$)

Hệ số c ứng với trường hợp giới hạn này gọi là *đại lượng tắt dần tới hạn* và kí hiệu là c*, ta có:

$$c^* = 2M\omega \tag{1-77}$$

Để dễ khảo sát dao động tắt dần khi xét đến ảnh hưởng của lực cản, ta biểu thị sự tắt dần của dao động bằng quan hệ tỉ số giữa hệ số c với đại lượng tắt dần tới hạn c*.

$$\varepsilon = \frac{c}{c^*} = \frac{c}{2M\omega} \tag{1-78}$$

ε được gọi là tham số tắt dần. Khi ε = 0 là trường hợp không xét đến lực cản; ε = 1 ứng với trường hợp giới hạn; ε < 1 nghĩa là: $\frac{c}{2M} < \omega, (\alpha < \omega)$ ứng với trường hợp biểu thức trong căn của (1-76) mang dấu âm, trường hợp này là trường hợp lực cản nhỏ; ε > 1 tương ứng $\frac{c}{2M} > \omega; (\alpha > \omega)$ là trường hợp biểu thức trong căn mang dấu dương, và trường hợp này là trường hợp lực cản lớn. Dưới đây ta sẽ lần lượt khảo sát các trường hợp đó.

a) Trường hợp lực cản nhỏ (ε <1)

Thế biểu thức (1-78) vào (1-76) ta được:

$$S = -\omega\varepsilon \pm \sqrt{(\omega\varepsilon)^2 - \omega^2}$$

Khi ε < 1 ta có:

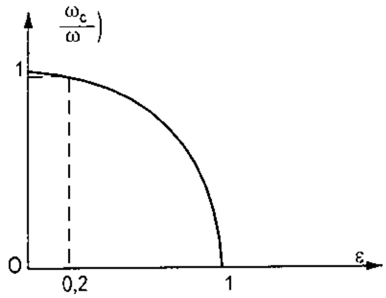
$$S = -\omega\varepsilon \pm \omega_c \tag{1-79}$$

Trong đó:
$$\omega_c = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{1-80}$$

ω_c được gọi là tần số dao động tự do khi tính đến lực cản. Từ (1-80) ta biến đổi và nhận được phương trình sau:

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + \varepsilon^2 = 1 \tag{1-81}$$

Biểu thức (1-81) cho ta sự phụ thuộc của quan hệ các tần số dao động riêng tính đến và không tính đến sự tắt dần $\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$ với tham số tắt dần ε. Biểu đồ mô tả phương trình (1-81) là vòng tròn có bán kính bằng đơn vị cho trên hình 1.14.



Hình 1.14

Đối với các kết cấu xây dựng thông thường, tham số tắt dần: ε < 20% do đó sự khác biệt giữa tần số dao động riêng khi tính đến và không tính đến lực cản là không đáng kể.

Thế (1-79) vào (1-71) ta nhận được phương trình dao động tự do khi xét tới ảnh hưởng của lực cản:

$$y(t) = D_1 e^{(-\omega\varepsilon + i\omega_c)t} + D_2 e^{(-\omega\varepsilon - i\omega_c)t} = e^{-\omega\varepsilon t}\left(D_1 e^{i\omega_c t} + D_2 e^{-i\omega_c t}\right) \tag{1-82}$$

Biểu thức trong ngoặc của (1-82) biểu thị dao động điều hòa đơn giản tương tự như (1-38). Ta có thể viết phương trình này ở dạng hàm lượng giác:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(B\sin\omega_c t + C\cos\omega_c t) \tag{1-82'}$$

Các hằng số tích phân B và C được xác định từ điều kiện ban đầu:

Tại: $t = 0, \quad y(o) = y_o, \quad \dot{y}(o) = v_o$ (1-83)

Biểu thức vận tốc của chuyển động:

$$v(t) = \dot{y}(t) = -\omega\varepsilon y(t) + e^{-\omega\varepsilon t}.\omega_c(-C\sin\omega_c t + B\cos\omega_c t) \quad (1\text{-}84)$$

Đưa (1-83) vào (1-82) và (1-84), ta sẽ được:

$$C = y_o, \qquad B = \frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}$$

Vậy:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left[\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\sin\omega_c t + y_o.\cos\omega_c t\right] \quad (1\text{-}85)$$

Tương tự như ở §2. Ta có thể viết biểu thức (1-85) ở dạng véc tơ quay:

$$y(t) = Ae^{-\omega\varepsilon t}\sin(\omega_c t + \gamma_c) \quad (1\text{-}86)$$

Trong đó:

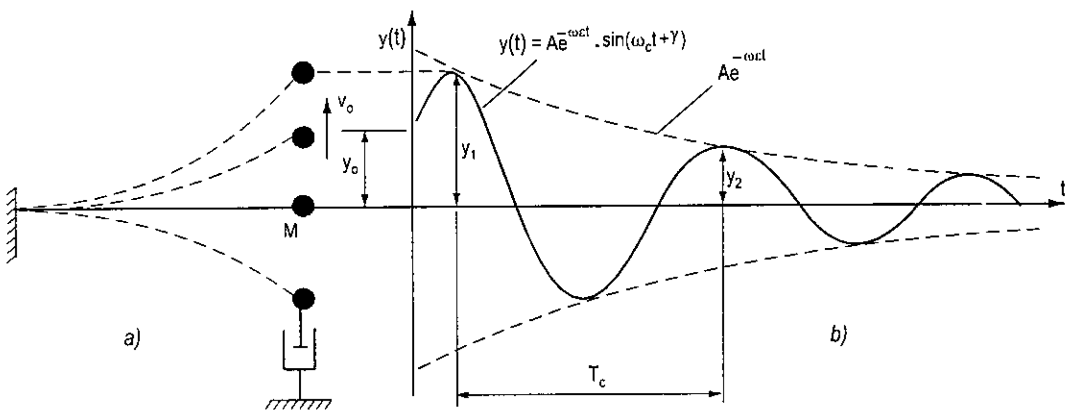
$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega}\right)^2} \\ \gamma_c &= \text{arctg}\frac{\omega y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o} \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}87)$$

Từ biểu thức (1-85), hoặc (1-86) ta thấy dao động có lực cản là dao động tắt dần. Trên hình 1.15 mô tả chuyển động của khối lượng M theo thời gian của hệ có lực cản phù hợp với biểu thức (1-86). Chu kì của dao động có lực cản là:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (s) \quad (1\text{-}88)$$

Tần số dao động:

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi} \quad (1/s) \quad (1\text{-}89)$$



Hình 1.15

Kí hiệu bên dưới khối lượng ở hình 1.15a là kí hiệu quy ước đối với hệ dao động có lực cản phù hợp với giả thiết Phôi.

Qua đồ thị hình 1.15b ta thấy dao động tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản là dao động điều hòa, nhưng biên độ giảm dần theo thời gian với quy luật số mũ âm $A.e^{-\omega\varepsilon t}$ và nó tiệm cận dần đến không.

Bản chất của tham số tắt dần đối với các hệ kết cấu xây dựng thông thường rất phức tạp, và việc xác định nó không đơn giản. Tuy nhiên, ta có thể biểu thị sự tắt dần dao động của các hệ thức dưới dạng các hệ số tương đương, các hệ số này sẽ xác định rõ độ tắt dần của các biên độ dao động. Muốn vậy, ta xét tỉ số giữa hai biên độ mang giá trị dương cách nhau một chu kì T_C trên hình 1.15b y_n và y_{n+1}.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{Ae^{-\omega\varepsilon t}}{Ae^{-\omega\varepsilon(t+T_c)}} = e^{2\pi\varepsilon.\frac{\omega}{\omega_c}} \tag{1-90}$$

Từ (1-90) ta suy ra:

$$\delta \equiv \ln\frac{y_n}{y_{n+1}} = 2\pi\varepsilon \cdot \frac{\omega}{\omega_c} \tag{1-91}$$

δ là hệ số biểu thị tốc độ tắt dần và được gọi là độ suy giảm lô ga. Tính đến (1-80), ta có:

$$\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{1-92}$$

Khi lực cản nhỏ, ta có thể tính gần đúng (1-92) như sau:

$$\delta \approx 2\pi\varepsilon \tag{1-93}$$

Từ (1-93) ta dễ dàng nhận được:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi} \tag{1-94}$$

Với sự gần đúng của độ suy giảm lô ga xác định theo (1-93), ta có thể biểu thị quan hệ (1-90) ở dạng chuỗi sau:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\delta} \approx e^{2\pi\varepsilon} = 1 + 2\pi\varepsilon + \frac{(2\pi\varepsilon)^2}{2!} + \ldots$$

Khi các giá trị tham số tắt dần là nhỏ ta chỉ cần giữ lại hai số hạng đầu của chuỗi trên vẫn có thể đảm bảo độ chính xác. Khi đó ta nhận được:

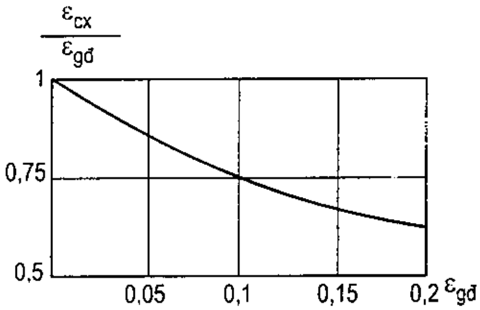
$$\varepsilon = \frac{y_n - y_{n+1}}{2\pi.y_{n+1}} \tag{1-95}$$

Trên hình 1.16 biểu thị quan hệ của tỉ số giữa tham số tắt dần chính xác theo công thức (1-91) và tham số tắt dần gần đúng theo công thức (1-95) với tham số tắt dần gần đúng. Từ biểu đồ này ta có thể sửa được kết quả tính gần đúng theo (1-95).

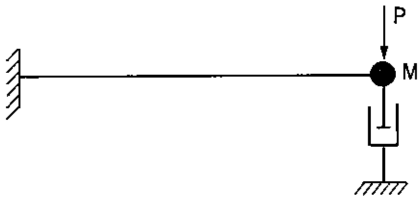
Tham số tắt dần có một ý nghĩa quan trọng, vì thông qua giá trị của nó được xác định bằng thực nghiệm ta sẽ tìm được hệ số tắt dần C.

Thí dụ 1-5:

Xác định các đặc trưng động học và biên độ dao động sau 5 chu kì của hệ tắt dần cho ở hình 1.17. Khối lượng M chịu tác dụng của lực kích động P, sau đó bỏ đi một cách tức thời. Trong thời gian duy trì tải trọng với P = 90kN chuyển vị của khối lượng đạt được 0,5cm. Khi tải trọng mất đi đột ngột, chuyển vị cực đại đầu tiên của khối lượng bằng 0,4cm. Thời gian của chu kì đối với hai chuyển vị này T = 1,3 giây.



Hình 1.16



Hình 1.17

Đây là dao động tự do có tính đến ảnh hưởng của lực cản. Các đặc trưng động học của hệ bao gồm: khối lượng, tính chất đàn hồi, tần số dao động, tham số tắt dần và hệ số tắt dần.

- Xác định khối lượng của hệ:

Từ biểu thức chu kì dao động $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$, ta suy ra:

$$M = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 .K = \left(\frac{1,3}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{90}{0,5} = 7,7\left(\frac{kN.s^2}{cm}\right)$$

- Tần số dao động riêng:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 4,833 \ \text{(rad/s)}$$

- Xác định tham số tắt dần:

Độ suy giảm lô ga: $\delta = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}} = \ln\frac{0,5}{0,4} = 0,223$

Tham số tắt dần: $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,223}{2\pi} = 0,0355$

- Xác định tần số ω_c:

$$\omega_c = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2} = 4,833\sqrt{1-0,0355^2} = 4.829$$

- Xác định hệ số tắt dần:

$$C = \varepsilon \,.\, C^* = 2M\omega\varepsilon = 2.7,7\,.4,833.0,0355 = 2,642 \text{ (kNs/cm)}$$

- Biên độ sau 5 chu kì dao động:

$$y_5 = y_o\left(\frac{y_1}{y_o}\right)^5 - 0,5\left(\frac{0,4}{0,5}\right)^5 = 0,1638(\text{cm})$$

b) Trường hợp lực cản lớn (ε > 1)

Trong trường hợp này, nghiệm của phương trình đặc trưng (1-76) khi sử dụng (1-78) sẽ là:

$$S = -\,\omega\varepsilon \pm \omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = -\omega\varepsilon \pm \lambda \tag{1-96}$$

Trong đó:
$$\lambda = \omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \tag{1-97}$$

Thế biểu thức (1-96) vào (1-71), ta được:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left(D_1 e^{\lambda t} + D_2 e^{-\lambda t}\right) \tag{1-98}$$

Biểu diễn biểu thức trong ngoặc ra hàm hypebônníc bằng cách đặt:

$D_{1,2} = \frac{1}{2}(C_1 \pm C_2)$ ta được:

$$y(t) = C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda t + C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda t) \tag{1-99}$$

Ta có thể viết (1-99) ở dạng khác nhau như sau:

$$y(t) = Ae^{-\omega\varepsilon t}\mathrm{sh}\,(\lambda t + \gamma) \tag{1-100}$$

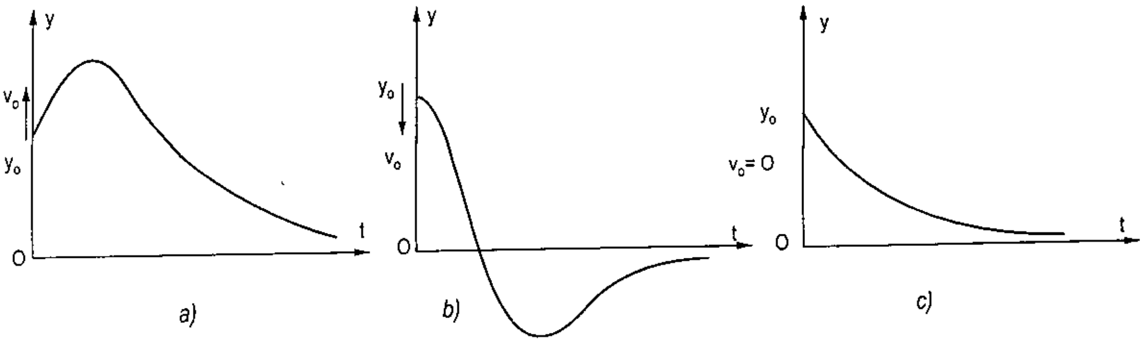
Các hằng số A và γ được xác định từ điều kiện ban đầu tại t = 0, $y(o) = y_o$, $\dot{y}(o) = v_o$, khi đó:

$$y_o = A\,\mathrm{sh}\gamma \;,\; v_o = -A\omega\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\gamma + A\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\gamma \tag{1-101}$$

Giải hệ (1-101), ta được:

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{-\,y_o^2 - \left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\lambda}\right)^2} \\ \gamma &= \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o} \end{aligned}\right\} \tag{1-102}$$

Từ công thức (1-99) hoặc (1-100) ta thấy rằng: chuyển động của hệ trong trường hợp lực cản lớn là các chuyển động không tuần hoàn. Các chuyển động này có thể xảy ra ở những dạng khác nhau, nhưng dần tiệm cận đến vị trí cân bằng ban đầu. Chúng có thể tiệm cận đến vị trí cân bằng hoàn toàn từ một phía, hoặc tiệm cận có một lần đổi dấu điều đó phụ thuộc cụ thể vào điều kiện ban đầu. Các dạng chuyển động của hệ được mô tả trên hình 1.18.



Hình 1.18

c) Trường hợp tắt dần tới hạn ($\varepsilon = 1$)

Trong trường hợp này, nghiệm của phương trình đặc trưng là thực, âm và bằng nhau: $S_1 = S_2 = -\omega\varepsilon$, khi đó, chuyển động của hệ sẽ là:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(D_1 + D_2 t) \tag{1-103}$$

Các hằng số D_1, D_2 được xác định từ điều kiện ban đầu:

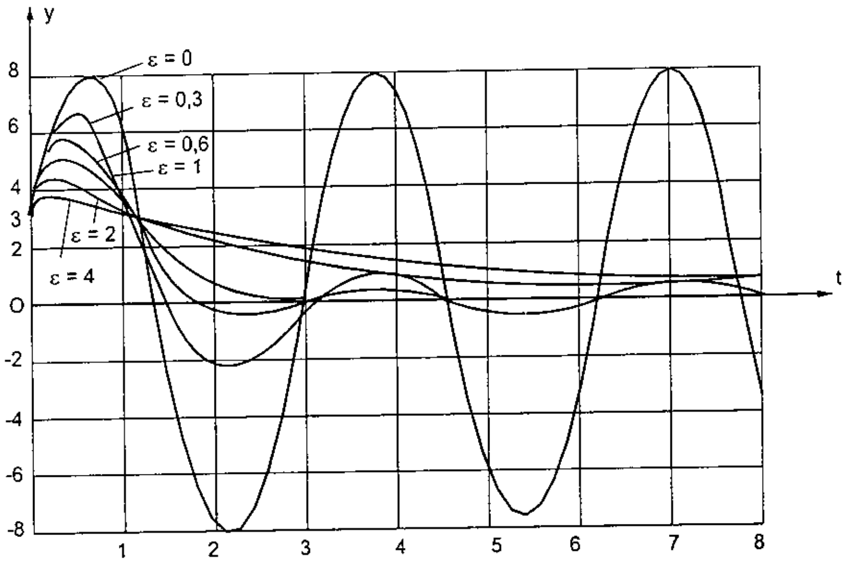
Tại $t = 0$, $y(o) = y_o$, $y(o) = v_o$, Khi đó:

$$y_o = D_1,\ v_o = D_2 - \omega\varepsilon y_o, \quad \text{do đó } D_2 = v_o + \omega\varepsilon y_o$$

Thay các giá trị D_1, D_2 vào (1-103) ta được:

$$y(t) = [y_o(1 + \omega\varepsilon t) + v_o t]e^{-\omega\varepsilon t} \tag{1-104}$$

Chuyển động của hệ trong trường hợp này cũng không tuần hoàn và nó cũng có thể xảy ra ở một trong các dạng chuyển động đã gặp ở trường hợp trên.



Hình 1.19

Trên hình 1.19 mô tả dao động tự do không xét đến ảnh hưởng của lực cản ($\varepsilon = 0$) và dao động tự do khi xét tới ảnh hưởng của lực cản với các giá trị khác nhau của tham số tắt dần $\varepsilon \geq 1$; dao động tự do được xét với điều kiện ban đầu; $y_o = 3$; $v_o = 15$; tần số dao động riêng của hệ $\omega = 2$ (tức là : $T = \pi$). Đường cong mô tả dao động tự do khi $\varepsilon = 0$ được so với hình 1.8c, khi $\varepsilon < 1$ được so với hình 1.15, khi $\varepsilon > 1$ được so với hình 1.18a. Để xây dựng đường cong mô tả dao động tự do khi $\varepsilon = 1$, ta sử dụng công thức (1-104), ta cũng giả thiết điều kiện ban đầu xem rằng khối lượng bắt đầu dao động từ vị trí y_o với vận tốc v_o hướng ra ngoài vị trí cân bằng.

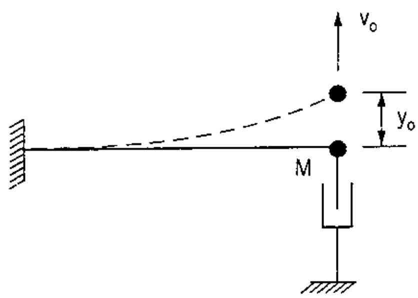
2. Dao động tự do kể đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết Culông

Ta xét dao động tự do có tính đến ảnh hưởng của lực cản ma sát theo giả thiết Culông, trong đó ma sát là *ma sát khô*, lực cản ma sát F_{ms} tỉ lệ với áp lực vuông góc và có phương ngược với phương chuyển động. Trên hình 1.20 mô tả mô hình ma sát này với kí hiệu quy ước của ma sát khô. Ta thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo phương pháp tĩnh động, trong đó các lực đặt vào khối lượng bao gồm lực quán tính, lực đàn hồi và lực cản ma sát khô:

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = \pm F_{ms} \qquad (1\text{-}105)$$

Suy ra:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \pm \frac{F_{ms}}{M} \qquad (1\text{-}106)$$



Hình 1.20

Phương trình (1.106) có dạng tương tự như phương trình vi phân dao động tự do có kể đến trọng lượng bản thân (1-67), ở đây, lực ở vế phải của (1-106) có tính chất thay đổi dấu khi phương chuyển động thay đổi. Tương tự như ở phần trước, ta có nghiệm của phương trình (1-106).

$$y(t) = A\sin(\omega t + \gamma) \pm \delta_{11} F_{ms} \qquad (1\text{-}107)$$

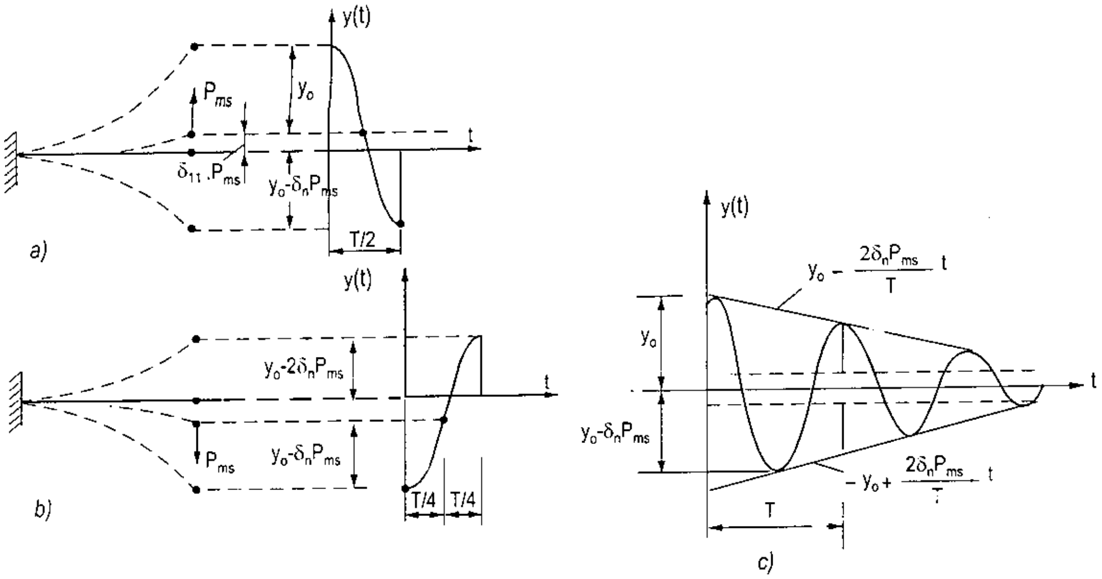
Xét trường hợp hệ dao động với điều kiện ban đầu: tại $t = 0$; $y(o) = y_o$; $v(o) = 0$, có:

$$y(t) = y_o \cos \omega t \pm \delta_{11} F_{ms} \qquad (1\text{-}108)$$

Khi khối lượng chuyển động xuống dưới thì lực ma sát có chiều hướng lên trên. Dao động của lực sẽ xảy ra quanh vị trí $\delta_{11} F_{ms}$ (hình 1.21a). Biên độ dao động của khối lượng sẽ đạt được giá trị bằng $y_o - 2\delta_{11} F_{ms}$.

Khi khối lượng chuyển động lên trên, lực ma sát sẽ có chiều hướng xuống dưới, dao động sẽ xảy ra quanh vị trí $\delta_{11} F_{ms}$ (hình 1.21b). Biên độ dao động của khối lượng sẽ đạt được giá trị bằng $y_o - 2\delta_{11} F_{ms}$.

Trên hình 1.21c mô tả toàn bộ quá trình dao động của hệ.



Hình 1.21

§4. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC HỆ 1 BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG ĐIỀU HÒA

1. Trường hợp không có lực cản

Phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa $P(t) = P_m \sin rt$ trong trường hợp không xét tới ảnh hưởng của lực cản là phương trình (1-5) trong đó với C = 0:

$$M\ddot{y} + Ky = P_m \sin rt \qquad (1\text{-}109)$$

Trong đó: P_m là biên độ của tải trọng, r: tần số vòng của lực kích thích.

Hình 1.22

Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân chuyển động (1-109) biểu thị dao động tự do có dạng:

$$y_{tn}(t) = B\cos\omega + C\sin\omega t \qquad (1\text{-}110)$$

Nghiệm riêng của (1-109) biểu thị dao động do kết quả tác động của tải trọng. Có thể xem dao động điều hòa xảy ra do tải trọng điều hòa có pha cùng với pha của tải trọng:

$$y_r(t) = D\sin rt \qquad (1\text{-}111)$$

Thế (1-111) vào (1-109) sẽ nhận được:

$$-Mr^2 D\sin rt + KD\sin rt = P_m \sin rt$$

Chia hai vế phương trình này cho sinrt, sẽ dẫn đến:

$$D\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right) = \frac{P_m}{k} \qquad (1\text{-}112)$$

Do đó, biên độ dao động:

$$D = \frac{P_m}{K}\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\omega}\right)^2} \tag{1-113}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1-109) bằng tổng của nghiệm thuần nhất theo (1-110) với nghiệm riêng theo (1-111):

$$y(t) = y_{tn}(t) + y_r(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t + \frac{P_m}{K}\cdot\frac{1}{1-\frac{r^2}{\omega^2}}\cdot \sin rt \tag{1-114}$$

Các giá trị B và C của phương trình này được xác định từ điều kiện ban đầu. Tiếp nhận điều kiện ban đầu ở trạng thái yên tĩnh: tại t = 0, y(o) = 0; y(o) = v(o) = 0; ta xác định được:

$$C = -\frac{P_m}{K}\cdot\frac{\frac{r}{\omega}}{1-\frac{r^2}{\omega^2}},\ B = 0 \tag{1-115}$$

Thay các hằng số này vào phương trình (1-114), ta được:

$$y(t) = \frac{P_m}{K}\cdot\frac{1}{1-\frac{r^2}{\omega^2}}\left(\sin rt - \frac{r}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{1-116}$$

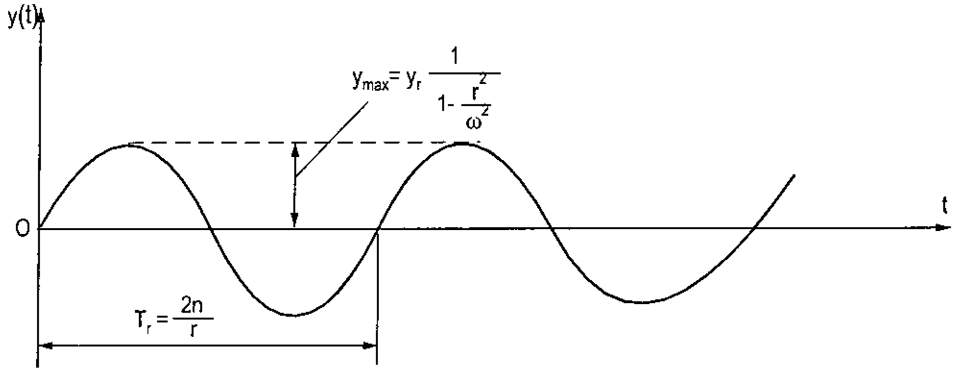
(1-116) là phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của lực cản. Ta thấy phương trình dao động (1-116) gồm hai thành phần: một thành phần dao động ứng với tần số của tải trọng điều hòa r, và một thành phần ứng với tần số của dao động tự do ω. Ta đã biết trong thực tế, các dao động đều chịu ảnh hưởng của lực cản, mặc dù lực cản gây ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động riêng, nhưng khi đã có lực cản, thì như đã trình bày ở §3; lực cản dù nhỏ cũng sẽ làm tắt dần phần dao động tự do sau một thời gian ngắn dao động. Sau đó hệ sẽ chuyển sang thời kì dao động ổn định có chu kì ứng với chu kì của tải trọng điều hòa:

$$y(t) = \frac{P_m}{K}\cdot\frac{1}{1-\frac{r^2}{\omega^2}}\sin rt \tag{1-117}$$

Ta thấy $\frac{P_m}{K} = y_T$ là chuyển vị tại khối lượng do biên độ P_m của tải trọng điều hòa tác dụng tĩnh gây ra, nên ta có thể viết (1-117):

$$y(t) = y_T \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \sin rt \qquad (1\text{-}118)$$

Trên hình (1-23) mô tả dao động cưỡng bức của hệ chịu tải trọng điều hòa trong trường hợp tần số của lực kích thích nhỏ hơn tần số dao động riêng $r < \omega$.



Hình 1.23

Phương trình dao động (1-118) có chứa chuyển vị tĩnh y_T sẽ đặt ra vấn đề về sự liên quan giữa chuyển vị động y(t) với chuyển vị tĩnh y_T đó. Sự liên quan này được xem xét từ hệ số động lực theo thời gian và hệ số động.

Hệ số động theo thời gian: K(t).

Hệ số động theo thời gian là tỉ số giữa chuyển vị động ứng với trạng thái chuyển động của hệ với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra:

$$K(t) = \frac{y(t)}{y_T} \qquad (1\text{-}119)$$

Hệ số động: K_d.

Hệ số động là tỉ số giữa chuyển vị động cực đại của trạng thái chuyển động với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra.

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} \qquad (1\text{-}120)$$

Đương nhiên: $$K_d = K(t)_{max} \qquad (1\text{-}121)$$

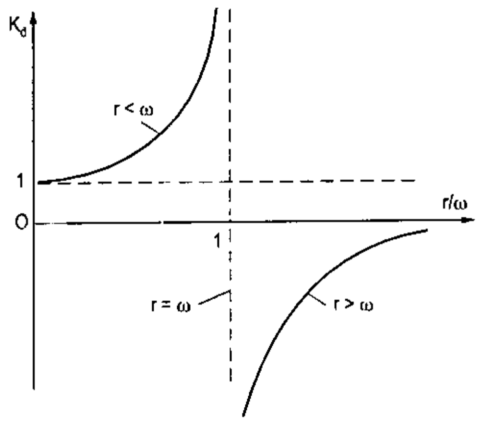
Với trường hợp hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa, để tính hệ số động theo thời gian, ta thay (1-118) vào (1-119) sẽ được:

$$K(t) = \frac{\sin rt}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} \qquad (1\text{-}122)$$

Hệ số động ứng với dạng tải trọng điều hòa:

$$K_d = \frac{1}{1 - \dfrac{r^2}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - r^2} \tag{1-123}$$

Đồ thị biểu thị hệ số động theo tỉ số $\left(\dfrac{r}{\omega}\right)$ được cho trên hình 1.24.



Hình 1.24

Qua đồ thị ta thấy:

Khi $\dfrac{r}{\omega} > 1$ thì $K_d < 0$

$0 \le \dfrac{r}{\omega} < 1$ thì $K_d \ge 1$.

Khi $r \approx \omega$, K_d có sự biến đổi rất nhanh, và $r = \omega$ thì $K_d = \infty$, lúc này xuất hiện hiện tượng cộng hưởng: chuyển vị của hệ sẽ lớn vô cùng. Phải hết sức tránh hiện tượng cộng hưởng, trong thiết kế người ta thường xác định sao cho sự khác nhau của các tần số r và ω không dưới 25%.

2. Trường hợp có lực cản

a) Tính lực cản theo giả thiết của Phôi

Phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa $P(t) = P_m \sin rt$ có xét đến ảnh hưởng của lực cản phù hợp với giả thiết của Phôi có dạng:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P_m \sin rt \tag{1-124}$$

Thay hệ số C theo biểu thức (1-78) vào (1-124), ta sẽ nhận được:

$$\ddot{y} + 2\omega\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P_m}{M}.\sin rt \tag{1-125}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1-125) bằng tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng.

Ở đây xét với trường hợp lực cản nhỏ. Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân (1-125) trong trường hợp lực cản nhỏ chính là phương trình dao động tự do (1-82)

$$y_{tn}(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(B\sin\omega_c t + C.\cos\omega_c t) \qquad (1\text{-}126)$$

Nghiệm riêng do tác dụng của tải trọng điều hòa được xác định bằng biểu thức:

$$y_r(t) = D_1\sin rt + D_2\cos rt \qquad (1\text{-}127)$$

Ở (1-127) ta đưa vào thành phần thứ hai, bởi vì dao động của hệ có lực cản thường không cùng một pha với hàm tải trọng điều hòa.

Sau khi lấy đạo hàm biểu thức (1-127), rồi thay các kết quả tương ứng vào (1-125), ta được:

$$\left[-D_1r^2 - D_2r\,(2\omega\varepsilon) + D_1\omega^2\right]\sin rt + [-D_2r^2 + D_1r\,(2\omega\varepsilon) + D_2\omega^2]\cos rt = \frac{P_m}{M}\sin rt$$

So sánh hai vế của phương trình này, ta có:

$$[-D_1r^2 - D_2r\,(2\omega\varepsilon) + D_1\omega^2]\sin rt = \frac{P_m}{M}\sin rt$$

$$[-D_2r^2 - D_1r\,(2\omega\varepsilon) + D_2\omega^2]\cos rt = 0$$

Sau khi bỏ đi các hàm lượng giác và biến đổi các phương trình trên, ta được:

$$D_1(1-\beta^2) - D_2(2\varepsilon\,\beta) = \frac{P_m}{K}\;;\; D_2(1-\beta^2) + D_1\,(2\varepsilon\beta) = 0$$

Trong đó: $$\beta = \frac{r}{\omega} \qquad (1\text{-}128)$$

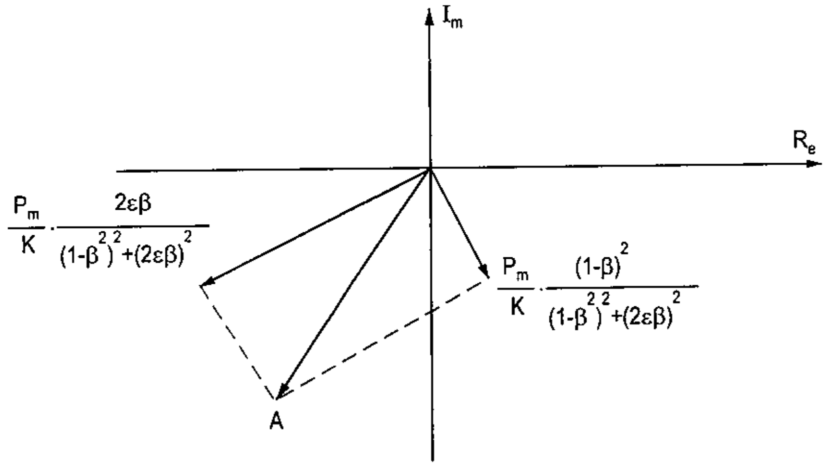
Suy ra:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{P_m}{K}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2} \\ D_2 &= \frac{P_m}{K}\frac{-2\varepsilon\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}129)$$

Thế các hằng số D_1, D_2 vào (1-127) ta sẽ nhận được biểu thức nghiệm riêng của phương trình vi phân (1-125) và cuối cùng ta có nghiệm tổng quát của (1-125) là:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(B\sin\omega_c t + C\cos\omega_c t) + \frac{\frac{P_m}{K}}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}[(1-\beta^2)\sin rt - 2\varepsilon\beta\cos rt] \qquad (1\text{-}130)$$

Thành phần thứ nhất của vế phải chứa nhân tử $e^{-\varepsilon\omega t}$ biểu thị dao động tự do tắt dần đã khảo sát ở trên. Thành phần thứ hai có cùng tần số với tải trọng điều hòa biểu thị dao động cưỡng bức, nó đặc trưng cho quá trình chuyển động ổn định của hệ. Cũng như ở phần trên, chuyển vị ở quá trình ổn định có thể biểu thị ở dạng hai véctơ (hình 1.25):



Hình 1.25

Véc tơ $\vec{A}$ biểu thị biên độ dao động của quá trình ổn định:

$$A = \frac{P_m}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}} \tag{1-131}$$

Dao động ổn định của hệ được biểu thị ở dạng tương tự như đã xét ở phần trên:

$$Y(t) = A\sin(rt - \theta) \tag{1-132}$$

Trong đó θ là độ lệch pha:

$$\theta = \text{arctg}\frac{2\varepsilon\beta}{1-\beta^2} \tag{1-333}$$

Hệ số động được tính theo (1-120) sẽ bằng:

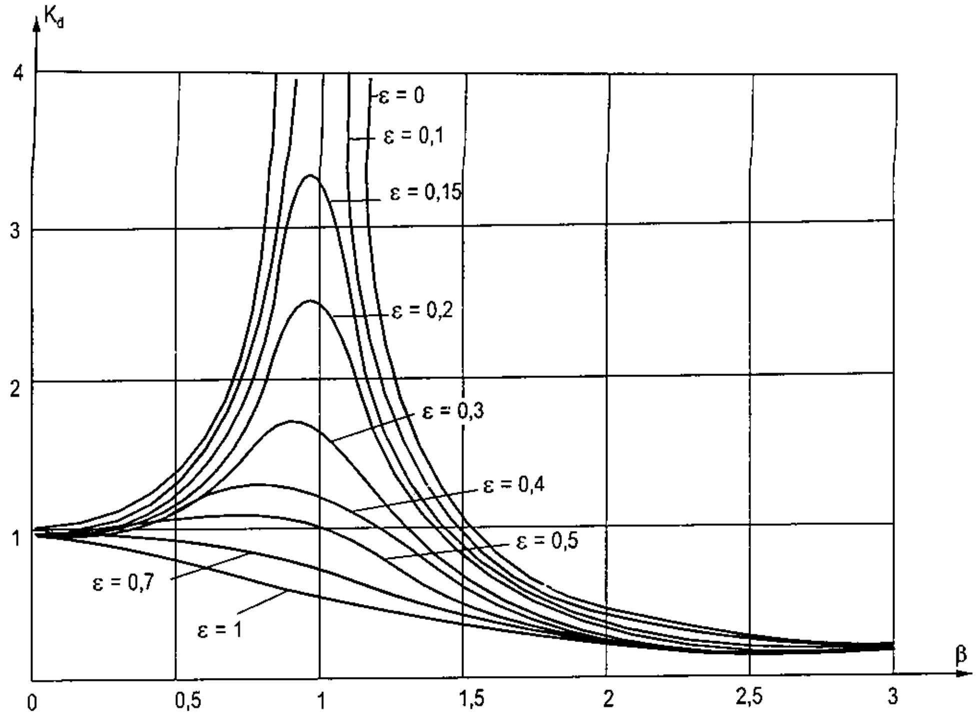
$$K_d = \frac{A}{\frac{P_m}{K}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}} \tag{1-134}$$

Từ biểu thức (1-134) ta thấy: Hệ số động phụ thuộc vào tỉ số các tần số của tải trọng điều hòa với tần số dao động riêng β và tham số tắt dần ε. Trên hình (1-26) mô tả biểu đồ quan hệ của hệ số động với tỉ số tương đối β và tham số tắt dần ε:

b) Tính lực cản theo giả thiết của Xôrôkin

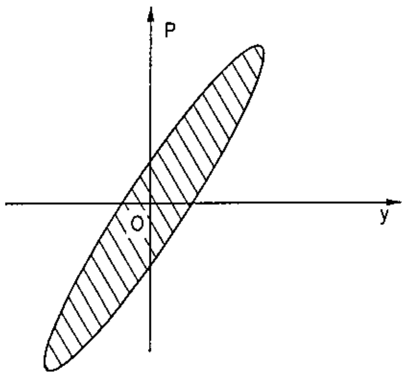
Giả thiết của Xôrôkin là giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi, hay còn gọi là giả thiết về độ cứng phức.

Lực cản trong phi đàn hồi là lực cản tính đến sự tiêu hao năng lượng trong hệ, được biểu thị trong việc làm tổn thất trễ năng lượng biến dạng trong quá trình dao động. Nó *không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng* (Lực cản theo Phôi phụ thuộc vào tốc độ biến dạng) *mà phụ thuộc vào giá trị biến dạng*. Trong đó, quan hệ giữa các biến dạng chung



Hình 1.26

(độ võng, góc xoay) với tải trọng ngoài là quan hệ phi tuyến. Quan hệ này khi tăng tải và đỡ tải là khác nhau. Trong quá trình tăng tải và đỡ tải của một chu trình tải trọng, quan hệ này được biểu thị bằng một đường cong kín gọi là vòng trễ (hình 1.27).



Hình 1.27

Xôrôkin dựa trên giả thiết vòng trễ có hình elíp, và trong các dao động cưỡng bức ổn định dưới tác dụng của tải trọng kích động điều hòa, các dao động của hệ xảy ra cũng theo quy luật điều hòa. Ông đã đi đến kết luận rằng:

Lực cản trong phi đàn hồi tỉ lệ với lực đàn hồi (Lực hồi phục), nhưng lệch pha với lực đàn hồi một góc là $\frac{\pi}{2}$. Biểu thức toán học của lực cản trong được biểu thị bằng công thức:

$$P_c = i\,\frac{\psi}{2\pi}\cdot\,P_d \qquad (1\text{-}135)$$

Trong đó: P_d là lực đàn hồi; $i = \sqrt{-1}$ là đơn vị ảo. Việc nhân thêm với đơn vị ảo tương ứng với việc quay véc tơ lực đàn hồi đi một góc $\frac{\pi}{2}$ bằng độ lệch pha của P_c. ψ là *hệ số* *tiêu hao năng lượng*. Nó được đo bằng tỉ số tiêu hao năng lượng trong một chu trình biến dạng ΔW với năng lượng toàn phần của hệ W.

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \tag{1-136}$$

Trong thực tế tính toán, người ta thường *sử dụng giá trị gần đúng* của hệ số tiêu hao năng lượng và nó được cho bởi công thức:

$$\psi = 2\delta \ , \tag{1-137}$$

Trong đó: δ là độ suy giảm lôga:

Từ các biểu thức (1-135) và (1-137) ta sẽ viết được biểu thức lực cản tổng hợp bao gồm lực cản đàn hồi và lực cản trong phi đàn hồi như sau:

$$P_d^* = \left(1 + \frac{i\delta}{\Pi}\right).P_d \tag{1-138}$$

Hệ số của lực cản tổng hợp chứa thành phần phức, vì vậy mà giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi của Xôrôkin còn được gọi là giả thiết về độ cứng phức:

Trên cơ sở nghiên cứu kết quả các phương trình vòng trễ nhận được bằng phương pháp thống kê, Xôrôkin đã đưa ra biểu thức chính xác hơn về lực cản tổng hợp có thể áp dụng cho cả *dao động cưỡng bức*, cũng như các *dao động tự do điều hòa:*

$$P_d^* = (u + iv)\,P_d \tag{1-139}$$

Trong đó: $u = \dfrac{1 - \dfrac{\gamma^2}{4}}{1 + \dfrac{\gamma^2}{4}}$, $v = \dfrac{\gamma}{1 + \dfrac{\gamma^2}{4}}$

Và $\gamma = \dfrac{\delta}{\Pi}$

Tuy nhiên, khi khảo sát các bài toán dao động cưỡng bức sau này, ta vẫn áp dụng công thức đơn giản (1-138) bằng cách bỏ đi số hạng $\dfrac{\gamma^2}{4}$, xem $\dfrac{\gamma^2}{4}$ như một đại lượng vô cùng bé.

Để khảo sát phương trình dao động của hệ một bậc tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết độ cứng phức của Xôrôkin, ta nên biểu thị lực kích động điều hòa dưới dạng phức:

$$P(t) = P_m.e^{irt} \tag{1-140}$$

Phương trình vi phân dao động của hệ phù hợp với giả thiết Xôrôkin là:

$$M\ddot{y} + \left(1 + i\frac{\delta}{\pi}\right)Ky = P_m e^{irt} \tag{1-141}$$

Hay: $$\ddot{y}+\left(1+i\frac{\delta}{\pi}\right)\omega^2 y=\frac{P_m}{M}e^{irt} \qquad (1\text{-}142)$$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân dao động (1-142) sẽ xác định dao động cưỡng bức của hệ được tìm dưới dạng:

$$y(t)=A.e^{irt} \qquad (1\text{-}143)$$

Lấy đạo hàm biểu thức (1-143) và thay các giá trị tương ứng vào (1-142) ta được:

$$A\left[\omega^2\left(1+i\frac{\delta}{\pi}\right)-r^2\right]=\frac{P_m}{M}$$

Suy ra: $$A=\frac{P_m}{M}\cdot\frac{1}{\omega^2\left(1+i\frac{\delta}{\pi}\right)-r^2} \qquad (1\text{-}144)$$

Biểu thức trên có thể còn biểu thị được ở dạng sau:

$$A=B\,.\,e^{i\varphi} \qquad (1\text{-}145)$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{P_m}{M}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-r^2)+\frac{\delta^2}{\pi^2}\omega^4}} \\ tg\varphi&=-\frac{\delta\omega^2}{\pi(\omega^2-r^2)} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}146)$$

Do đó, phương trình dao động cưỡng bức của hệ có dạng:

$$y(t)=B\,e^{i(rt+\varphi)} \qquad (1.147)$$

Dùng phần thực của biểu thức này làm nghiệm, ta có:

$$y(t)=B\cos(rt+\varphi)=\frac{P_m}{M}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-r^2)^2+\frac{\delta^2}{\pi^2}\cdot\omega^4}}\cos(rt+\varphi) \qquad (1\text{-}148)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $r=\omega$, tức là $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, và: $B=\frac{P_m}{M}\cdot\frac{\pi}{\delta.\omega^2}$. Phương trình dao động.

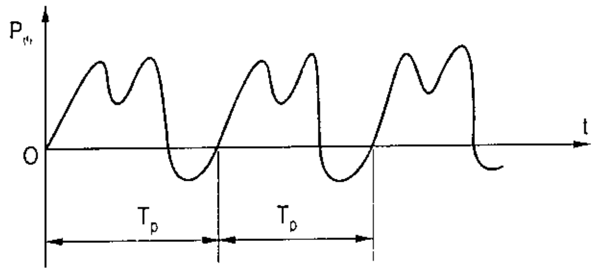
$$y(t)_{.}=\frac{P_m}{M\omega^2}\cdot\frac{\pi}{\delta}\sin rt=y_T\cdot\frac{\pi}{\delta}\sin rt \qquad (1\text{-}149)$$

Như vậy, biên độ cộng hưởng bằng chuyển vị tĩnh nhân với hệ số $\left(\frac{\pi}{\delta}\right)$

§5. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC HỆ 1 BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG CÓ CHU KÌ

1. Biểu thị tải trọng ra dạng chuỗi Fuariê

Ở phần trước ta đã nghiên cứu dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa, trong thực tế kĩ thuật ta thường hay gặp dạng tải trọng tác dụng có chu kì (hình 1.28) khi xét dao động của hệ chịu tác dụng của tải trọng chu kì, để áp dụng được các kết quả đã có ở phần trước, ta cần phải biểu thị tải trọng có chu kì ra dạng chuỗi lượng giác (chuỗi Fuariê). Dao động ứng với mỗi thành phần của chuỗi là dao động chịu tác dụng của tải trọng điều hòa. Dao động của hệ được xác định bằng tổng các dao động ứng với các thành phần khai triển của tải trọng.



Hình 1.28

Hàm tải trọng có chu kì được khai triển ra dạng chuỗi Fuariê:

$$P(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T_p}\cdot t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{T_p}\cdot t \tag{1-150}$$

Trong đó:

T_p - chu kì của hàm tải trọng

$$\left.\begin{aligned} a_o &= \int_0^{T_o} P(t)dt && a)\\ a_n &= \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos\frac{2\pi n}{T_p}dt && b)\\ b_n &= \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}dt && c)\end{aligned}\right\} \tag{1-151}$$

2. Dao động của hệ chịu tải trọng biểu thị ở dạng chuỗi Fuariê

Tải trọng có chu kì tùy ý khai triển chuỗi Fuariê xác định theo (1-150), trong đó bao gồm tải trọng không đổi (là tải trọng trung bình được biểu thị bằng hệ số a_o xác định theo (1-151) và chuỗi các tải trọng điều hòa với các biên độ a_n, b_n và các tần số r_n. Như đã biết ở phần trên, khi xét dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa bỏ qua ảnh hưởng của lực cản, phương trình dao động của hệ ở chế độ ổn định có dạng (1-117). Từ đó ta có thể viết được phương trình dao động tương ứng với các thành phần tải trọng sinrt và cosrt của chuỗi (1-150) như sau:

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\sin nr_1 t = \frac{b_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\sin nr_1 t$$

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\cos nr_1 t$$

Dao động tương ứng với thành phần tải trọng không đổi a_o được biểu thị bằng độ võng tĩnh:

$$y_o = \frac{a_o}{k}$$

Cuối cùng, dao động của hệ chịu tải trọng có chu kì sẽ bằng tổng các dao động ứng với từng thành phần khai triển của chuỗi tải trọng:

$$y(t) = \frac{1}{k}\left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\beta_n^2}(a_n\cos nr_1 t + b_n \sin nr_1 t)\right] \qquad (1\text{-}152)$$

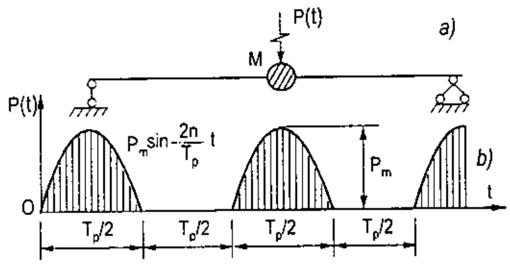
Trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của lực cản, dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng có chu kì cũng được tính bằng tổng các dao động tương ứng với các thành phần khai triển của chuỗi tải trọng được xác định theo (1-150), nhưng biểu thức dao động ứng với mỗi thành phần tải trọng điều hòa được tính theo (1-130). Dao động toàn phần của hệ ở chế độ ổn định sẽ bằng:

$$y(t) = \frac{1}{k}\left(a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\beta_n^2)+(2\varepsilon\beta_n)^2}\left\{\left[b_n(1-\beta_n^2)+a_n.2\varepsilon\beta_n\right]\right.\right.$$

$$\left.\left. x\sin nr_1 t + \left[a_n(1-\beta_n^2) - b_n.2\varepsilon\beta_n\right]\cos nr_1 t\right\}\right) \qquad (1\text{-}153)$$

Thí dụ 1.6:

Viết phương trình dao động của khối lượng M. Tải trọng tác dụng lên khối lượng là tải trọng có chu kì cho ở hình 1.29b. Cho $\varepsilon = 0$, $\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3}$.



Hình 1.29

Trước hết ta phải khai triển tải trọng ra chuỗi Fuariê. Các hệ số của chuỗi được tính theo (1-51):

$$a_o = \frac{1}{T_p}\int_o^{T_p} P(t)dt = \frac{1}{T_p}P_m \sin\frac{2\pi t}{T_p}dt = \frac{P_m}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P_m \sin\frac{2\pi n}{T_p}\cos\frac{2\pi nt}{T_p}dt = \begin{cases} 0 & \text{khi n lẻ} \\ \dfrac{P_m}{\pi}\quad \dfrac{2}{1-n^2} & \text{khi n chẵn} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P_m \sin\frac{2\pi t}{T_p}\sin\frac{2\pi nt}{T_p}dt = \begin{cases} \dfrac{P_m}{\pi} & \text{khi } n = 1 \\ 0 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

Thế các hệ số này vào biểu thức (1-150) ta sẽ nhận được dạng tải trọng gồm các hàm điều hòa:

$$P(t) = \frac{P_m}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\sin r_1 t - \frac{2}{3}\cos 2r_1 t - \frac{2}{15}\cos 4r_1 t - \frac{2}{35}\cos 6\, r_1 t \ldots\right)$$

Trong đó: $r_1 = \dfrac{2\pi}{T_p}$

Phương trình dao động của khối lượng trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của lực cản được xác định theo (1-152), trong đó:

$$\beta_n = \frac{r_n}{\omega} \quad , \quad \beta_1 = \frac{r_1}{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}\cdot\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{T_p} = \frac{3}{4}$$

$$\beta_2 = \frac{2r_1}{\omega} = 2\frac{T}{T_p} = \frac{3}{2}\ , \ldots$$

Vậy phương trình dao động của khối lượng sẽ là:

$$y(t) = \frac{P_m}{k\pi}\left(1+\frac{8\pi}{7}\sin r_1 t + \frac{8}{15}\cos 2r_1 t + \frac{1}{60}\cos 4r_1 t + \ldots\right)$$

Khi tính đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình dao động của khối lượng sẽ được viết theo (1-153).

§6. DAO ĐỘNG CỦA HỆ 1 BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG CỦA XUNG TỨC THỜI

1. Phương trình dao động tổng quát

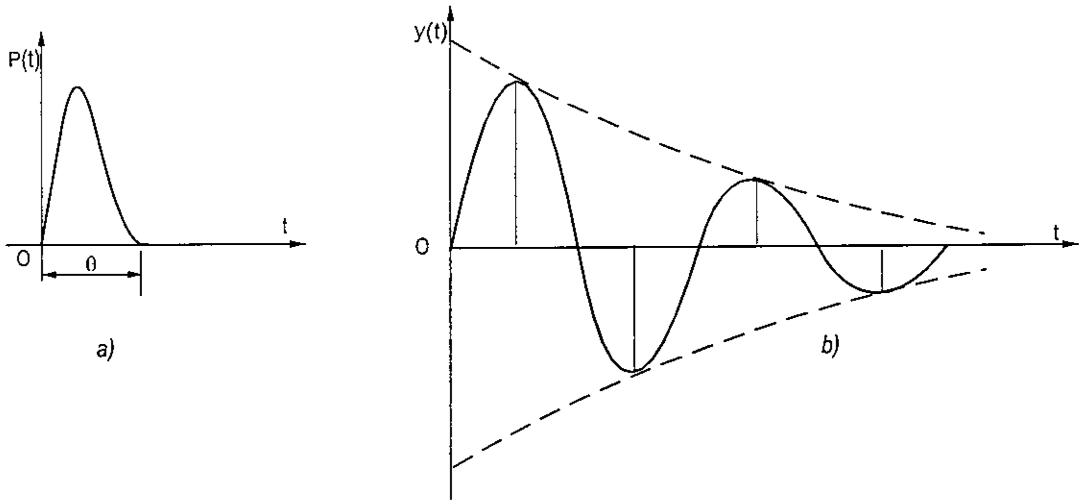
Khi tải trọng động ngắn hạn tác dụng lên công trình mà thời gian duy trì tải trọng không vượt quá 25% chu kì dao động riêng của kết cấu, thì tải trọng ngắn hạn đó được gọi là tải trọng xung tức thời.

Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, nghĩa là trên hệ không tồn tại sự có mặt của tải trọng động. Hệ dao động được là do hệ đã nhận được một vận tốc nào đó mà tải trọng xung truyền cho hệ. Vì vậy dạng dao động của hệ dưới tác dụng của các xung tức thời là dạng dao động tự do. Như đã biết ở phần trên, phương trình dao động tự do trong các trường hợp xét đến và không xét đến ảnh hưởng của lực cản được viết theo công thức

(1-86) và (1-45). Trong các công thức đó, nếu xem rằng: tại thời điểm xung tác dụng, độ võng tĩnh ban đầu bằng không (y(o) = 0), thì vấn đề ở đây là phải đi xác định tốc độ ban đầu v(o) trong trường hợp này như thế nào.

Thời gian duy trì tải trọng rất ngắn, nên tác dụng của tải trọng lên hệ sẽ thay bằng tác dụng của xung lực S được xác định bằng diện tích biểu đồ tải trọng theo thời gian (hình 1.30a)

$$S = \int_{o}^{\theta} P(t)dt \qquad (1\text{-}154)$$



Hình 1.30

Theo quy luật Niutơn

$$P = M\ddot{y}(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$$

Suy ra: $$Mdv = P(t)dt \qquad (1\text{-}155)$$

Tích phân hai vế đẳng thức (1-155), ta được:

$$\int_o^{\theta} Mdv = \int_o^{\theta} P(t)dt\,,\ \text{hay:}\quad Mv(\theta) - Mv(o) = S \qquad (1\text{-}156)$$

Vì $v(o) = 0$, nên:

$$v(\theta) = \frac{S}{M} \qquad (1\text{-}157)$$

Thay điều kiện ban đầu, t = 0, $y(o) = 0$, $v(o) = \dfrac{S}{M}$ vào (1-45) ta được phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của xung tức thời trong trường hợp không xét tới lực cản:

$$y(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega t \qquad (1\text{-}158)$$

Phương trình (1-158) là phương trình dao động điều hòa với biên độ:

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega}$$

Khi xét đến ảnh hưởng của lực cản với trường hợp lực cản nhỏ, phương trình dao động của hệ được viết theo công thức (1-86) với các điều kiện ban đầu như ở trên, trong đó:

$$A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\right)} = \frac{v_o}{\omega_c} = \frac{S}{M\omega_c}$$

$$\gamma = \text{arctg}\,\frac{\omega y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o} = 0$$

Phương trình dao động:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\cdot\frac{1}{M\omega_c}\sin\omega_c t \qquad (1\text{-}159)$$

Khi S = 1, biểu thức (1-159) có dạng:

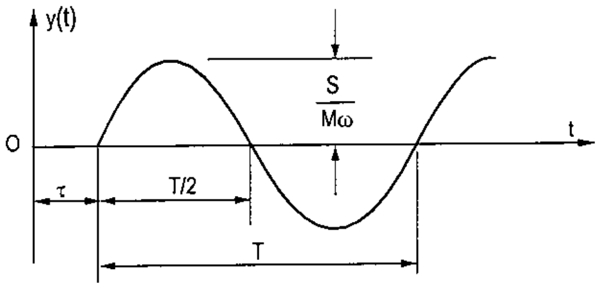
$$\bar{y}(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\cdot\frac{1}{M\omega_c}\sin\omega_c t \qquad (1\text{-}160)$$

Biểu thức (1-160) được gọi là dao động của hệ chịu tác dụng của xung đơn vị. Trên hình 1.30b mô tả đồ thị của hàm $y_{(t)}$.

Nếu xung tác dụng vào hệ không phải thời điểm t = 0 mà tại thời điểm t = τ, thì (1-158) sẽ có dạng:

$$\bar{y}(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad (1\text{-}161)$$

Trên hình 1.31 mô tả đồ thị của hàm y_t này



Hình 1.31

2. Tải trọng tĩnh tương đương P_{td}

Trong tính toán động lực học công trình để xác định các giá trị lớn nhất của nội lực và chuyển vị trong kết cấu, người ta thường phải tính qua một tải trọng tĩnh tương đương với tác dụng của tải trọng động lên kết cấu.

Tải trọng tĩnh tương đương là tải trọng gây ra biến dạng bằng biến dạng cực đại do tải trọng động gây ra.

Kí hiệu tải trọng tĩnh tương đương P_{td}. Chuyển vị cực đại của hệ một bậc tự do được tính qua tải trọng tĩnh tương đương là:

$$y_{max} = \delta_{11} . P_{td} = \frac{P_{td}}{K} \qquad (1\text{-}162)$$

Suy ra: $P_{td} = \dfrac{y_{max}}{\delta_{11}}$, Hay: $P_{td} = K . y_{max}$ (1-163)

Sau khi xác định được tải trọng tĩnh tương đương, bài toán được tính như bài toán tĩnh chịu tác dụng của P_{td}. Trạng thái ứng suất biến dạng của hệ lúc này tương đương với trạng thái ứng suất biến dạng lớn nhất khi hệ chịu tác dụng của các dạng tải trọng động.

Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, ta đã biết: $y_{max} = \dfrac{S}{M\omega}$. Thay giá trị này vào (1-162) ta được:

$$P_{td} = \frac{S}{M\omega} \cdot \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{S.\omega}{(M\omega^2).\delta_{11}}$$

Do đó: $P_{td} = S.\omega$ (1-164)

Cũng cần thấy thêm rằng: Khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời, tải trọng tĩnh tương đương chính bằng lực đàn hồi lớn nhất tính theo (1-163), hoặc bằng lực quán tính lớn nhất đặt vào khối lượng:

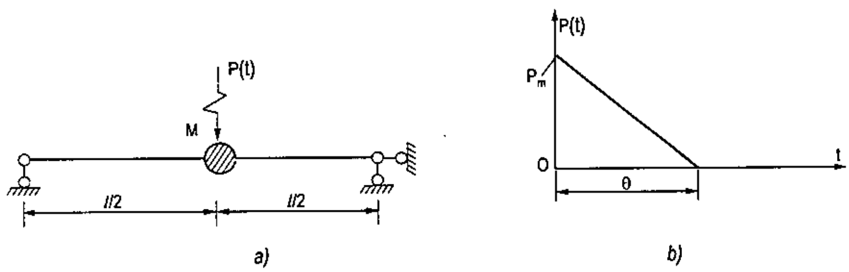
Lực quán tính:

$$P_q(t) = -M\ddot{y}(t) = \frac{S}{M\omega}\omega^2 \sin\omega t = S\omega \sin\omega t$$

Do đó: $P_q^{max} = S\omega$. Kết quả này đúng với công thức (1-164)

3. Một số thí dụ:

Thí dụ 1.7: Xác định mô men uốn lớn nhất trong dầm đơn giản cho trên hình 1.32a. Tải trọng động tác dụng lên khối lượng có quy luật thay đổi theo thời gian cho trên hình 1.32b. Cho trước: E = $2{,}1.10^4$kN/cm^2, J = 100cm^4, l = 2,5m, M = 0,01kNs^2/cm, P_m = 50kN, θ = 0,05.s.



Hình 1.32

- Xác định tần số dao động riêng của hệ

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Ml^3}{48EJ}}} = \sqrt{\frac{48EJ}{Ml^3}} = \sqrt{\frac{48.2{,}1.10^4.10^2}{2{,}5^3.10^6.10^{-2}}} = 25{,}4 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

- Chù kì dao động riêng của hệ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2.3{,}1416}{25{,}4} = 0{,}247.S$$

- Tính tỉ số $\frac{\theta}{T}$:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{0{,}05}{0{,}247} = 0{,}202 < 25\%$$

- Xác định tải trọng tĩnh tương đương t heo (1-164):

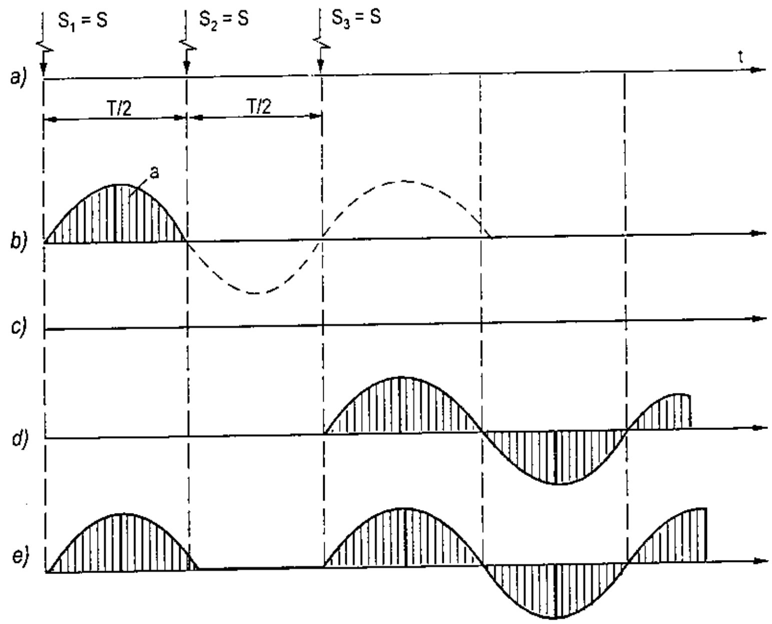
$$P_{td} = S.\omega = \frac{P_m.\theta}{2} \cdot \omega = \frac{50.0{,}05}{2} \cdot 25{,}4 = 1{,}25.25{,}4 = 31{,}8 \text{ (kN)}$$

- Giá trị mô men uốn lớn nhất trong dầm tại giữa nhịp:

$$M_{max} = \frac{P_{td}.l}{4} = \frac{31{,}8.2{,}5}{4} = 15{,}9 \quad \text{(kNm)}$$

Thí dụ 1.8:

Lập phương trình dao động và mô tả quá trình dao động của hệ lần lượt chịu tác dụng của các xung lực bằng nhau theo chu kì bằng nửa chu kì dao động riêng của hệ. Hình 1.33a.



Hình 1.33

Xét sự dao động của hệ ở 3 khoảng thời gian sau:

- Khoảng 1: $0 \le t \le \dfrac{T}{2}$ theo (1-158) ta có:

$$y_1(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega t = a\sin\omega t;$$

$$a = \frac{S}{M\omega}$$

- Khoảng 2: $\dfrac{T}{2} < t \le T$, theo (1-158) và (1-161) ta có:

$$y_2(t) = y_1(t) + a\sin\omega\left(t - \frac{T}{2}\right) = a\left[\sin\omega t + \sin\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$= a\,[\sin\omega t + \sin(\omega t - \pi)] = 0$$

- Khoảng 3: $t \ge T$

$$y_3(t) = y_2(t) + a\sin\omega\,(t - T) = a\sin\omega\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) = a\sin\omega t$$

Trên hình 1.33b, c, d biểu thị dao động trong từng khoảng thời gian, toàn bộ dao động của hệ được mô tả trên hình 1.32e.

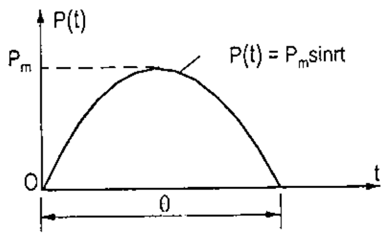
§7. DAO ĐỘNG CỦA HỆ 1 BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG NGẮN HẠN

Ở phần này ta sẽ khảo sát tác dụng của loại tải trọng động ngắn hạn. Khi $\dfrac{\theta}{T} < 25\%$ thì tác dụng của tải trọng ngắn hạn được xét như tác dụng của xung tức thời, nội dung ta đã nghiên cứu ở §6. Dưới đây sẽ xét một số dạng tải trọng động ngắn hạn trong đó $\dfrac{\theta}{T} > 25\%$. Khi chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn, trạng thái ứng suất biến dạng lớn nhất của hệ sẽ đạt được trong một khoảng thời gian rất ngắn, so với trước khi lực tắt dần có thể hấp thụ được phần lớn năng lượng của quá trình dao động. Vì vậy khi tính hệ chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn sẽ không xét tới ảnh hưởng của lực cản.

1. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình sin

Xét dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động ngắn hạn có dạng hình sin (hình 1.34).

Hình 1.34



Nói chung khi chịu tải trọng ngắn hạn dao động của hệ sẽ được tính ở hai giai đoạn. Một giai đoạn có sự duy trì tải trọng động và một giai đoạn hệ dao động tự do không có sự tồn tại của tải trọng động bên ngoài.

- Xét khoảng 1: $0 \le t \le \theta$.

Phương trình dao động khi hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa được xác định bằng biểu thức (1-116):

$$y(t) = \frac{P_m}{K}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin rt - \beta \sin \omega t) \tag{1-165}$$

Xét ở khoảng 2: $t > \theta$

Ở giai đoạn này hệ số dao động tự do, dao động này phụ thuộc vào chuyển vị $y(\theta)$ và tốc độ $V(\theta)$ ở cuối giai đoạn 1. Phương trình dao động được viết tương tự như: (1-45):

$$y(t) = \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) + y(\theta)\cos\omega(t-\theta) \tag{1-166}$$

Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị theo thời gian ta cần phải lấy đạo hàm phương trình (1-165) và cho bằng không:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{P_m}{K}\frac{1}{1-\beta^2}(r\cos rt - r\cos\omega) = 0$$

Suy ra: $\cos rt = \cos\omega t$

Do đó: $rt = 2\pi n \pm \omega t,\ n = 0,\ \pm 1, 2, 3, ...$ (1-167)

Ta cần quan tâm đến trường hợp tải trọng tác dụng có tần số gần với tần số dao động riêng của hệ ($r \to \omega$), như vậy cần lấy $n = 1$ ở biểu thức trên, đồng thời tính với dấu âm khi đó:

$$rt = \frac{2\pi}{1+\dfrac{\omega}{r}} \tag{1-168}$$

Biên độ cực đại của dao động được xác định bằng phép thế biểu thức (1-168) vào (1-165). Kết quả chỉ thỏa mãn khi $rt \le 1$ tương ứng với trường hợp $\beta < 1$.

Khi $\beta > 1$ sự cực đại của dao động sẽ xảy ra ở khoảng hai ứng với dao động tự do. Chuyển vị ban đầu và tốc độ ban đầu ở khoảng này được xác định bằng phương trình (1-165) và đạo hàm phương trình này với phép thế $r\theta = \pi$.

$$y(\theta) = \frac{P_m}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\left(0 - \beta\sin\frac{\pi}{\beta}\right)$$

$$v(\theta) = \frac{P_m}{K}\frac{r}{1-\beta^2}\cdot\left(-1-\cos\frac{\pi}{\beta}\right)$$

Biên độ dao động tự do của giai đoạn này được xác định theo (1-48) sẽ bằng

$$A=\sqrt{y_{(\theta)}^2+\left(\frac{v_{(\theta)}}{\omega}\right)^2}=\frac{P_m}{K(1-\beta^2)}\cdot\beta\left(2+2\cos\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}$$

Do đó hệ số động lực này sẽ bằng (khi $\beta > 1$, $t > \theta$)

$$K_d=\frac{y_{max}}{\dfrac{P_m}{K}}=\frac{2\beta}{1-\beta^2}\cos\frac{\pi}{2\beta} \qquad (1\text{-}169)$$

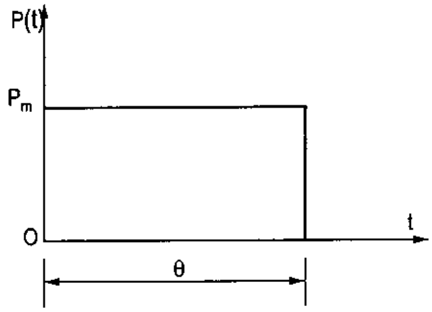
2. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình chữ nhật

Xét dao động của hệ trong trường hợp chịu tác dụng của tải trọng tăng đột biến, sau đó giữ nguyên giá trị trong một thời gian ngắn θ hình 1.35:

$P(t) = P_m$ khi $t \le \theta$

$P(t) = 0$ khi $> \theta$

Ta cũng tính hệ ở hai giai đoạn ứng với hai khoảng thời gian $t \lesseqgtr \theta$



Hình 1.35

- Xét khoảng 1: $t \le \theta$, $P(t) = P_m$

Dễ thấy rằng nghiệm riêng của phương trình vi phân dao động khi chịu tải trọng này chính là độ võng tĩnh:

$$y_T=\frac{P_m}{K}$$

Tính đến biểu thức này, nghiệm tổng quát chứa các hằng số được xác định từ điều kiện ban đầu bằng không sẽ là:

$$y(t)=\frac{P_m}{K}(1-\cos\omega t) \qquad (1\text{-}170)$$

Biểu thức (1-170) là phương trình dao động của hệ ở khoảng đầu. Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị ta lấy đạo hàm biểu thức (1-170) và cho bằng không:

$$\dot{y}(t)=\frac{P_m}{K}\cdot\omega\sin\omega t=0$$

Suy ra: $\omega t = n\pi$, và $t = n\dfrac{T}{2}$, với $n = 1$; $t=\dfrac{T}{2}$; vì đang xét trong khoảng một, nên $t \le \theta$ do đó ta có điều kiện để cực trị xảy ra ở khoảng này là: $\dfrac{\theta}{T} \ge 0{,}5$.

Ứng với $t = \frac{T}{2}$ dễ thấy rằng: $y\left(t = \frac{T}{2}\right) = 2\frac{P_m}{K} = 2y_T$, nghĩa là hệ số động trong trường hợp này bằng 2.

- Xét trong khoảng 2: $t > \theta$, $P(t) = 0$.

Phương trình dao động tự do ở khoảng này được viết tương tự như phần trên (1-166).

$$y(t) = y(\theta)\cos\omega(t-\theta) + \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) \qquad (1\text{-}171)$$

Trong đó $y_{(\theta)}$ và $v_{(\theta)}$ là chuyển vị và tốc độ chuyển động của hệ ở cuối khoảng 1.

Biên độ dao động của giai đoạn này được xác định theo (1-48):

$$A = \sqrt{\left(\frac{v(\theta)}{\omega}\right)^2 + y^2(\theta)} = \frac{P_m}{K}\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\theta\right) + \left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}\cdot\theta\right)^2} =$$

$$= \frac{P_m}{K}\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}\theta\right)}$$

Do đó: $$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = 2\sin\frac{\pi\theta}{T}\left(\text{với } \frac{\theta}{T} < 0{,}5\right) \qquad (1\text{-}172)$$

Như vậy hệ số động thay đổi theo quy luật sin phụ thuộc vào các quan hệ $\frac{\theta}{T}$ nhỏ hơn 0,5. Từ công thức (1-172) ta sẽ tính được các hệ số động và cho trong bảng 1.1.

Bảng 1.1

$\frac{\theta}{T}$	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,167	0,2	0,3	0,4	≥ 0,5
K_d	0	0,052	0,126	0,313	0,618	1	1,175	1,617	1,902	2

3. Tải trọng ngắn hạn có dạng hình tam giác với biên độ giảm dần

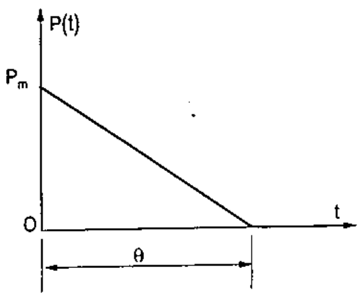
Xét dao động của hệ khi chịu tác dụng của tải trọng tăng đột biến sau đó giảm tuyến tĩnh đến giá trị không trong thời gian ngắn θ (hình 1.36).

$$P(t) = P_m\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \quad \text{khi } t \leq \theta$$

$$P(t) = 0 \text{ khi } t > \theta$$

Xét trong khoảng 1: $t \leq \theta$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân giao động của hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P(t) = P_m\left(1 - \frac{t}{\theta}\right)$ là:



Hình 1.36

$$y_x(t) = \frac{P_m}{K}\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \quad (1\text{-}173)$$

Tính đến nghiệm riêng này, nghiệm tổng quát chứa các hằng số được xác định từ điều *kiện ban đầu bằng không sẽ là:*

$$y(t) = \frac{P_m}{K}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega\theta} - \cos\omega t - \frac{t}{\theta} + 1\right) \quad (1\text{-}174)$$

Tương tự như ở phần trên, để xác ddịnh giá trị lớn nhất của chuyển vị, ta cũng lấy đạo hàm phương trình (1-174) và cho bằng không. Kết quả ta nhận được như sau:

Thời điểm chuyển vị đạt cực đại là:

$$t = \frac{2\text{arctg}\omega\theta}{\omega} \quad (1\text{-}175)$$

Ứng với chuyển vị cực đại

$$y_{max} = 2\frac{P_m}{K}\left(1 - \frac{\text{arctg}\omega t}{\omega\theta}\right) \quad (1.176)$$

Từ biểu thức (1-176) ta suy ra hệ số động trong trường hợp này:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = 2\left(1 - \frac{\text{arctg}\omega\theta}{\omega\theta}\right) \quad (1\text{-}177)$$

Điều kiện để xảy ra cực đại trong khoảng đầu là thời gian được tính theo biểu thức (1-175) sẽ nhỏ hơn hoặc bằng thời gian duy trì tải trọng θ. Từ điều kiện này, ta xác định được: $\frac{\theta}{T} \geq 0{,}371$.

- Xét trong khoảng 2: $t > \theta$.

Phương trình dao động tự do được xác định từ điều kiện ban đầu ứng với thời điểm cuối giai đoạn một, tức là tại $t = \theta$.

$$y(t) = y(\theta)\cos\omega(t-\theta) + \frac{v(\theta)}{\omega}\sin\omega(t-\theta) \quad (1\text{-}178)$$

Trong đó:

$$y(\theta) = \frac{P_m}{K}\left(\frac{\sin\omega\theta}{\omega\theta} - \cos\omega\theta\right)$$

$$v(\theta) = \frac{P_m}{K}\left(\frac{\cos\omega\theta}{\theta} - \omega\theta\right)$$

Biên độ dao động tự do của giai đoạn này được xác định theo (1-48)

$$A = \sqrt{y^2(\theta) + \left(\frac{v(\theta)}{\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{P_m}{K} \cdot \frac{1}{\omega\theta} \sqrt{(\sin\omega\theta - \omega\theta\cos\omega\theta)^2 + (\cos\omega\theta + \omega\theta\sin\omega\theta - 1)^2} =$$

$$= \frac{P_m}{K} \cdot \frac{\sqrt{(1-\cos\omega\theta)^2 + (\omega\theta - \sin\omega\theta)^2}}{\omega\theta}$$

Do đó

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{\sqrt{(1-\cos\omega\theta)^2 + (\omega\theta - \sin\omega\theta)^2}}{\omega\theta} \qquad (1\text{-}179)$$

Điều kiện xảy ra cực đại trong khoảng này là $\frac{\theta}{T} < 0{,}371$. Từ các công thức (1-177), (1-179) ta lập được bảng xác định hệ số động theo tỉ lệ $\frac{\theta}{T}$ của dạng tải trọng ngắn hạn này (bảng 1.2).

Bảng 1.2

$\frac{\theta}{T}$	0	0,1	0,2	0,3	0,371	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
K_d	0	0,31	0,602	0,853	1	1,051	1,197	1,31	1,392	1,453
$\frac{\theta}{T}$	0,9	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	5	∞
K_d	1,506	1,552	1,63	1,689	1,73	1,763	1,809	1,839	1,908	2

4. Tải trọng tĩnh tương đương

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động ngắn hạn cũng như khi chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật bất kì theo thời gian, tải trọng tĩnh tương đương được xác định từ hệ số động k_d và giá trị lớn nhất của tải trọng động P_m như sau:

Ta đã biết công thức xác định tải trọng tĩnh tương đương từ (1-163):

$$P_{td} = Ky_{max}$$

Chuyển vị lớn nhất y_{max} được tính qua hệ số động:

$$y_{max} = y_T \,.\, K_d = \frac{P_m}{k} K_d$$

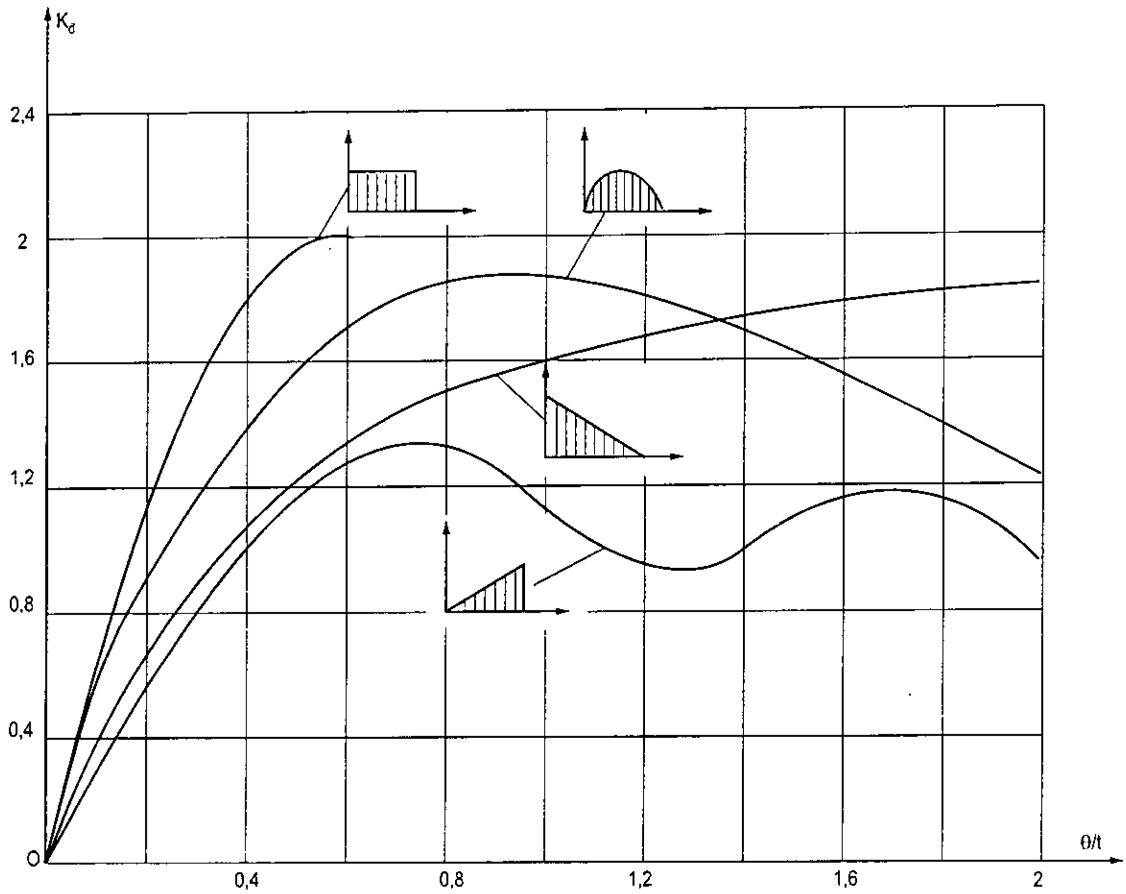
Thay giá trị này vào công thức xác định P_{td} ở trên, ta được:

$$P_{td} = K_d \,.\, P_m \qquad (1\text{-}180)$$

Trên hình 1.37 mô tả biểu đồ các hệ số động k_d theo tỉ số $\frac{\theta}{T}$ ứng với một số dạng tải trọng động ngắn hạn khác nhau.

Qua đồ thị hệ số động vẽ trên hình 1.36 cũng như qua các bảng tra hệ số động ta thấy rằng:

Hệ số động có thể lớn hơn, bằng hoặc nhỏ hơn đơn vị, $K_d \gtreqless 1$ điều đó có nghĩa là: tải trọng tĩnh tương đương có thể lớn hơn, bằng, hoặc nhỏ hơn giá trị cực đại của tải trọng động tác dụng lên hệ.



Hình 1.37

Hệ số động lớn nhất là bằng 2.

Hệ số động phụ thuộc vào đặc tính tải trọng và tỉ số $\dfrac{\theta}{T}$.

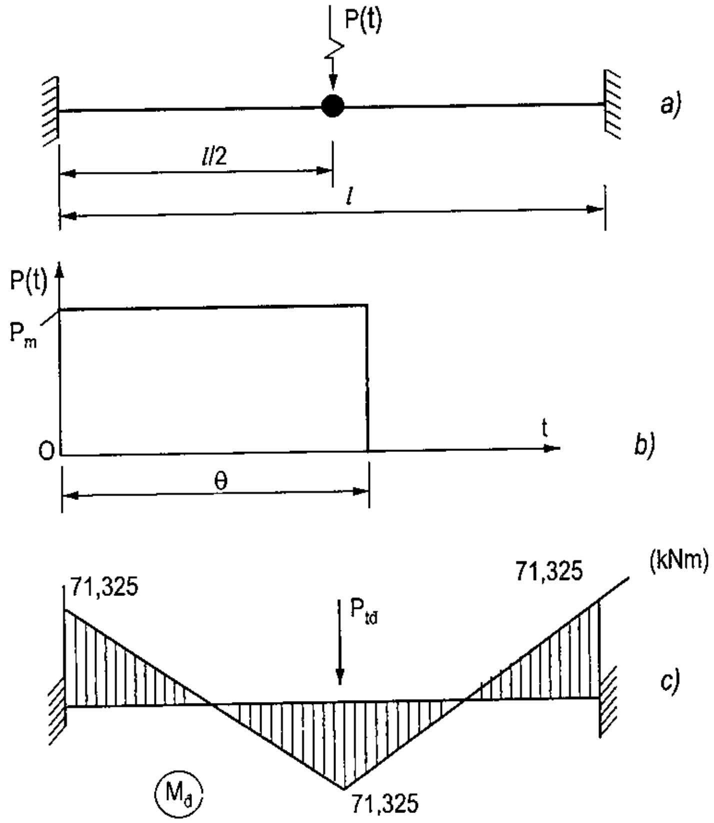
Nói chung với tác dụng tải trọng động ngắn hạn (thời gian duy trì tải trọng rất ngắn so với chu kì dao động riêng), kết cấu có độ cứng càng lớn thì hệ số động càng lớn, hiệu quả tác dụng của tải trọng động lớn kết cấu càng lớn.

5. Một số thí dụ

Thí dụ 1.9:

Vẽ biểu đồ của mô men uốn động trong dầm cho trên hình 1.38a tải trọng động có quy luật theo thời gian cho trên hình 1.38b cho $E = 2{,}1.10^4 kN/cm^2$, $J = 470cm^4$, $l = 3m$, $M = 0{,}01kNs^2/cm$, $P_m = 100kN$, $\theta = 0{,}03.s$.

Xác định tần số và chu kì dao động riêng của hệ.



Hình 1.38

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M.\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{192\ EJ}{Ml^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{192.2{,}1.10^4.470}{10^2.3^3.100^3}} = \sqrt{7018} = 83{,}77.\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2.3{,}14}{83{,}77} = 0{,}075\ .(s)$$

Tính tỉ số $\frac{\theta}{T}$, hệ số động, tải trọng tĩnh tương đương:

$\frac{\theta}{T} = \frac{0{,}03}{0{,}075} = 0{,}4$, theo bảng 1.1 ta tra được hệ số động: $K_đ$ = 1,902, do đó tải trọng tĩnh tương đương:

$$P_{tđ} = K_đ.P_m = 1{,}902\ .\ 100 = 190{,}2\ .\ kN$$

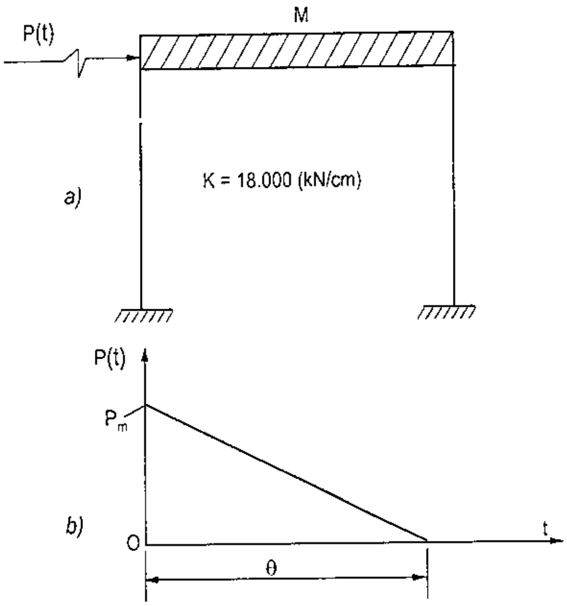
- Giá trị mô men uốn lớn nhất tại các vị trí hai đầu ngàm và giữa nhịp:

$$M = \frac{P_{td}.l}{8} = \frac{189,2.3}{8} = 71,325 \ (kNm)$$

Biểu đồ mô men uốn động được vẽ trên hình 1.38c.

Thí dụ 1.10:

Xác định chuyển vị lớn nhất của hệ kết cấu khung nhà một tầng cho ở hình 1.39a hệ chịu tác dụng của tải trọng sóng nổ có quy luật thay đổi theo thời gian cho trên hình 1.39b, cho trước: $M = 3kNs^2/cm$, độ cứng đàn hồi của các thanh đứng $K = 18000$ (kN/cm), $P_m = 4500$ kN, $\theta = 0,05$.s.



Hình 1.39

- Tần số dao động riêng của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{18000}{3}} = \sqrt{6000} = 77,46\left(\frac{1}{s}\right)$$

Chu kì dao động riêng của hệ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2,314}{77,46} = 0,081 \ (s)$$

Xác định hệ số động và tải trọng tĩnh tương đương:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{0,05}{0,081} = 0,617, \text{ tra bảng (1.2) được: } K_d = 1,32$$

- Tải trọng tĩnh tương đương:

$$P_{td} = K_d \, P_m = 1,32 \,.\, 4500 = 5940 \text{ kN}$$

- Chuyển vị lớn nhất của hệ:

$$y_{max} = \frac{P_{td}}{K} = \frac{5940}{18000} = 0{,}33.\text{cm}$$

§.8. DAO ĐỘNG CỦA HỆ 1 BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN VỚI QUY LUẬT BẤT KÌ

1. Dao động của hệ trong trường hợp không xét tới lực cản

Trong trường hợp tổng quát phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian với quy luật bất kì là phương trình (1-5) với c = 0.

$$M\ddot{y} + Ky = P(t) \qquad (1\text{-}181)$$

$$\text{Hay:}\quad \ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{M} \qquad (1\text{-}182)$$

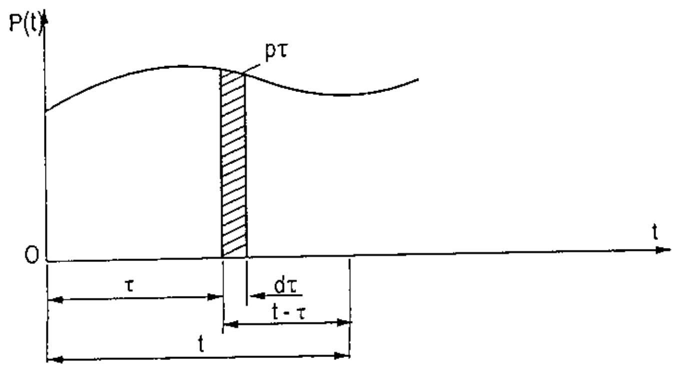
Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên bao gồm nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng. Nghiệm thuần nhất ứng với phương trình vi phân có vế phải bằng không như đã biết ở công thức (1-45):

$$y_{tn} = y_o \cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t \qquad (1\text{-}183)$$

Đây chính là thành phần dao động tự do do các điều kiện ban đầu y(o) ≠ 0 và v(o) ≠ 0 gây ra.

Nghiệm riêng do tác dụng của tải trọng có thể tìm được trên cơ sở sử dụng phương trình dao động của hệ chịu tác dụng của xung tức thời (1-158). Ta xét tải trọng động ở dạng tổng quát với quy luật bất kì trên hình 1.40, tải trọng P_t có thể được thay bằng tổng của các xung phân tố vô cùng bé:

$$ds = P(\tau)\,.\,d\tau$$



Hình 1.40

Ta xem rằng tại thời điểm τ trên hệ chịu tác dụng của xung phân tố ds. Độ võng do tác dụng của xung phân tố ds này gây ra là: theo (1-161).

$$dy(t) = P(\tau)d\tau.\overline{y}(1-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{M\omega}\cdot\sin\omega(t-\tau) \qquad (1\text{-}184)$$

Độ võng toàn phần do tải trọng P(t) gây ra là:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega}\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1\text{-}185)$$

Tích phân (1-185) được gọi là tích phân Duamen.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động là:

$$y(t) = y_o\cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{M\omega}\int_o^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1\text{-}186)$$

Phương trình dao động (1-186) có thể tìm được bằng cách giải trực tiếp phương trình vi phân dao động (1-82) theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrăngiơ hoặc có thể tìm được nhờ phép biến đổi Laplátxơ. Ở đây không trình bày các phương pháp này.

2. Hệ số động trong trường hợp tổng quát và biểu thức lực đàn hồi

Để tìm hệ số động theo thời gian ta cần biến đổi phương trình (1-185) như sau:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega^2}\cdot\omega\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \delta_{11}.\omega\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Nếu thay $P(t) = P_m \cdot f(t)$, trong đó f(t) là luật thay đổi theo thời gian của tải trọng động, thì ta sẽ viết lại phương trình trên:

$$y(t) = \delta_{11}.P_m.\omega\int_o^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Hay :

$$y(t) = y_T.\omega\int_o^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1\text{-}187)$$

Ta đã biết biểu thức hệ số động theo thời gian (1-119)

$$K(t) = \frac{y(t)}{y_T}$$

Thay y(t) ở (1-187) vào biểu thức này ta được:

$$K(t) = \omega\int_o^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1\text{-}188)$$

Hệ số động: $K_d = \dfrac{y_{max}}{y_T}$, do đó:

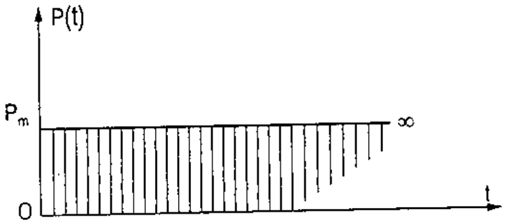
$$K_d = K(t)\max = \left(\omega\int_o^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau\right)_{max} \qquad (1\text{-}189)$$

Chuyển vị của khối lượng nếu viết theo hệ số động học theo thời gian:

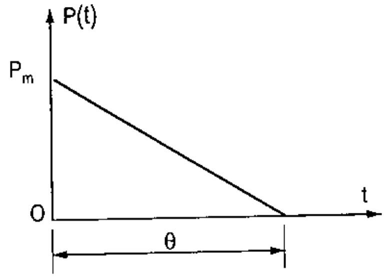
$$y(t) = y_T \, . \, K(t) \tag{1-190}$$

Tất cả các dạng tải trọng động ngắn hạn đã xét ở §6 và tải trọng điều hòa đã xét ở §4. Đều là các hàm có quy luật nhất định theo thời gian. Công thức xác định hệ số động (1-189) có thể áp dụng đối với tất cả các dạng tải trọng đó. Dưới đây chỉ xét tác dụng của một số dạng tải trọng động.

3. Tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, sau đó giữ nguyên giá trị trên hệ (hình 1.41)



Hình 1.41



Hình 1.42

Trong thực tế khi công trình chịu tác dụng của các sóng xung kích do các vụ nổ hạt nhân có thời gian duy trì tải trọng θ lớn gấp 15 lần chu kì dao động riêng của kết cấu, thì biểu đồ tải trọng động thay đổi theo luật hình tam giác (hình 1.42) có thể bỏ qua thời gian giảm tải và tính theo biểu đồ trên hình 1.41 bởi vì trong trường hợp này, biến dạng cực đại của hệ xảy ra ở ngay giai đoạn đầu khi tải trọng tác dụng.

Chuyển vị của hệ tính theo (1-185):

$$y(t) = \frac{1}{M\omega} \int_0^t P_m \, . \, \sin\omega(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{P_m}{M\omega} \int_0^t -\frac{\sin\omega\,(t-\tau)\; d\omega\,(t-\tau)}{\omega} = \frac{P_m}{M\omega^2}(1-\cos\,\omega t)$$

Biểu thức lực đàn hồi được xác định từ tích của độ cứng và chuyển vị động:

$$P_d(t) = K.y(t)$$

Thay y(t) theo (1.185) vào biểu thức trên:

$$P_d(t) = K.\frac{1}{M.\omega} \int_0^t P_{(\tau)}.\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Biến đổi, ta được: $\quad P_d(t) = P_m.K(t) \qquad (1.191)$

Với K(t) là hệ số động học theo thời gian được xác định theo (1.188)

Tải trọng tĩnh tương đương là lực đàn hồi lớn nhất tác dụng lên hệ :

$$P_{td} = P_m.K_d \tag{1.192}$$

Hay : $$y(t) = y_T(1 - \cos\omega t) \qquad (1\text{-}193)$$

Hệ số động học theo thời gian xác định theo (1-188), với f(r) ở đây bằng đơn vị: f(r) = 1.

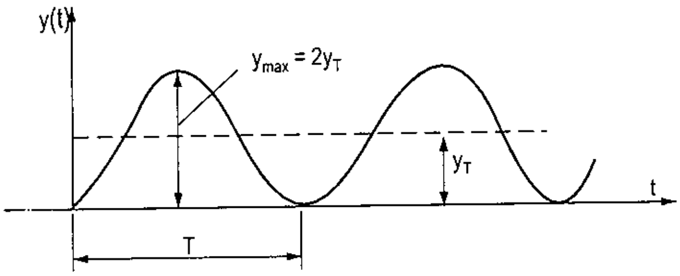
$$K(t) = \omega \int_0^t 1.\sin\omega(t-r)\,d\tau = \omega\,\frac{1-\cos\omega t}{\omega} = 1-\cos\omega t$$

Dễ thấy rằng hệ số động: $K_d = K_{(t)\max} = 2$ (1-194)

Nếu viết biểu thức chuyển vị của khối lượng theo công thức (1-190) ta cũng nhận được kết quả như phương trình dao động (1-193).

Dao động của hệ được cho trên hình 1.43.

Tương tự như xét dao động tự do khi kể đến trọng lượng bản thân (1-67), ở phương trình (1-193) và đồ thị trên hình 1.43 ta thấy: Dao động cưỡng bức của hệ chịu tải trọng đặt đột ngột sau đó giữ nguyên trên hệ là dao động tự do quanh vị trí cân bằng mới, cách vị trí cân bằng ban đầu một khoảng y_T và với biên độ cũng bằng y_T.



Hình 1.43

4. Tác dụng của tải trọng đột ngột, sau đó giữ nguyên giá trị trong một thời gian ngắn hình 1.35

$$P(t) = \begin{cases} P_m & \text{khi } t \le \theta \\ 0 & \text{khi } t > \theta \end{cases} \quad \text{tương ứng ta có:} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \le \theta \\ 0 & \text{khi } t > \theta \end{cases}$$

Khác với cách trình bày ở §7, ở đây sẽ tìm phương trình dao động của hệ và xác định hệ số động từ hệ số động học theo thời gian K(t).

- Xét trong khoảng 1: $t \le \theta$

Hệ số động học theo thời gian được xác định theo (1-188)

$$K_1(t) = \omega \int_0^t f(r)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \omega \int_0^t 1.\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = (1-\cos\omega t)$$

Phương trình dao động của hệ trong giai đoạn này:

$$y_1(t) = y_T.K_{(t)} = \frac{P_m}{K}(1-\cos\omega t)$$

Kết quả này hoàn toàn đúng với công thức (1-170) ở phần trên.

Để tìm hệ số động K_d ta tính đạo hàm của K(t) và cho bằng không:

$$K_1(t) = \omega\sin\omega t = 0 \text{ khi } \omega t = n\pi$$

Suy ra: $t_{max} = n\dfrac{\pi}{\omega} = n\dfrac{T}{2}$, lần thứ nhất $t_{1\,max} = \dfrac{T}{2}$

Vì đang xét trong khoảng 1 nên $t_{1max} \le \theta$ do đó

$$\frac{T}{2} \le \theta \text{, hay : } \frac{\theta}{T} \ge 0{,}5$$

Tại $t_{1max} = \dfrac{T}{2}$. $\ddot{K}_1(t) = \omega^2 \cos\omega t < 0$, nên $K_1(t)$ đạt cực đại

Quan hệ $\dfrac{\theta}{T} \ge 0{,}5$ chính là điều kiện để cực đại xảy ra ở khoảng một.

Ứng với $t_{max} = \dfrac{T}{2}$ ta có: $K_d = K(t)_{max} = 2$

- Xét trong khoảng 2 : $t > \theta$

Khi tính tích phân hệ số K(t) từ không đến thời điểm t ở giai đoạn này, ta phân ra hai tích phân: tích phân từ 0 đến θ tương ứng với hàm f(t) = 1, và tích phân từ θ đến t tương ứng với hàm f(t) = 0.

$$K(t) = \omega \int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \omega \int_0^\theta 1.\sin\omega\,(t-\tau)\,d\tau + 0 =$$

$$= \cos\omega\,(t-\theta) - \cos\omega t = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

$K_2(t) = 0$ khi $\omega\left(t-\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{n\pi}{2}$, lần thứ nhất:

$t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega} + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{T}{4} + \dfrac{\theta}{2}$. Với giá trị này $\ddot{K}_2(t) < 0$, và do đó:

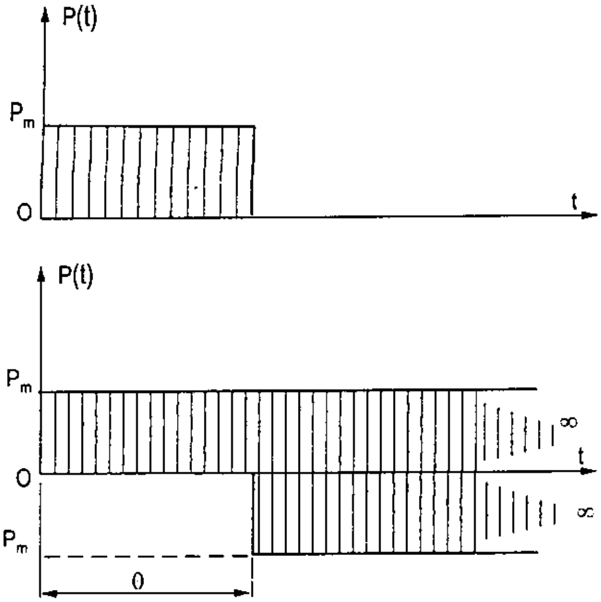
$$K_d = K_{max}(t) = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(\frac{T}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\omega\theta}{2}$$

Giá trị hệ số động này hoàn toàn đúng với công thức (1-172) đã có ở phần trên.

Phương trình dao động của hệ trong giai đoạn này:

$$y_2(t) = y_T\ K_2(t) = 2\,\frac{P_m}{K}\sin\frac{\omega\theta}{2}\sin\omega\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

Khi xét dao động của hệ xảy ra ở khoảng 2 người ta còn tiến hành bằng phép thêm bớt tải trọng. Tại thời điểm mất tải $t = \theta$, sẽ đặt thêm hai tải trọng có giá trị bằng P_m nhưng ngược chiều nhau (hình 1.44) lúc này dao động của hệ sẽ bao gồm: dao động do tác dụng của tải trọng P_m đã xét ở khoảng một và dao động do tải trọng - P_m bắt đầu tại thời điểm θ, kết quả ta cũng nhận được đúng với các biểu thức ở các phần trên.



Hình 1.44

5. Dao động của hệ trong trường hợp có cực cản

Trong trường hợp tổng quát hệ có xét đến lực cản, phương trình vi phân dao động là phương trình (1-5):

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = P(t)\text{, chia cả 2 vế cho M:}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\omega\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P(t)}{M} \tag{1-195}$$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân này được tìm trên cơ sở sử dụng dao động của hệ chịu tác dụng của xung tức thời tương tự như ở mục trên. Tại thời điểm τ trên biểu đồ tải trọng động theo thời gian P(t), ta tách ra một phân tố tải trọng:

$$ds = P(\tau)\,d\tau$$

Phân tố tải trọng này gây tác dụng xung lên hệ tại thời điểm τ. Độ võng do xung phân tố đó gây ra được viết theo (1-161):

$$dy(t) = P(t)d\tau.\bar{y}(t-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{M\omega_c}\cdot e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)$$

Độ võng toàn phần do tải trọng $P_{(t)}$ gây ra:

$$y(t) = \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\,\omega_c(t-\tau)\,d\tau \tag{1-196}$$

Hệ số động học thay đổi theo thời gian trong trường hợp này là:

$$K(t) = \frac{\omega^2}{\omega_c}\int_0^t f(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)\,d\tau \tag{1.197}$$

Khi điều kiện ban đầu khác không y(o) ≠ 0, v(o) ≠ 0 ta phải kể đến thành phần dao động tự do do điều kiện ban đầu gây ra. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1-195) sẽ là:

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}\left[y_o \cos\omega_c t + \frac{\omega\,\varepsilon\, y_o + v_o}{\omega_c}\sin\omega_c t\right] +$$

$$+\frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\,.\sin\omega_c(t-\tau)\,d\tau$$

Phương trình này tương đương với phương trình (1-186) khi tính hệ không đến ảnh hưởng của lực cản.

6. Xác định tích phân số Duamen

Ở các phần trên ta đã xét các trường hợp dao động cưỡng bức khi tải trọng động tác dụng P(t) có thể biểu diễn được dưới dạng giải tích và đã nhận được nghiệm tổng quát dưới dạng các tích phân trực tiếp (1-186) hay (1-197). Trong đa số các trường hợp thực tế tải trọng động được xác định trực tiếp từ kết quả của các số liệu thí nghiệm đo được và dao động trong các trường hợp này sẽ được tính bằng các phương pháp số.

Sử dụng công thức lượng giác:

$$\sin(\omega t - \omega\tau) = \sin\omega t\cos\omega\tau - \cos\omega t\sin\omega\tau$$

Ta sẽ viết lại tích phân Duamen (1-185) ở dạng sau (khi điều kiện ban đầu bằng không):

$$y(t) = \sin\omega t\frac{1}{M\omega}\int_0^t P(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau - \cos\omega t\frac{1}{M\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

Hay:

$$y(t) = A(t).\sin\omega t - B(t)\cos\omega t \tag{1-198}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{M\omega}\int_0^t P(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{M\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau \end{aligned}\right\} \tag{1-199}$$

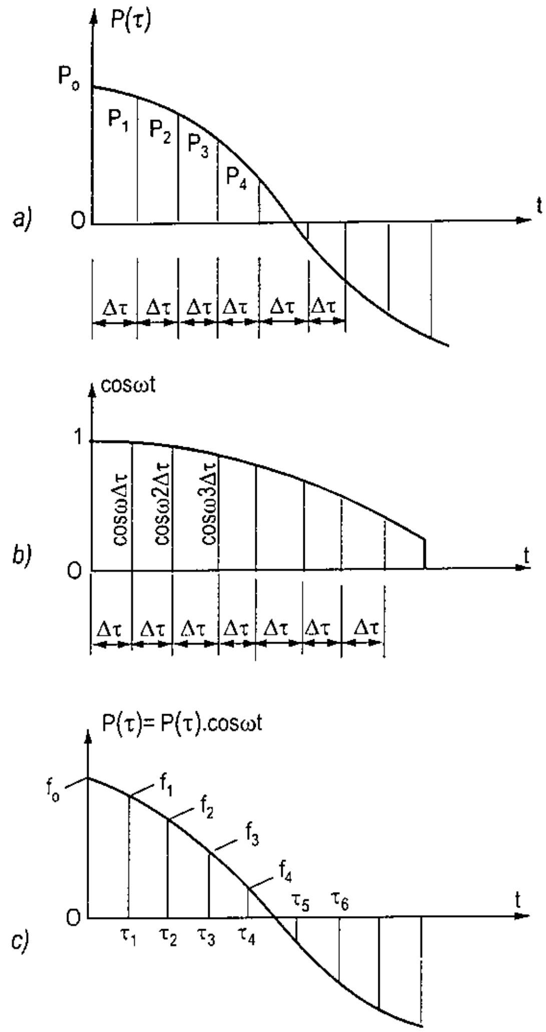
Như vậy việc xác định tích phân Duamen sẽ dẫn đến việc tìm các tích phân A(t) và B(t). Để xác định các tích phân này ta dùng các phương pháp gần đúng. Giả sử cần tích phân A(t) của (1-199). Đặt:

$$f(\tau) = P(\tau).\cos\omega\tau$$

Thì:

$$A(t) = \frac{1}{M\omega}\int_0^t f(\tau)\,d\tau \tag{1-200}$$

Chia khoảng cần lấy tích phân thành nhiều đoạn có khoảng cách đều nhau và bằng $\Delta\tau$. Giá trị các đại lượng $P(\tau)$, $\cos\omega\tau$ và giá trị của hàm $f(\tau)$ ứng với các điểm chia được xác định (hình 1.45). Tích phân cần tìm $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ chính là diện tích của đồ thị vẽ được trên hình 1.45c.



Hình 1.45

Nếu xem hàm số $f_{(\tau)}$ biến thiên theo quy luật đường thẳng song song với trục t từ mỗi tung độ thì ta có thể dùng công thức gần đúng đơn giản sau để xác định tích phân (1-200):

$$\int_{\tau a}^{\tau b} f(\tau)d\tau = \Delta\tau\,[f_o + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1}] \tag{a}$$

Nếu xem hàm $f_{(\tau)}$ biến thiên theo quy luật đường thẳng nối giữa hai tung độ ta có thể dùng công thức hình thang:

$$\int_{\tau a}^{\tau b} f(\tau)d\tau = \frac{\Delta\tau}{2}\,[f_o + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) + f_n] \tag{b}$$

$$[+2\,(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) + f_n]$$

Nếu xem hàm f(τ) biến thiên theo quy luật parabol đi qua 3 tung độ của các đoạn chia kế tiếp nhau, ta có thể dùng công thức Simpson (với đoạn chia là chẵn).

$$\int_{\tau a}^{\tau b} = \frac{\Delta\tau}{3}\left[f_o + 4(f_1 + f_3 + ... + f_{n-1} + 2(f_2 + f_4 + ... + f_{n-2}) + f_n\right] \qquad (c)$$

Trong các công thức gần đúng trên công thức Simpson cho kết quả chính xác hơn, nếu dùng công thức Simpson với số đoạn chia bằng 2 ta sẽ có:

$$\int_{\tau a}^{\tau b} f(\tau)d\tau = \frac{\Delta\tau}{3}(f_o + 4f_1 + f_2)$$

Áp dụng công thức này vào biểu thức (1-200) ta được:

$$A_{(t)} = G\,(f_o + 4f_1 + f_2) \qquad (1\text{-}201)$$

Trong đó:
$$G = \frac{\Delta\tau}{3M\omega} \qquad (1\text{-}202)$$

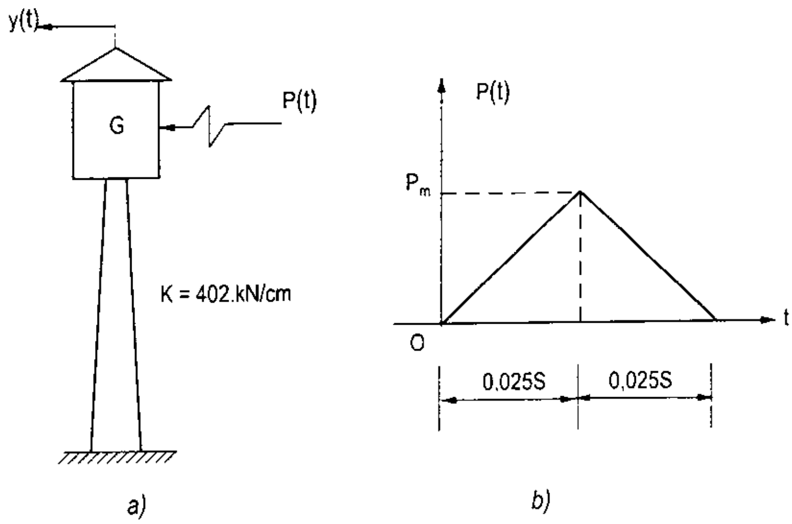
Biểu thức tích phân đầy đủ khi tính đến thời điểm t bất kì bao gồm biểu thức Simpson tính với hai đoạn chia của thời điểm t, và giá trị tích phân trước đó, nghĩa là:

$$A(t) = G[A(t-2\Delta\tau) + (f(t-2\Delta\tau) + 4f(t-\Delta\tau) + f(t)] \qquad (1\text{-}203)$$

Tích phân B(t) của (1-199) hòan toàn được xác định tương tự như với tích phân $A_{(1)}$.

Thí dụ 1.11:

Tính dao động của tháp nước chịu tác dụng của tải trọng do sóng nổ cho trên hình 1.46. Xác định các chuyển vị và lực đàn hồi tương ứng theo thời gian. Cho trọng lượng của tháp G = 43,7 kN, độ cứng đàn hồi của cột tháp K = 402 kN/cm, P_m = 43,7kN.



Hình 1.46

Ta chia thời gian ra 10 khoảng với Δ = 0,005.s. Kết quả quá trình tính toán cho ở bảng (1.3).

Xác định tần số dao động riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K.g}{G}} = \sqrt{\frac{402.981}{437}} = \sqrt{902,43} = 30\left(\frac{1}{s}\right)$$

Xác định hệ số G theo (1-202)

$$G = \frac{\Delta\tau}{3M\omega} = \frac{\Delta\tau.\omega}{3K} = \frac{0,005.30}{3.402} = 1,243.10^{-4}\ \text{(cm/kN)}$$

Để tiện lập bảng ta đưa vào kí hiệu:

$$\widetilde{A}(t) = f(t-2\Delta\tau) + 4f(t-\Delta\tau) = f(t)$$

$$\overline{A}(t) = A(t-2\Delta\tau) + \widetilde{A}(t)$$

Như vậy: $A(t) = G.\overline{A}(t)$

Sau khi kết thúc sự tác dụng của tải trọng, hệ sẽ chuyển sang dao động tự do. Các đại lượng A(t) và B(t) tại thời điểm kết thúc tải trọng tác dụng chính là các hệ số của phương trình dao động tự do. Nếu kí hiệu các hệ số của giá trị tích phân đó là A* và B*, thì dao động tự do dưới tác dụng của tải trọng nổ sẽ là:

$$y(t) = A^*\sin\omega t - B^*\cos\omega t,\ \text{và biên độ dao động}$$

$$y_{max}\sqrt{(A^*)^2 + (B^*)^2}$$

Trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của lực cản, độ võng do tải trọng gây ra được xác định theo (1-196):

$$y(t) = \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Việc xác định số tích phân Duamen được tiến hành với các tích phân $A_{(t)}$ và $B_{(t)}$ có dạng sau:

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)\frac{e^{\varepsilon\omega\tau}}{e^{\varepsilon\omega t}}\cos\omega_c\tau d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{M\omega_c}\int_0^t P(\tau)\frac{e^{\varepsilon\omega\tau}}{e^{\varepsilon\omega t}}.\sin\omega_c\tau d\tau \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}204)$$

Nếu dùng công thức Simpson tương tự như biểu thức (1-203) với trường hợp có lực cản ta có:

$$A(t) = \Big\{A(t-2\Delta\tau) + [P(t-2\Delta\tau).\cos\omega_c(t-2\Delta\tau)]\,e^{-\varepsilon\omega 2\Delta\tau} +$$

$$+ 4P(t-\Delta\tau).\cos\omega_c(t-\Delta\tau)e^{-\varepsilon\omega\Delta\tau} + P(t)\cos\omega_c t\Big\}\frac{\Delta\tau}{3M\omega_c} \quad (1\text{-}205)$$

Bảng 1.3

τ	0,00	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050
$P(\tau)$	0	87,52	175	262,5	350	437	350	262,56	175	87,5	0
$\sin\omega\tau$	0	0,15	0,255	0,435	0,564	0,677	0,783	0,870	0,932	0,976	0,997
$\cos\omega\tau$	1	0,989	0,955	0,901	0,826	0,736	0,622	0,493	0,363	0,220	0,0715
$P(\tau)\cos\omega\tau$	0	86,56	167,1	236,56	289,1	321,6	217,7	129,4	63,52	19,25	0
Hệ số α	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
$\alpha P(\tau)\cos\omega\tau$	0	346,24	167,1	946,24	289,1	1286,4	217,7	517,6	63,52	77	0
								798,55		140,5	
$\tilde{A}(t)$		513,3		1402,4		1793,2					
$\bar{A}(t)$	0		513,3		1915,7		3708,9		4507,4		4648
$A(t)$			0,0638		0,02381		0,461		0,56		0,578
$P(\tau)\sin\alpha\tau$	0	13,13	51,63	114,21	197,4	295,85	274,05	228,43	163,1	85,4	0
Hệ số α	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
$\alpha P_r\sin\omega\tau$	0	52,52	51,63	456,8	197,4	1183,4	74,05	913,72	163,1	341,6	0
$\tilde{B}(t)$		104,15		705,83		1654,85		1350,87		504,7	
$\bar{B}(t)$	0		104,15		810		2465		3816		4321
$B(t)$			0,01295		0,1007		0,306		0,474		0,537
$A(t)$, $\sin\omega\tau$	0		0.0188		0,01343		0,361		0,522		0,576
$B(t)$, $\cos\omega\tau$	0		0.01237		0,0832		0,19		0,177		0.0384
$y(t)$ cm	0		0,064		0,051		0,171		0,35		0,537
$Fd = Ky$ (kN)	0		2,57		20,54		68,74		140,7		216,11

Độ chính xác của nghiệm phụ thuộc vào giá trị của bước thời gian $\Delta\tau$; thông thường chọn $\Delta\tau \le \dfrac{T}{10}$ sẽ cho phép các kết quả tính toán thỏa mãn độ chính xác yêu cầu.

Tóm lại, từ những nội dung được trình bày ở trên, ta có thể đưa ra trình tự tính toán hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động như sau:

1. Xác định tham số của tải trọng động, tức là ta phải biểu thị được quy luật của tải trọng động thay đổi theo thời gian, hoặc ghi được các số liệu tải trọng động theo các bước thời gian:

2. Xác định các đặc trưng động học và tính chất đàn hồi của kết cấu công trình: Từ sơ đồ kết cấu và khối lượng ta xác định được chuyển vị và độ cứng của hệ, sau đó xác định được tần số dao động riêng và chu kì dao động riêng.

3. Xác định tải trọng tĩnh tương đương tác dụng lên hệ: 3 trường hợp

- Với tác dụng của xung tức thời:

$$P_{td} = S\,.\,\omega,\ \text{ứng với trường hợp khi}\ \frac{\theta}{T} < 25\%$$

- Với tải trọng ngắn hạn:

$$P_{td} = K_d \,.\, P_m \text{ ứng với trường hợp khi } \frac{\theta}{T} \geq 25\%\,;$$

Trong đó: Hệ số động K_d được tra theo bảng 1.1, 1.2 hoặc đồ thị hình (1.36).

- Với tải trọng động có quy luật bất kì:

$$P_{td} = K_d \,.\, P_m, \text{ trong đó: } K_d = K(t)\max$$

Và: $$K(t) = \omega \int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa:

$$K_d = \frac{1}{1-\beta^2}\,; \qquad \text{Trong đó:} \qquad \beta = \frac{r}{\omega}$$

4. Tính nội lực và chuyển vị trong hệ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tương đương P_{td} đã xác định ở bước trên như hệ chịu tải trọng tĩnh thông thường.

Khi tính dao động của hệ bằng phương pháp số, chuyển vị và lực đàn hồi của hệ sẽ xác định tương ứng với các bước thời gian trong quá trình hệ dao động được tiến hành theo các bước cho trên bảng (1.3) đối với hệ không xét đến ảnh hưởng của lực cản; Khi xét tới lực cản, các bước tính cũng tiến hành tương tự.

Chương 2
DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Trong thực tế tính toán kĩ thuật ta hay gặp bài toán tính hệ dao động hữu hạn bậc tự do. Để tiện lợi cho việc biểu thị các phép tính và áp dụng được công cụ máy tính điện tử, trong chương này sẽ trình bày các nội dung dưới dạng ma trận. Việc sử dụng ngôn ngữ ma trận trong cơ học đã trở nên ngày càng rộng rãi, biểu hiện ở việc áp dụng các phương pháp tính như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp ma trận chuyển tiếp và nhiều các phương pháp gần đúng khác.

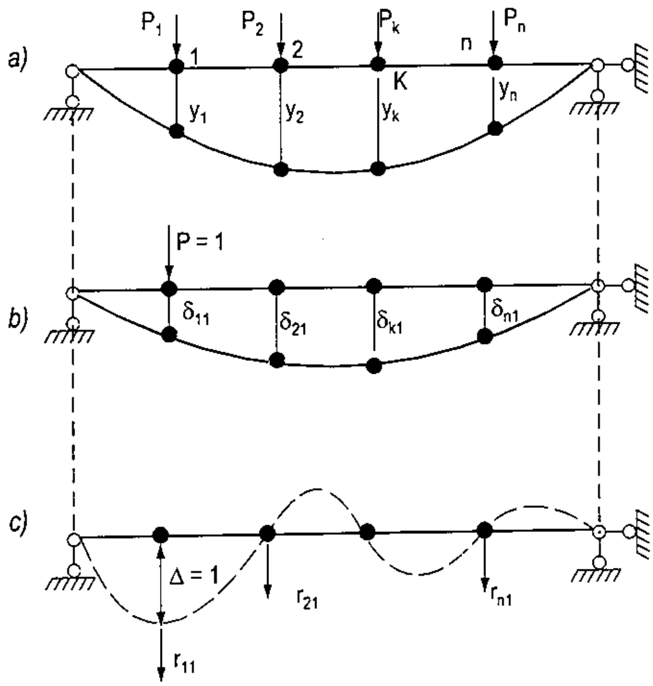
§1. KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN CỨNG VÀ MA TRẬN MỀM

Xét hệ dầm hình 2.1a tại các vị trí 1, 2...n hệ chịu tác dụng tương ứng của các lực P_1, P_2, ... P_n.

Chuyển vị tại vị trí k được xác định theo nguyên lí cộng tác dụng:

$$y_k = \delta_{k1} P_1 + \delta_{k2} P_2 + \ldots + \delta_{kk} P_k + \ldots + \delta_{kn} P_n$$

$$k = 1, 2, \ldots n;$$



Hình 2.1

Viết cho tất cả các vị trí ta có:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + ... + \delta_{1n}P_n \\ y_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + ... + \delta_{2n}P_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + ... + \delta_{nn}P_n \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1)$$

Ta viết phương trình (2-1) ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & ... & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & ... & \delta_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & ... & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{Bmatrix}$$

Hay: $\{Y\} = [F]\,\{P\}$

Trong đó:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & ... & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & ... & \delta_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & ... & \delta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

$\{Y\}$ - véc tơ chuyển vị;

$\{P\}$ - véc tơ tải trọng tác dụng.

[F] được gọi là ma trận mềm. Các phần tử của ma trận độ mềm δ_{km} (k = 1, 2, ... n m = 1, 2, ... n) là các chuyển vị đơn vị được xác định trên hình 2.1b. Vì $\delta_{km} = \delta_{mk}$ nên ma trận [F] là ma trận đối xứng.

Ngược lại ta có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + ... + r_{1n}y_n \\ P_2 &= r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + ... + r_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n &= r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + ... + r_{nn}y_n \end{aligned}\right\}$$

Hay: $\{P\} = [K]\,\{Y\}$ (2-4)

Trong đó: $$[K] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & .... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}5)$$

Ma trận [K] được gọi là ma trận cứng. Các phần tử của ma trận độ cứng r_{km} (k = 1, 2, ..., n; m = 1, 2,..., n) gọi là hệ số độ cứng, là lực tương ứng ở tọa độ k do chuyển vị đơn vị tại tọa độ m gây ra. (Xem hình 2.1c). Vì $r_{km} = r_{mk}$ nên ma trận [K] là ma trận đối xứng.

Dễ thấy rằng ma trận độ cứng là ma trận mềm nghịch đảo và ngược lại:

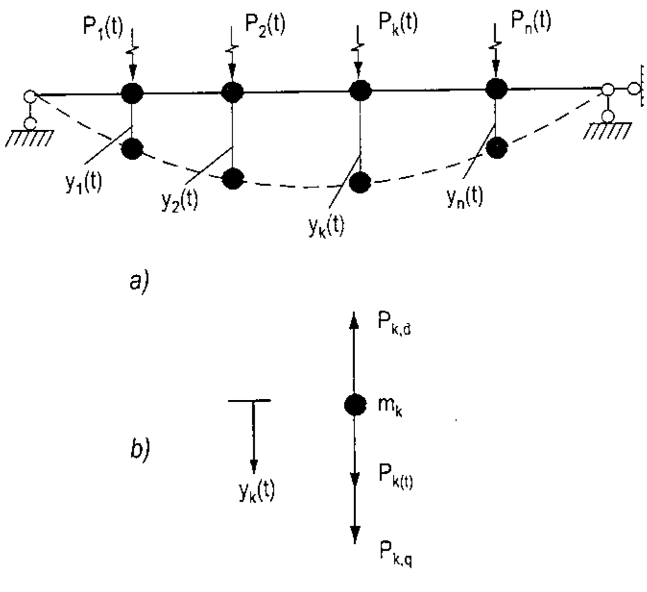
$$[K]=[F]^{-1}, \quad [F]=[K]^{-1}$$

Điều này nhận được do việc nhân trái hai vế của (2-4) với $[K]^{-1}$ rồi thế vào (2-2) hoặc nhân trái hai vế của (2-2) với $[F]^{-1}$ rồi thế vào (2-4).

§2. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO THEO PHƯƠNG PHÁP TĨNH

Xét hệ dầm có n khối lượng tập trung. Hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P_1(t)$, $P_2(t)$,...$P_n(t)$. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm khi dao động, vị trí của mỗi khối lượng được xác định bằng một thông số là chuyển vị theo phương đứng. Vì vậy hệ có n bậc tự do (hình 2.2a).

Trước hết ta xét trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của lực cản. Ta sẽ viết phương trình cân bằng lực với việc sử dụng nguyên lí Đalămbe, trong đó các lực đặt vào khối lượng bao gồm: tải trọng tác dụng, lực quán tính và lực đàn hồi hình 2.2b.



Hình 2.2

Phương trình cân bằng lực đối với khối lượng thứ K:

$$-P_{k,q} + P_{k,đ} = P_k(t) \qquad (2\text{-}6)$$

Trong đó:

$$P_{k,q} = -m_k\,\ddot{y}_k(t)$$

$$P_{k,đ} = r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + \ldots + r_{kn}y_n$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (2-6) ta được:

$$m_k\ddot{y}_k(t) + (r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + \ldots + r_{kn}y_n) = P_k(t) \qquad (2\text{-}7)$$

(k = 1, 2,..., n)

Phương trình (2-7) được viết cho tất cả các khối lượng của hệ như sau:

$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{y}_1 + (r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + ... + r_{1n}y_n) = P_1(t) \\ & m_2\ddot{y}_2 + (r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + ... + r_{2n}y_n) = P_2(t) \\ & .... \\ & m_n\ddot{y}_n + (r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + ... + r_{nn}y_n) = P_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}8)$$

Ta viết hệ phương trình (2-8) ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ ... & ... & .. & ... \\ 0 & ... & & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ ... \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & .. & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ ... \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

Hay có thể viết gọn hơn:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2\text{-}9)$$

Trong đó: [K] - ma trận độ cứng xác định theo (2-5); [M] - ma trận khối lượng hay ma trận quán tính ([M] là ma trận chéo):

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & m_n \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}10)$$

Và:

$$\{\ddot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ ... \\ \ddot{y}_n(t) \end{Bmatrix} \quad \{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ ... \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

Phương trình (2-9) gọi là phương trình vi phân dao động của hệ n bậc tự do viết dưới dạng ma trận.

Khi kể đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình (2-9) sẽ là:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [C]\{\dot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2\text{-}12)$$

Trong đó: [C] - ma trận cản, hay ma trận tắt dần:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}13)$$

Các phần tử của ma trận tắt dần c_{km} gọi là các hệ số ảnh hưởng tắt dần, là lực tương ứng với tọa độ k do tốc độ chuyển dịch đơn vị tại tọa độ m gây ra.

$$\{\dot{Y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dots \\ \dot{y}_n(t) \end{Bmatrix}$$ là véc tơ tốc độ chuyển dịch của hệ.

Phương trình (2-12) chính là điều kiện cân bằng tĩnh học của cả hệ:

$$\{-P_q(t)\} + \{P_c(t)\} + \{P_d(t)\} = \{P(t)\} \tag{2-14}$$

Trong đó lực quán tính, lực cản, lực đàn hồi lần lượt là:

$$\{P_q(t)\} = [M]\{\ddot{Y}(t)\} \tag{2-15}$$

$$\{P_c(t)\} = [C]\{\dot{Y}(t)\} \tag{2-16}$$

$$\{P_d(t)\} = [K]\{Y(t)\} \tag{2-17}$$

Phương trình (2-12) còn gọi là phương trình vi phân chuyển động ở dạng thuận. Viết một hàng của hệ này ta có:

$$m_k \ddot{y}_k(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\dot{y}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} r_{kj} y_j(t) = P_k(t) \tag{2-18}$$

Phương trình vi phân chuyển động còn viết được ở dạng nghịch như sau:

$$y_k(t) + \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} m_j \ddot{y}_j + \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} F_{j,c} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} P_j(t) \tag{2-19}$$

Hay: $y_k(t) + \delta_{k1}[m_1\ddot{y}_1(t) + P_{c1}(t) - P_1(t)] + \delta_{k2}[m_2\ddot{y}_2(t) + P_{c2}(t) - P_2(t)] +$

$+ \dots + \delta_{kn}[m_n\ddot{y}_n(t) + P_{cn}(t) - P_n(t)] = 0$

Khi xem lực cản theo giả thiết lực cản trọng fi đàn hồi của Xôrôkin (§4 chương 1), phương trình vi phân chuyển động 2-18 sẽ có dạng:

$$m_k \ddot{y}_k(t) + \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) \sum_{j=1}^{n} r_{kj}\, y_j(t) = P_k(t) \tag{2-20}$$

Trong đó: δ - độ suy giảm lôga.

Việc tính lực cản theo giả thiết Xôrôkin sẽ tạo nên lực cản tổng hợp là đẳng thức tuyến tính với lực đàn hồi. Điều đó cho phép khả năng tính dao động cưỡng bức của hệ với lực cản trong fi đàn hồi trong phạm vi lí thuyết tuyến tính.

§3. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO TỪ NGUYÊN LÍ HAMINTƠN

Có thể áp dụng nguyên lí biến phân động học Hamintơn để thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ hữu hạn bậc tự do thông qua phương trình chuyển động Lagrăng - Trước hết ta sẽ xây dựng phương trình chuyển động Lagrăng từ nguyên lí này.

1. Phương trình chuyển động Lagrăng

Biểu thức của nguyên lí Hamintơn như đã biết ở phần mở đầu (M-6)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta R\,dt = 0 \qquad (2\text{-}21)$$

Trong đó: δT, δU là biến phân động năng và biến phân thế năng của hệ, δR là biến phân công phân tố của tải trọng và lực tắt dần.

Đối với đa số các hệ cơ học và nhất là các hệ kết cấu xây dựng, động năng của hệ có thể biểu thị qua các tọa độ tổng quát và các đạo hàm bậc nhất của chúng theo thời gian; còn thế năng của hệ chỉ biểu thị qua các tọa độ (chuyển vị) tổng quát. Biến phân δR có thể biểu thị qua các hàm tuyến tính đối với các biến phân của các tọa độ tổng quát:

$$\left.\begin{aligned} &T = T(y_1, y_2, \dots, y_n; \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) && a\\ &U = U(y_1, y_2, \dots, y_n) && b\\ &\delta R = R_1\,\delta y_1 + R_2\,\delta y_2 + \dots + R_n\,\delta y_n && c \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}22)$$

Trong đó các hệ số $R_1, R_2, \dots R_n$ là các hàm lực tổng quát tương ứng với các tọa độ y_1, $y_2, \dots y_n$.

Thế các biểu thức (2-22) vào phương trình (2-21) ta được:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[\left(\frac{\partial T}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial T}{\partial y_2}\delta y_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial y_n}\delta y_n + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\delta \dot{y}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2}\delta \dot{y}_2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_n}\delta \dot{y}_n\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2}\delta y_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \dot{y}_n}\delta y_n\right) +$$

$$+ (R_1\,\delta y_1 + R_2\delta y_2 + \dots + R_n\,\delta y_n\Bigg]dt = 0 \qquad (2\text{-}23)$$

Lấy tích phân từng phần đối với các số hạng phụ thuộc vào tốc độ ở phương trình trên:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\delta \dot{y}_i\;dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\,\delta y_i\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right)\delta y_i\,.\,dt \qquad (2\text{-}24)$$

Thành phần đầu tiên ở vế phải của phương trình (2-24) bằng không vì: $\delta y_i\,(t_1) = \delta y_i\,(t_2) = 0$. Do đó phương trình (2-23) được viết lại sau khi thế (2-24) vào phương trình đó:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial y_i} - \frac{\partial U}{\partial y_i} + R_i\right]\delta y_i\right\} dt = 0 \qquad (2\text{-}25)$$

Vì tất cả các biến phân δy_i (i = 1, 2, ..., n) là tùy ý nên trong trường hợp tổng quát phương trình (2-25) sẽ thỏa mãn khi biểu thức trong ngoặc bằng không, nghĩa là:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} = R_i \qquad (2\text{-}26)$$

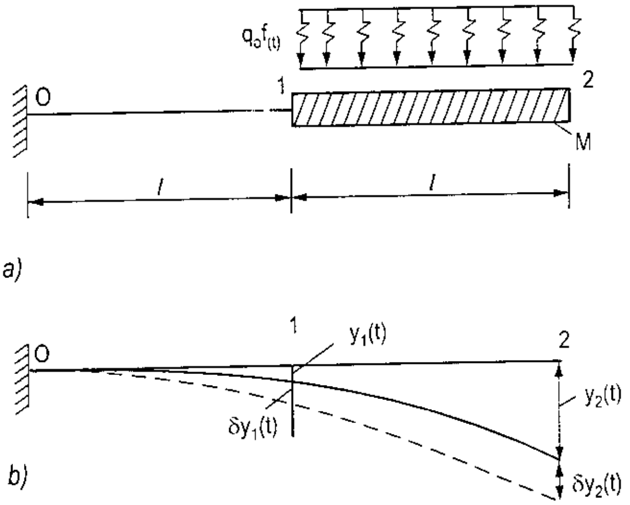
Phương trình (2-26) là phương trình chuyển động Lagrăng. Phương trình này là kết quả sử dụng trực tiếp nguyên lí biến phân động học Haminton, trong đó các thành phần mô tả biến phân hàm năng lượng và công của lực ngoài và lực giảm chấn được biểu thị qua các tọa độ tổng quát và các đạo hàm của chúng theo thời gian.

Phương trình Lagrăng được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, nó được áp dụng với tất cả các hệ tuyến tính và phi tuyến.

Thí dụ 2.1:

Xây dựng phương trình vi phân dao động của hệ cho ở hình 2.3. Hệ gồm một thanh cứng có khối lượng M, chiều dài *l*, thanh này được nối liền với một thanh không trọng lượng có độ dài *l* với đầu bị ngàm chặt. Khối lượng chịu tác dụng của tải trọng động phân bố đều có quy luật thay đổi theo thời gian f(t).

Ta xem chuyển vị theo phương đứng tại hai điểm đầu thanh cứng (điểm 1 và điểm 2) là các tọa độ tổng quát (chuyển vị $y_1(t)$ và $y_2(t)$).



Hình 2.3

Động năng toàn phần của thanh cứng (khối lượng M) bằng tổng động năng của chuyển vị thẳng và chuyển vị quay:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{y}_M^2(t) + \frac{1}{2} J_o \dot{\alpha}^2(t) \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

$$\dot{y}_M(t) = \left[\frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)\right], \qquad J_o = M \cdot \frac{l^2}{12} \text{ (là mô men quán tính của thanh cứng),}$$

$\dot{\alpha}\ (t) = \frac{1}{l}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$. Thay các biểu thức này vào (a) ta được:

$$T = \frac{1}{2} M \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ml^2}{12}\left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l}\right)^2 = \frac{M}{6}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 + \dot{y}_2^2) \qquad \text{(b)}$$

Ta coi các chuyển vị $y_1(t)$, $y_2(t)$ được tính từ vị trí cân bằng tĩnh ban đầu bằng không, vì thế thế năng chỉ được tính do năng lượng biến dạng tích lũy trong hệ. Có thể xác định thế năng từ ma trận cứng và các chuyển vị như sau:

Lực đàn hồi: $\{P_d\} = [K]\{Y\}$

Trong đó: $[K] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

Thế năng của hệ:

$$U = \frac{1}{2}\{Y\}^T\{P_d\} = \frac{1}{2}\{Y\}^T[K]\{Y\}$$

Hay:

$$U = \frac{1}{2}\{y_1, y_2\}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left(r_{11}y_1^2 + 2r_{12}y_1y_2 + r_{22}y_2^2\right) \qquad (c)$$

Tính biến phân δR:

$$\delta R = (q.f(t).l)\left(\frac{\delta y_1 + \delta y_2}{2}\right) = \frac{q.f_{(t)}.l}{2}(\delta y_1 + \delta y_2)$$

So sánh biểu thức này với (2-22c), ta được:

$$R_1(t) = R_2(t) = \frac{q.l}{2}f(t) \qquad (d)$$

Thế các biểu thức (b), (c), (d) vào phương trình Lagrăng (2-26) ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{M}{6}(2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + r_{11}y_1 + r_{12}y_{12} = \dfrac{ql}{2}\,f(t) \\ \dfrac{M}{6}(\ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2) + r_{12}y_1 + r_{22}y_{12} = \dfrac{ql}{2}\,f(t) \end{cases} \qquad (e)$$

2. Phương trình vi phân dao động tổng quát

Đối với các hệ kết cấu đàn hồi khi dao động, động năng và thế năng của hệ có thể biểu thị được ở dạng toàn phương, trong đó thế năng là dạng toàn phương của chuyển vị (ứng với các tọa độ tổng quát), động năng là dạng tòan phương của tốc độ:

$$U(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\,y_i(t)\,y_j\,(t)$$

$$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,\dot{y}_i(t)\,\dot{y}_j\,(t)$$

Để nhận được phương trình vi phân dao động hệ n bậc tự do dưới dạng ma trận từ phương trình Lagrăng ta biểu thị động năng và thế năng ở trên dưới dạng ma trận như sau:

$$U = \frac{1}{2}\{Y\}^T[K]\{Y\} \tag{2-27}$$

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{Y}\}^T[K]\{\dot{Y}\} \tag{2-28}$$

Với các hệ mà động năng có dạng toàn phương thì:

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Phương trình Lagrăng lúc này sẽ có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial y_i} = R_i \tag{2-29}$$

Thế (2-27) và (2-28) vào phương trình (2-29) ta được:

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{R(t)\} \tag{2-30}$$

Từ các phương trình (2-29) và (2-30) ta nhận thấy rằng: lực đàn hồi chính bằng đạo hàm của thế năng theo chuyển vị, còn lực quán tính bằng đạo hàm của động năng theo tốc độ lại đạo hàm tiếp theo thời gian.

Biến phân công phân tố của ngoại lực và lực giảm chấn: $\delta R = \sum_{i=1}^{n} R_i \delta y_i$, trong trường hợp tổng quát khi hệ chụ tác dụng của tải trọng động:

$$R_i = P_i - \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\dot{y}_j \tag{2-31}$$

Trong đó: C_{ij} là hệ số của ma trận tắt dần [C].

Thế biểu thức (2-31) vào phương trình (2-30) ta được:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [C]\{\dot{Y}_i\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \qquad (2\text{-}32))$$

Phương trình này hoàn toàn trùng với phương trình (2-12) nhận được bằng phương pháp cân bằng lực với việc sử dụng nguyên lí Đalambe.

§4. XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Trước hết ta xét dao động của hệ không tính đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình vi phân dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do khi không có lực cản nhận được từ phương trình (2-12), trong đó ma trận tắt dần và véc tơ tải trọng bằng không.

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y_i\} = \{0\} \tag{2-33}$$

Trong đó: {0} là véctơ không.

Tương tự như ở hệ một bậc tự do, dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do cũng được xem là dao động điều hòa đơn giản.

$$\{Y(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \gamma) \tag{2-34}$$

Trong đó: {A} - là véc tơ biểu thị biên độ dao động của hệ; ω - tần số dao động riêng; γ - Là độ lệch pha.

Việc phân tích dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do là việc xác định các điều kiện để phương trình (2-33) cho phép hệ tồn tại dao động. Từ điều kiện đó ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng của hệ.

Lấy đạo hàm bậc hai biểu thức (2-34) ta sẽ nhận được gia tốc dao động tự do.

$$\{\ddot{Y}(t)\} = -\omega^2\{A\}\sin(\omega t + \gamma) = -\omega^2\{Y(t)\} \tag{2-35}$$

Thế các biểu thức (2-34) và (2-35) vào (2-33) ta nhận được:

$$-\omega^2[M]\{A\}\sin(\omega t + \gamma) + [K]\{A\}\sin(\omega t + \gamma) = \{0\}$$

Suy ra:

$$\left([K] - \omega^2[M]\right)\{Y(t)\} = \{0\} \quad \text{hay} \quad \left([K] - \omega^2[M]\right)\{A\} = \{0\} \tag{2-36}$$

Để hệ tồn tại dao động {A} phải khác không.

Điều đó dẫn đến: Định thức chứa các hệ số của phương trình (2-36) phải bằng không; nghĩa là:

$$\left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0 \tag{2-37}$$

Phương trình (2-37) được gọi là phương trình tần số của hệ hữu hạn bậc tự do. Khai triển định thức (2-37) ta sẽ nhận được phương trình đại số bậc n đối với ω^2.

Giải phương trình này ta sẽ xác định được n nghiệm: $(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots \omega_n^2)$. Các giá trị nghiệm này biểu thị giá trị bình phương các tần số của n dạng dao động riêng. Véc tơ bao gồm tất cả *các tần số dao động riêng xếp theo thứ tự tăng dần* $(\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < .. < \omega_n)$ được gọi là véctơ tần số dao động riêng (và còn gọi là phổ tần số).

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \ldots \\ \omega_n \end{Bmatrix} \tag{2-38}$$

Tần số dao động riêng thấp ω_1 gọi là tần số cơ bản.

Có thể thấy thêm rằng: Tất cả các ma trận khối lượng và ma trận cứng của hệ kết cấu bất kì đều là các ma trận đối xứng và xác định dương. Vì vậy, tất cả các nghiệm của phương trình tần số đều là thực và dương.

Phương trình tần số có thể viết được dưới dạng ma trận mềm. Muốn vậy, ta nhân trái hai vế của (2-36) với ma trận $\frac{1}{\omega^2}[F]$ ta sẽ nhận được:

$$\left([F]\,[M]-\frac{1}{\omega^2}\,[E]\right)\{A\}=\{0\} \qquad (2\text{-}39)$$

Trong đó: [E] là ma trận đơn vị cấp n.

Phương trình tần số ứng với phương trình (2-39) sẽ là:

$$\left|[F]\,[M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right|=0 \qquad (2\text{-}40)$$

Các phương trình tần số 2-37) và (2-40) được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\begin{vmatrix} \left(r_{11}-\omega^2 m_1\right) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & \left(r_{22}-\omega^2 m_2\right) & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & \left(r_{nn}-\omega^2 m_n\right) \end{vmatrix}=0 \qquad (2\text{-}37)'$$

Và

$$\begin{vmatrix} \left(\delta_{11}-\frac{1}{\omega^2}\right) & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \left(\delta_{12}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right) & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & \left(\delta_{nn}m_n-\frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix}=0 \qquad (2\text{-}40')$$

§5. XÁC ĐỊNH DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Tương ứng với các giá trị tần số dao động riêng ω_i (i = 1, 2,...n) ta sẽ xác định các dạng dao động riêng $\{A_i\}$ (hoặc $\{Y_i\}$ từ phương trình (2-36) hoặc (2-39). Việc xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng đóng vai trò rất quan trọng trong bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

Để xác định các dạng dao động riêng, ta đưa vào ma trận $[B_i]$ ứng với tần số dao động riêng ω_i. Dạng dao động riêng ứng với tần số dao động riêng ω_i gọi là dạng dao động riêng thứ i, hay dạng chính thứ i.

$$[B_i] = \left([K] - \omega_i^2 [M]\right) \tag{2-41}$$

Hay:
$$[B_i] = \left([F]\,[M] - \frac{1}{\omega_i^2}[E]\right) \tag{2-41'}$$

Khi đó phương trình (2-36) viết ứng với tần số ω_i sẽ có dạng:

$$[B_i]\{Y_i(t)\} = \{0\} \qquad \text{hay } [B_i]\{A_i\} = \{0\} \tag{2-42}$$

Muốn xác định các dạng dao động riêng, ta không nhất thiết phải tìm trực tiếp các giá trị biên độ của các khối lượng, mà ta chỉ cần tìm tỉ số biên độ của các khối lượng so với biên độ của một khối lượng nào đó, thường là so với biên độ của khối lượng thứ nhất. Tỉ số đó ta gọi là φ.

$$\varphi_{ki} = \frac{A_{ki}}{A_{1i}} \tag{2-43}$$

Đương nhiên ta dễ thấy $\varphi_{1i} = 1$.

Như vậy, dạng dao động riêng thứ i chính là véctơ có các phần tử là các tỉ số φ_{ki} đó:

$$\{\varphi_i\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi_{2i} \\ \varphi_{3i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix} \tag{2-44}$$

Để tìm các dao động riêng, ta chia hai vế của phương trình (2-42) cho hệ số A_{1i} ta có:

$$\frac{1}{A_{1i}} \begin{bmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \dots & b_{1n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & b_{23}^{(i)} & b_{2n}^{(i)} \\ b_{31}^{(i)} & b_{32}^{(i)} & b_{33}^{(i)} & b_{3n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^{(i)} & b_{n2}^{(i)} & b_{n3}^{(i)} & b_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1i} \\ \dots \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ \dots \\ A_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Hay:
$$\begin{bmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \dots & b_{1n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & b_{23}^{(i)} & b_{2n}^{(i)} \\ b_{31}^{(i)} & b_{32}^{(i)} & b_{33}^{(i)} & b_{3n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^{(i)} & b_{n2}^{(i)} & b_{n3}^{(i)} & b_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \dots \\ \varphi_{2i} \\ \varphi_{3i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2-45}$$

Trừ phương trình đầu tiên của (2-45), ta *giải hệ (n-1) phương trình sau: ta sẽ được dạng dao động riêng thứ i:*

$$\left\{\varphi_i^*\right\} = -\left[B_{11}^i\right]^{-1}\left\{B_1^i\right\} \tag{2-46}$$

Trong đó:

$$\left\{\varphi_i^*\right\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{2i} \\ \varphi_{3i} \\ \ldots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix} \tag{2-47}$$

$\left[B_{11}^{(i)}\right]$ là ma trận $[B^{(i)}]$ bỏ đi hàng một cột một.

$$\left[B_{11}^{(i)}\right] = \begin{bmatrix} b_{22}^{(i)} & b_{23}^{(i)} & \ldots & b_{2n}^{(i)} \\ b_{32}^{(i)} & b_{33}^{(i)} & \ldots & b_{3n}^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n2}^{(i)} & b_{n3}^{(i)} & \ldots & b_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{2-48}$$

$\left\{B_{11}^{(i)}\right\}$ là cột thứ nhất của ma trận $[B_{(i)}]$ bỏ đi phần tử đầu tiên.

$$\left\{B_1^{(i)}\right\} = \begin{Bmatrix} b_{21}^{(i)} \\ b_{31}^{(i)} \\ \ldots \\ b_{n1}^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{2-49}$$

Lúc này:

$$\left\{\varphi_i\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi_i^* \end{Bmatrix} \tag{2-50}$$

Ma trận vuông biểu thị tất cả các dạng dao động riêng gọi là ma trận các dạng chính, kí hiệu là $[\Phi]$.

$$[\Phi] = \left[\{\varphi_1\}\ \{\varphi_2\}\ \{\varphi_3\} \ldots \{\varphi_n\}\right] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \ldots & \varphi_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \tag{2-51}$$

Các chỉ số của φ_{ki} gồm chỉ số thứ nhất là chỉ số k chỉ khối lượng, và chỉ số thứ hai là chỉ số i chỉ tần số hay chỉ dạng dao động riêng. Các đại lượng của các tác dụng ngoài có hai chỉ số sau này cũng được chỉ như vậy.

Ở dạng giải tích, hệ (n-1) phương trình sau của hệ phương trình (2-45) để xác định dạng dao động riêng được viết như sau:

$$\left.\begin{array}{l} r_{21}+(r_{22}-\omega^2 m_2)\varphi_2+r_{23}\varphi_3+\ldots+r_{2n}\varphi_n=0 \\ r_{31}+r_{32}\varphi_2+(r_{33}-\omega^2 m_3)\varphi_3+\ldots+r_{3n}\varphi_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}+r_{n2}\varphi_2+r_{n3}\varphi_3+\ldots+(r_{nn}-\omega^2 m_n)\varphi_n=0 \end{array}\right\}$$

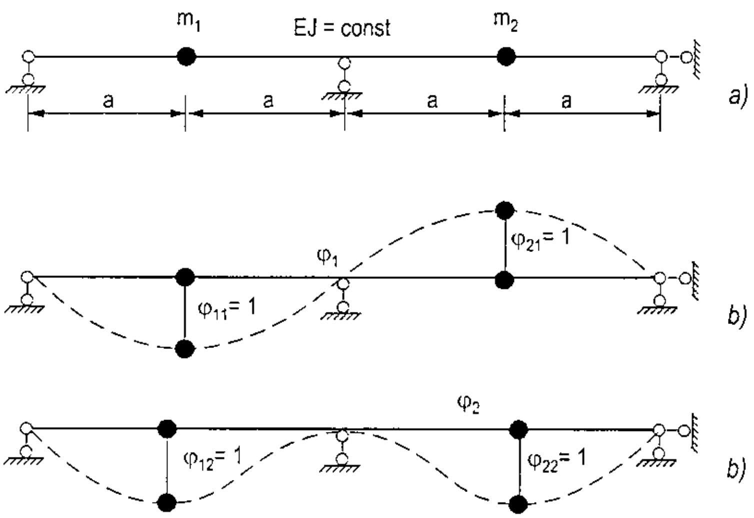
Hoặc:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{21}m_1+\left(\delta_{22}m_2-\dfrac{1}{\omega^2}\right)\varphi_2+\delta_{23}m_3\varphi_3+\ldots+\delta_{2n}m_n\varphi_n=0 \\ \delta_{31}m_1+\delta_{32}m_2\varphi_2+\left(\delta_{33}m_3-\dfrac{1}{\omega^2}\right)\varphi_3+\ldots+\delta_{3n}m_n\varphi_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}m_1+\delta_{n2}m_2\varphi_2+\delta_{n3}m_3\varphi_3+\ldots+\left(\delta_{nn}m_n-\dfrac{1}{\omega^2}\right)\varphi_n=0 \end{array}\right\}$$

Cần thấy rằng: Vấn đề xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động hệ hữu hạn tự do tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và véc tơ riêng của đại số tuyến tính. Giá trị bình phương tần số tương ứng các giá trị riêng, còn các dao động riêng sẽ tương ứng với các véc tơ riêng. Tuy nhiên, các tính chất của các dạng dao động riêng và các véc tơ riêng sẽ được xem xét cụ thể ở phần sau.

Thí dụ 2.2:

Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của dầm liên tục hai nhịp có hai khối lượng tập trung. Cho $m_1 = m_2 = M$, $a = \dfrac{l}{2}$ (hình 2.4a).



Hình 2.4

Hệ này có hai bậc tự do, ma trận khối lượng của hệ:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận mềm: $[F]=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$ Các chuyển vị đơn vị được xác định theo cách tính ở phần tĩnh học, ở đây chỉ được ra kết quả:

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{23}{1536}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{-3}{512}\frac{l^3}{EJ}$$

Do đó:

$$[F]=\frac{23l^3}{1536\,EJ}\begin{bmatrix} 1 & \left(-\frac{9}{23}\right) \\ \left(-\frac{9}{23}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số viết theo dạng: (2-40)

$$\left|[F][M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right|=\frac{23l^3}{1536\ EJ}\begin{vmatrix} (1-u) & -\frac{9}{23} \\ -\frac{9}{23} & (1-u) \end{vmatrix}=0$$

Trong đó: $u=\dfrac{1536\ EJ}{23\,Ml^3\omega^2}$

Khai triển định thức ta có phương trình tần số:

$$(u-1)^2-\left(\frac{9}{23}\right)^2=0$$

Giải phương trình này dễ ràng nhận được nghiệm:

$$u_1=\frac{32}{23}, \qquad u_2=\frac{14}{23}$$

Ứng với u_1 ta có ω_1 bằng:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1536\ EJ}{23\,Ml^3u_1}}=\sqrt{\frac{48EJ}{M.l^3}}=6,9282\sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}$$

Ứng với u_2 ta có:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1536\,EJ}{23\,Ml^3u_2}} = \sqrt{\frac{768EJ}{7Ml^3}} = 10,4745\sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}$$

Các dạng dao động riêng được tính theo công thức (2-46)

$$\{\varphi_i^*\} = -\left[B_{11}\right]^{-1}\{B_1\} = -\frac{1}{(1-u)}\cdot\frac{-9}{23}$$

Thay u_1 vào biểu thức này ta được: $\varphi_1^* = -1$, do đó dạng dao động riêng thứ nhất là:

$\{\varphi_1\} = \begin{Bmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$ ta thấy dạng dao động riêng thứ nhất có dạng phản đối xứng (hình 2.4b).

Thay u_2 vào biểu thức xác định dạng dao động riêng ở trên, ta được: $\varphi_2^* = 1$ do đó dạng dao động riêng thứ hai là:

$\{\varphi_2\} = \begin{Bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$ Dạng dao động riêng này là dạng đối xứng (hình 2.4c).

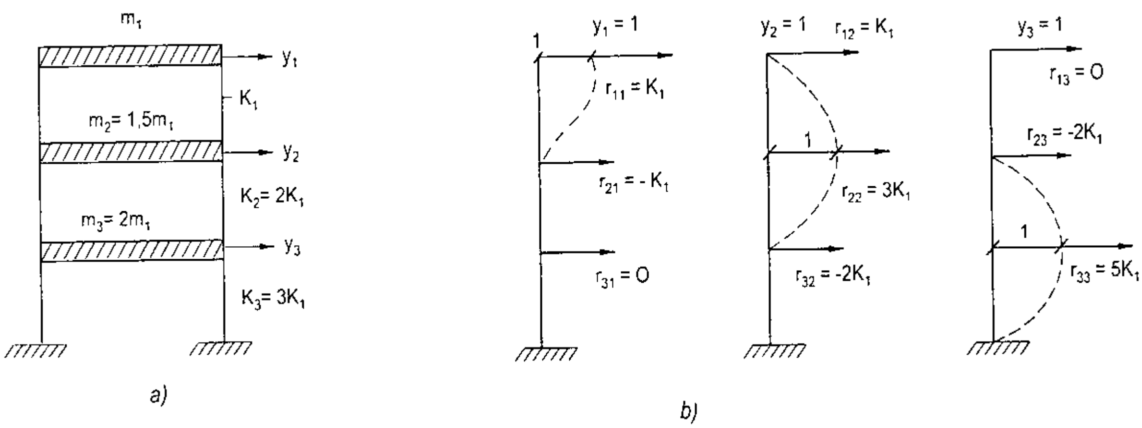
Vậy ma trận dạng dao động riêng và véctơ tần số được viết như sau:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix}6,9282\\ 10,4745\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}} \quad , \quad [\Phi] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Thí dụ 2.3:

Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của hệ khung ba tầng cho ở hình 2.5a.

Khối lượng của hệ được xem như các khối lượng tập trung ở các thanh ngang và thanh ngang có độ cứng bằng vô cùng. Các thanh đứng xem như không có trọng lượng. Độ cứng của các thanh đứng của mỗi tầng cho trên hình vẽ và cho $m_1 = 1,78$. kN.s^2/cm, $K_1 = 1070$. kN/cm.



Hình 2.5

Hệ này có ba bậc tự do ứng với ba chuyển vị theo phương ngang ở mỗi tầng. Ma trận độ cứng được xác định bằng việc cho các chuyển vị bằng đơn vị ở mỗi tầng và xác định các phản lực đàn hồi như trên hình 2.5b. Vì các thanh ngang của khung có độ cứng bằng vô cùng nên các phần tử của ma trận cứng được xác định bằng tổng độ cứng tương ứng của các tầng, ta có:

$$[K]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} 1070 \;\; \text{kN/cm}$$

Ma trận khối lượng của hệ:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} 1,78 \;\text{kN.s}^2/\text{cm}$$

Viết phương trình tần số ở dạng ma trận cứng (2-37)

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=\begin{vmatrix} (1-u) & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & (3-1,5u) & -2 \\ 0 & -2 & (5-2u) \end{vmatrix} 1070=0;$$

Trong đó: $\quad u=\dfrac{1,78\,\omega^2}{1070}$

Khai triển định thức ta nhận được phương trình bậc 3:

$$u^3 - 5,5u^2 + 7,5 - 2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này: $u_1 = 0,351$; $u_2 = 1,61$; $u_3 = 3,54$.

Từ đó ta có phổ tần số dao động riêng của hệ:

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{Bmatrix}\left(\frac{1}{s}\right)$$

Các dạng chính dao động được xác định theo (2-46)

$$\{\varphi_i^*\}=-\left[B_{11}^{-1}\right]\{B_1\}=\frac{-1}{(3-1,5u)(5-2u)-4}\begin{bmatrix} (5-2u) & 2 \\ 2 & (3-1,5u) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Với $u_1 = 0,351$ ta có:

$$\{\varphi_1^*\}=\frac{-1}{(3-1,5.0,351)(5-2.0,351)-4}\begin{bmatrix} -(5-2.0,351) \\ -2 \end{bmatrix}=\frac{1}{6,6311}\begin{bmatrix} 4,298 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,648 \\ 0,302 \end{bmatrix}$$

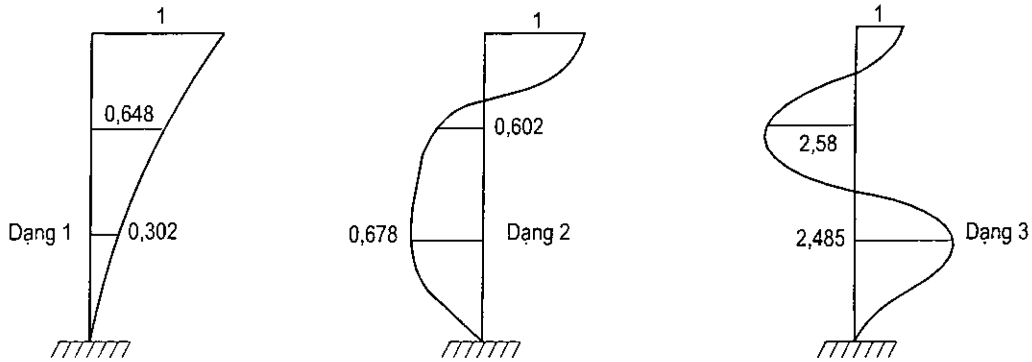
Tương tự ta xác định được $\{\varphi_2^*\}$ ứng với u_2, $\{\varphi_3^*\}$ ứng với u_3;

$$\{\varphi_2^*\} = \begin{bmatrix} -0,602 \\ -0,678 \end{bmatrix}, \quad \{\varphi_3^*\}\begin{bmatrix} -2,58 \\ 2,485 \end{bmatrix}$$

Ma trận các dạng chính dao động của hệ:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,648 & -0,602 & -2,58 \\ 0,302 & -0,678 & 2,485 \end{bmatrix}$$

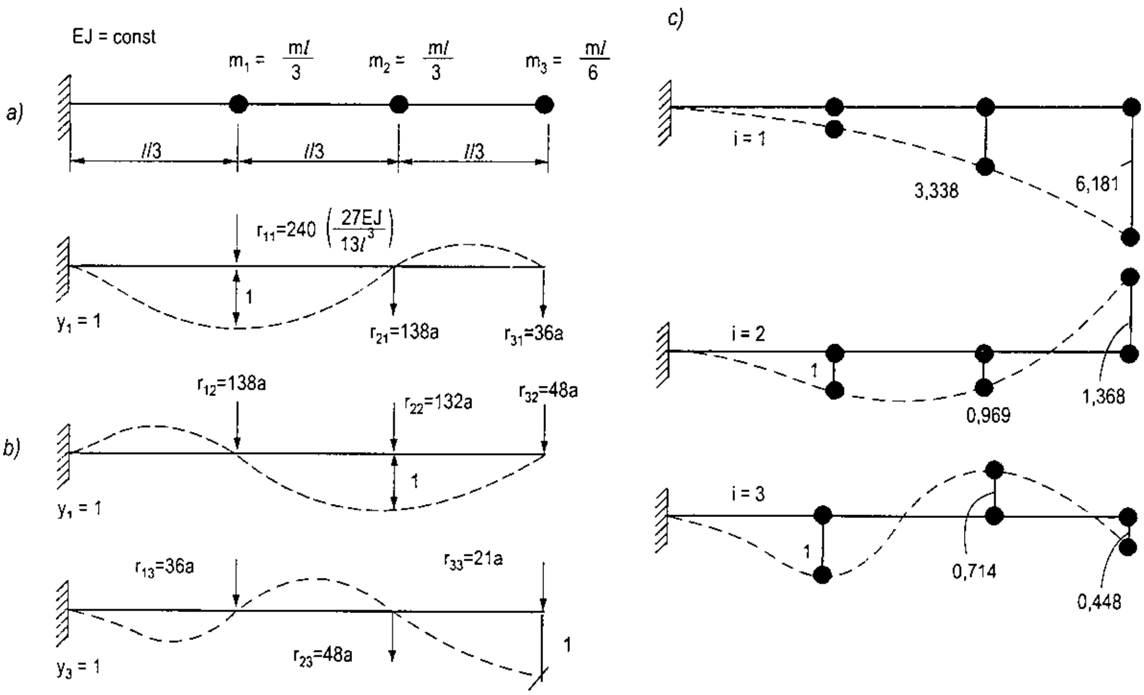
Các dạng dao động riêng được vẽ trên hình 2.6.



Hình 2.6

Thí dụ 2.4:

Xác định tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ cho ở hình 2.7.



Hình 2.7

Hệ này có ba bậc tự do ứng với ba chuyển vị theo phương đứng tại các khối lượng. Ma trận khối lượng của hệ:

$$[M]=\frac{ml}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Để xác định ma trận cứng, ta cho hệ chịu các chuyển vị đơn vị tại các khối lượng theo phương của bậc tự do và xác định các phản lực đàn hồi tại các khối lượng. Các phần tử của ma trận cứng tương ứng với các trạng thái chuyển vị đơn vị trên hình 2.7b.

Ta được:

$$[K]=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}240 & -138 & 36\\ 138 & 132 & -48\\ 36 & -48 & 21\end{bmatrix},$$

Trong đó:

$$a=\frac{27\ EJ}{13\ l^3}$$

Phương trình tần số được viết dưới dạng ma trận cứng (2-37) như sau:

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=a\begin{vmatrix}(240-u) & -138 & 36\\ -138 & (132-4) & -48\\ 36 & -48 & (21-0,5u)\end{vmatrix}=0$$

Với: $$u=\frac{13ml^4\omega^2}{81\ EJ}$$

Khai triển định thức trên ta nhận được phương trình.

$$-u^3+414u^2-21060u+3604=0$$

Giải phương trình này ta có các nghiệm sau:

$$u_1=1,7965;\quad u_2=57,269;\quad u_3=355$$

Do đó, véc tơ tần số dao động riêng của hệ sẽ là:

$$\{\omega\}\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3,346\\ 18,89\\ 47,031\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Để xác định các dạng dao động riêng ta sử dụng công thức (2-46)

$$\{\varphi_i^*\} = -[B_{11}]^{-1}\{B_1\} = -\begin{bmatrix}(132-u) & 48\\ -48 & (21-0,5u)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-138\\ 36\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(132-u)\,(21-0,5u)-48^2}\begin{bmatrix}(21-0,5u) & 48\\ 48 & (132-u)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-138\\ 36\end{Bmatrix}$$

Thay các giá trị u_1, u_2, u_3 ở trên vào ta được:

$$\{\varphi_1^*\} = \begin{Bmatrix}\varphi_{21}\\ \varphi_{31}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}3,338\\ 6,181\end{Bmatrix};\ \{\varphi_2^*\} = \begin{Bmatrix}0,969\\ -1,368\end{Bmatrix};\quad \{\varphi_3^*\} = \begin{Bmatrix}-0,714\\ 0,448\end{Bmatrix}$$

Ma trận các dạng dao động riêng của hệ:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3,338 & 0,969 & -0,714\\ 6,181 & -1,368 & 0,448\end{bmatrix}$$

Các dạng dao động riêng được mô tả trên hình 2.7c.

§6. TÍNH CHẤT TRỰC GIAO CỦA CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Các dạng dao động riêng của hệ hữu hạn bậc tự do có một tính chất đặc biệt, đó là tính chất trực giao. Tính chất này đóng vai trò rất quan trọng trong việc giải quyết các bài toán dao động cưỡng bức cũng như dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do. Biểu thức của tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng được tìm trên cơ sở áp dụng nguyên lí công tương hỗ Betti đối với các dạng dao động riêng.

Phương trình vi phân chuyển động (2-33) đối với các dao động tự do có thể được viết ở dạng (2-36).

$$[K]\{y(t)\} = \omega_i^2[M]\{y_i(t)\} \tag{2-52}$$

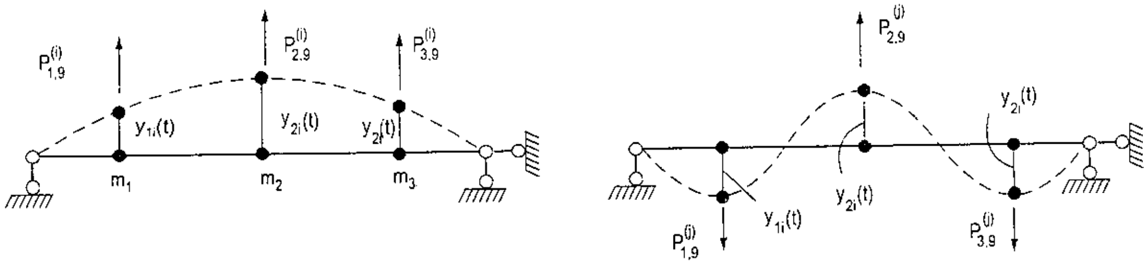
Trong đó: vế trái biểu thị véctơ của lực đài hồi $\{P_d(t)\}$, còn vế vế phải biểu thị véctơ của lực quán tính $\{P_q(t)\}$. Như vậy khi dao động tự do, các dạng dao động riêng được xem như sự thay đổi của độ võng do các lực quán tính, (các lực quán tính đóng vai trò như tải trọng ngoài) gây ra. Ta xét hai dạng dao động riêng thứ "i" và thứ "j" trên hình 2.8.

Áp dụng nguyên lí Betti cho hai trạng thái biên dạng ứng với hai dạng chính thứ "i" và "j" ta sẽ có:

$$\{y_j(t)\}^T\{P_{qi}(t)\} = \{y_i(t)\}^T\{P_{qj}(t)\} \tag{2-53}$$

Sau khi thay $\{Y(t)\}$ theo (2-34) và $\{P_q(t)\} = -\,\omega^2[M]\,\{Y(t)\}$ vào biểu thức trên rồi đơn giản các hàm tuần hoàn theo thời gian ta được:

$$\omega_i^2 \{A_j\}^T [M]\{A_i\} = \omega_j^2 \{A_i\}^T [M]\{A_j\} \tag{2-54}$$



Hình 2.8

Ta thấy rằng: tích các ma trận ở phương trình (2-54) là đại lượng vô hướng, vì vậy sau khi chuyển vị trí các ma trận ở một vế rồi thực hiện phép chuyển vế, ta sẽ được:

$$\left(\omega_j^2 - \omega_i^2\right)\{A_i\}^T [M]\{A_j\} = 0 \tag{2-55}$$

Vì các tần số dao động riêng có giá trị khác nhau $\omega_i \neq \omega_j$ nên ta có thể viết biểu thức trên:

$$\{A_i\}^T [M]\{A_j\} = 0 \tag{2-56}$$

Biểu thức (2-56) biểu thị tính chất trực giao của các dạng chính dao động. Biểu thức *tính chất trực giao còn có thể viết được qua ma trận cứng [K]*, muốn vậy ta nhân trái hai vế của phương trình (2-52) với ma trận $\{Y_j\}^T(t)$, sau khi bỏ đi các hàm thời gian ở hai vế ta được:

$$\{A_j\}^T [K]\{A_i\} = \omega_i^2 \{A_j\}^T [M]\{A_i\}$$

Vế phải của biểu thức này theo (2-56) bằng không, do đó ta có:

$$\{A_j\}[K]\{A_i\} = 0 \tag{2-57}$$

Trong trường hợp tổng quát biểu thức tính chất trực giao của các dạng chính dao động được viết với các véc tơ dạng dao động *không thứ nguyên* $\{\varphi_i\}$, $\{\varphi_j\}$. Muốn vậy ta chia các biểu thức (2-56) cho các biên độ chuyển vị của một khối lượng nào đó ứng với dạng "i" và "j" ta được:

$$\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_j\} = 0 \tag{2-58}$$

Ở dạng giải tích, biểu thức tính chất trực giao viết theo ma trận khối lượng như sau:

$$\sum_{k=1}^{n} (m_{k1}\varphi_{1j} + m_{k2}\varphi_{2j} + ... + m_{kn}\varphi_{nj})\, \varphi_{ki} = 0 \tag{2-58'}$$

Biểu thức tính chất trực giao viết theo ma trận cứng đối với các dạng dao động không thứ nguyên.

$$\{\varphi_i\}^T [K]\{\varphi_j\} = 0 \tag{2-59}$$

Qua các biểu thức (2-58), (2-59) ta thấy rằng: các dạng dao động riêng $\{\varphi_i\}$, $\{\varphi_j\}$ $(i \neq j)$ trực giao với nhau qua ma trận khối lượng [M] và ma trận cứng [K], hay nói cách khác là: các dạng dao động riêng trực giao nhau với trọng số [K] hoặc [M].

Ta còn có thể biểu thị tính chất trực giao của các dạng giao động riêng với trọng số là tích không hạn chế các ma trận tạo nên từ ma trận [K] và ma trận [M]. Chia hai vế của phương trình (2-52) cho một biên độ nào đó (bỏ hàm thời gian đi) ta có:

$$[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2[M]\{\varphi_i\} \tag{2-60}$$

Nhân trái hai vế phương trình này với $\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}$, ta được:

$$\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2.58) suy ra

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\} = 0 \tag{2-61}$$

Lại nhân trái phương trình (2-60) với $\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}$ sẽ được:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M].\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2-61) ta có:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}[M]\{\varphi_i\} = 0 \tag{2-62}$$

Tương tự nếu ta nhân trái phương trình (2-60) với $\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}$ sẽ được:

$$\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2-59) sẽ cho:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = 0 \tag{2-63}$$

Phép nhân trái phương trình (2-60) với $\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}[K][M]^{-1}$ sẽ cho:

$$\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_j\}^T[K][M]^{-1}[K]\{\varphi_i\}$$

Sử dụng (2-63) ta có:

$$\{\varphi_j\}^T[M][K]^{-1}[M][K]^{-1}[K]\{\varphi_i\} = 0 \tag{2-64}$$

Các quan hệ trên có thể lặp lại mà vẫn các thuật toán tương tự.

Các biểu thức tính chất trực giao ở trên và kể cả (2-58) và (2-59) có thể viết gọn lại ở dạng sau:

$$\{\varphi_i\}[M]\left[M^{-1}K\right]^b\{\varphi_j\}=0,\ -\infty<b<\infty \tag{2-65}$$

Ở biểu thức (2-65) nếu lấy b = 0, và b =1 ta sẽ nhận được (2-58) và (2-59).

§7. CHUẨN HOÁ CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Ta viết lại các phương trình (2-55) ở dạng sau:

$$\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\}=0$$

Nếu $\omega_j=\omega_i(i=j)$ thì phương trình trên chỉ thoả mãn khi $\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}\neq 0$ ta có thể chọn $\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}=1$.

Dạng dao động riêng thoả mãn biểu thức trên được gọi là dạng chuẩn, kí hiệu là $\{\varphi_{ch}\}$. Ta viết lại:

$$\{\varphi_i\}_{ch}^T[M]\{\varphi_i\}_{ch}=1 \tag{2-66}$$

Việc đưa các dạng dao động riêng về dạng chuẩn gọi là chuẩn hoá các dạng dao động riêng. Để xác định dạng chuẩn, ta đặt:

$$\{\varphi_i\}_{ch}=b_i\{\varphi_i\} \tag{2-67}$$

Đưa (2-67) vào (2-66) ta được: $b_i^2\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}=1$

Suy ra
$$b_i^2=\frac{1}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}$$

Nếu đặt:
$$a_i^2=\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\} \tag{2-68}$$

Thì: $b_i=\dfrac{1}{a_i}$, và do đó ở (2-67):

$$\{\varphi_i\}_{ch}=\frac{1}{a_i}\{\varphi_i\} \tag{2-69}$$

Khi tất cả các dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá, thì từ (2-66) ta sẽ viết được điều kiện trực chuẩn ở dạng tổng quát sau:

$$\left[\Phi_{ch}^T\right][M][\Phi_{ch}]=[E] \tag{2-70}$$

Điều kiện trực chuẩn tổng quát còn viết được với ma trận cứng như sau: nhân trái phương trình (2-60) với $\{\varphi_i\}^T$ ta được:

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\}=\omega_i^2\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}$$

Khi dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá thì biểu thức trên có dạng:

$$\{\varphi_i\}_{ch}^T[K]\{\varphi_i\}_{ch} = \omega_i^2 \tag{2-71}$$

Biểu thức (2-71) viết đối với tất cả các dạng chuẩn:

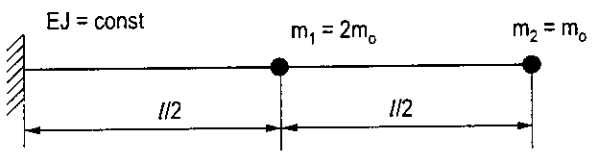
$$[\Phi_{ch}]^T[K][\Phi_{ch}] = [\Omega] \tag{2-72}$$

Trong đó: $[\Omega] = \text{diag}\left(\omega_i^2\right) = \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

Điều kiện trực chuẩn tổng quát (2-70), (2-72) có ý nghĩa quan trọng trong việc rút gọn quá trình tính toán dao động của hệ sau này:

Thí dụ 2.5:

Cho hệ ở hình (2-9). Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng, kiểm tra điều kiện trực giao các dạng giao động riêng. Chuẩn hoá các dạng dao động riêng và kiểm tra điều kiện trực chuẩn. Cho $m_o = \dfrac{ml}{4}$.



Hình 2.9

Hệ này có hai bậc tự do, ma trận khối lượng của hệ:

$$[M] = m_o\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{ml}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận mềm:

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EJ}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} = f_o\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

Xác định tần số dao động riêng theo phương trình (2-40):

$$\left|[F][M] - \frac{1}{\omega^2}[E]\right| = \begin{vmatrix} (4a-u) & 5a \\ 10a & (16-u) \end{vmatrix} = 0\text{, trong đó: } a = \frac{ml^4}{192EJ}\text{ , } u = \frac{1}{\omega^2}$$

Khai triển định thức ta nhận được phương trình:

$$u^2 - 20a\,.\,u + 14a^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này: $u_1 = 19,27362a$; $u_2 = 0,72638a$.

Do đó:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,156 \\ 16,258 \end{Bmatrix} \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Xác định các dạng dao động riêng theo (2-46)

$\{\varphi_i^*\} = -[B_{11}]^{-1}\{B_1\} = -\dfrac{10a}{16a - u_i}$. Thay u_1 và u_2 ở trên vào ta được:

$$\{\varphi_1^*\} = 3,054722$$

$\{\varphi_2^*\} = -0,6547236$,   Vậy $[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3,054722 & -0,6547236 \end{bmatrix}$

Ta kiểm tra điều kiện trực giao (2-58):

$$\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_2\} = \{1 \quad 3,054722\}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -0,6547236 \end{Bmatrix} =$$

$$= \{1 \;\; 3,054722\}\begin{Bmatrix} 2 \\ -0,654722 \end{Bmatrix} = 2 - 3,054722.0,6547236 = 0,15.10^{-5} = 0$$

Như vậy điều kiện trực giao thoả mãn. Để chuẩn hoá các dạng dao động riêng, ta tính các hệ số a_i theo (2-68):

$$a_1^2 = \{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\} = \{13,054722\}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m_o \begin{Bmatrix} 1 \\ 3,054722 \end{Bmatrix} = 11,331326 m_o$$

Do đó: $a_1 = 3,3662.\sqrt{m_o}$

$$a_2^2 = \{\varphi_2\}^T[M]\{\varphi_2\} = \{1 \quad -0,6547236\}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m_o \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,6547236 \end{Bmatrix} = 2,4286629\, m_o$$

Do đó: $a_2 = 1,5584167\sqrt{m_o}$.

Dạng chuẩn được xác định từ (2-69):

$$\{\varphi_1\}_{ch} = \frac{1}{3,3662.\sqrt{m_o}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3,054722 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2970705 \\ 0,907468 \end{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_0}}$$

$$\{\varphi_2\}_{ch} = \frac{1}{\sqrt{m_o}.1,5584167}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,657236 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6416769 \\ -0,420121 \end{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_0}}$$

Ma trận dạng chuẩn:

$$[\Phi_{ch}] = \begin{bmatrix} 0,2970705 & 0,6416769 \\ 0,907469 & -0,420121 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_o}}$$

Ta kiểm tra điều kiện trực chuẩn (2-70).

$$\left[\Phi_{ch}^{T}\right][M][\Phi_{ch}] = \frac{1}{\sqrt{m_o}}\begin{bmatrix}0,2970705 & 0,907468\\ 0,6416769 & -0,420121\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} m_o \begin{bmatrix}0,2970705 & 0,6416769\\ 0,907468 & -0,42012\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_o}}$$

$$[\Phi_{ch}] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [E]$$

Như vậy điều kiện trực chuẩn thoả mãn.

§8. DAO ĐỘNG TỰ DO HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Phương trình vi phân dao động tự do như đã biết (2-33):

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{o\} \qquad (2\text{-}73)$$

Nghiệm riêng thứ i ứng với dạng dao động thứ i viết theo (2-34):

$$\{y_i(t)\} = \{A_i\}\sin(\omega_i t + \gamma_i), i = 1, 2, \dots n \qquad (2\text{-}74)$$

Trong đó $\{A_i\}$ và γ_i được xác định từ điều kiện ban đầu của hệ (các tốc độ ban đầu và các chuyển vị ban đầu). Tương tự như đối với dao động tự do của hệ 1 bậc tự do ở dao động của hệ hữu hạn bậc tự do, nghiệm (2-74) cũng còn viết được ở dạng (1.45):

$$\{y_i(t)\} = \{B_i\}.\cos\omega_i t + \{C_i\}.\sin\omega_i t \qquad (2\text{-}74)'$$

Véc tơ vận tốc:

$$\{\dot{y}_i(t)\} = -\omega_i\{B_i\}.\sin\omega_i t + \omega_i\{C_i\}\cos\omega_i t$$

Các điều kiện ban đầu: $\{y_i\}_{t=o} = \{y_i^o\}$

$$\{\dot{y}_i\}_{t=o} = \{v_i^o\}$$

Thế các điều kiện này vào phương trình chuyển vị và phương trình vận tốc ở trên, ta sẽ nhận được:

$$\{B_i\} = \{y_i^o\}$$

$$\{C_i\} = \frac{\{v_i^o\}}{\omega_i}$$

Do đó: $$\{y_i(t)\} = \{y_i^o\}\cos\omega_i t + \{v_i^o\}\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i} \qquad (2\text{-}75)$$

Trong đó $\{y_i^o\}$, $\{v_i^o\}$ là véc tơ chuyển bị ban đầu, và véctơ tốc độ ban đầu tác dụng vào hệ gây nên dao động tự do của hệ ứng với dạng chính thứ i: $\{y_i(t)\}$. Nói cách khác, chúng là các véc tơ do các véc tơ chuyển vị ban đầu và tốc độ ban đầu của hệ được khai triển vào dạng chính thứ i. Tổng của các véc tơ này chính bằng véc tơ chuyển vị ban đầu và véc tơ tốc độ ban đầu của hệ.

$$\{y_o\} = \{y_1^o\} + \{y_2^o\} + ... + \{y_i^o\} + ... + \{y_n^o\} \qquad (2\text{-}76)$$

$$\{v_o\} = \{v_1^o\} + \{v_2^o\} + ... + \{v_i^o\} + ... + \{v_n^o\}$$

Để xác định $\{y_i^o\}$, ta đặt:

$$\{y_i^o\} = \alpha_i [M]\{\varphi_i\} \qquad (2\text{-}77)$$

Đưa (2-77) vào (2-76):

$$\{y_o\} = \alpha_1 [M]\{\varphi_1\} + \alpha_2 [M]\{\varphi_2\} + ... + \alpha_i [M]\{\varphi_i\} + ... + \alpha_n [M]\{\varphi_n\} \qquad (2\text{-}78)$$

Nhân trái 2 vế của phương trình (2-78) với $\{\varphi_i\}^T$, ta có:

$$\{\varphi_i\}^T \{y_o\} = \alpha_1 \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_1\} + ... + \alpha_i \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\} + ... + \alpha_n \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_n\}$$

Sử dụng tính chất trực giao (2-58) đối với vế phải của phương trình trên, ta được:

$$\{\varphi_i\}^T \{y_o\} = \alpha_i \{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}$$

Từ biểu thức này, ta rút ra:

$$\alpha_i = \frac{\{\varphi_i\}^T \{y_o\}}{\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}} \qquad (2\text{-}79)$$

Đưa (2-79) vào (2-77), ta được:

$$\{y_i^o\} = \frac{\{\varphi_i\}^T \{y_o\}}{\{\varphi_i\}^T [M][\varphi_i]}[M]\{\varphi_i\} \qquad (2\text{-}80)$$

Với cả hệ (i = 1,2...n) ta có ma trận khai triển chuyển vị ban đầu:

$$\left[Y_{kh}^o\right] = \left[\{y_1^o\},\{y_2^o\},...\{y_n^o\}\right] = \begin{bmatrix} y_{11}^o & y_{12}^o & .... & y_{1n}^o \\ y_{21}^o & y_{22}^o & .... & y_{2n}^o \\ y_{n1}^o & y_{n2}^o & .... & y_{nn}^o \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}81)$$

Từ (2-76) ta có điều kiện kiểm tra theo hàng sau:

$$y_K^o = \sum_{i=1}^{n} y_{Ki}^o = \left(y_{K1}^o + y_{K2}^o + ... + y_{Kn}^o\right), \quad K = 1, 2, ...n \qquad (2\text{-}82)$$

Tương tự như quá trình trên, ta cũng nhận được véc tơ tốc độ ban đầu khai triển vào dạng dao động riêng thứ i như sau:

$$\left\{v_i^o\right\} = \frac{\left\{\varphi_i\right\}^T \left\{v_o\right\}}{\left\{\varphi_i\right\}^T \left[M\right]\left\{\varphi_i\right\}} \cdot \left[M\right] \left\{\varphi_i\right\} \tag{2-83}$$

Ma trận khai triển tốc độ ban đầu đối với cả hệ:

$$\left[V_{kh}^o\right] = \left[\left\{v_1^o\right\}, \left\{v_2^o\right\}, \dots \left\{v_n^o\right\}\right] = \begin{bmatrix} v_{11}^o & v_{12}^o & \dots & v_{1n}^o \\ v_{21}^o & v_{22}^o & \dots & v_{2n}^o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}^o & v_{n2}^o & \dots & v_{nn}^o \end{bmatrix} \tag{2-84}$$

Công thức kiểm tra theo hàng:

$$v_K^o = \sum_{i=1}^{n} v_{Ki}^o = \left(v_{K1}^o + v_{K2}^o + \dots + y_{Kn}^o\right) \tag{2-85}$$

Cuối cùng ta có phương trình dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do viết ở dạng (2-75) như sau:

$$\left\{y(t)\right\} = \left[Y_{kh}^o\right]\left\{K_{yo}(t)\right\} + \left[V_{kh}^o\right]\left\{K_{vo}(t)\right\} \tag{2-86}$$

Trong đó: $\left[Y_{kh}^o\right]$ và $\left[V_{kh}^o\right]$ được xác định theo (2-81) và (2-84), còn các véc tơ $\left\{K_{yo}(t)\right\}$ và $\left\{K_{vo}(t)\right\}$ là:

$$\left\{K_{yo}(t)\right\} = \begin{Bmatrix} \cos\omega_1 t \\ \cos\omega_2 t \\ \dots\dots \\ \cos\omega_n t \end{Bmatrix} \tag{2-87}$$

$$\left\{K_{vo}(t)\right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} \\ \dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \end{Bmatrix} \tag{2-88}$$

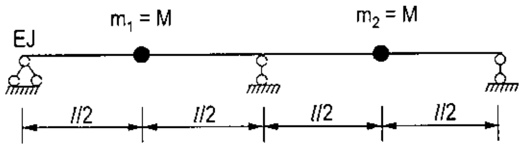
Phương pháp giải bài toán dao động tự do hệ hữu hạn bậc tự do ở trên gọi là phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng. Ở đây là khai triển trực tiếp nguyên nhân tác dụng bên ngoài theo các dạng riêng. Phương pháp này còn gọi là: phương pháp dựa trên các đặc trưng tần số, hoặc phương pháp cộng dạng dao động; phương pháp có thể được diễn đạt ở nhiều cách khác nhau, sang phần dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do ta xét nghiên cứu cụ thể hơn.

Thí dụ 2.6:

Cho hệ có 2 khối lượng tập trung hình (2-10), hệ chịu tác dụng của điều kiện ban đầu:

$$\{y\}_{t=0} = \{y_o\} = \{0\}\ ;$$

$$\{\dot{y}\}_{t=0} = \{v_o\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} v_o$$



Hình 2.10

Xác định dao động tự do của hệ

Véc tơ tần số dao động riêng và ma trận các dạng dao động riêng của bài toán này đã có ở thí dụ (2-2):

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 6,9282 \\ 10,4745 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}} \quad ; \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta xác định tốc độ ban đầu khai triển vào các dạng dao động riêng theo công thức (2-83):

$$\{v_1^o\} = \frac{\{\varphi_1\}^T\{v_o\}}{\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\}}[M]\{\varphi_1\} = \frac{\{1\ -1\}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} v_o}{\{1\ -1\}M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{v_o}{2}$$

$$\{v_2^o\} = \frac{\{\varphi_2\}^T\{v_o\}}{\{\varphi_2\}^T[M]\{\varphi_2\}}[M]\{\varphi_2\} = \frac{\{1\ \ 1\}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} v_o}{\{1\ \ 1\}M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{v_o}{2}$$

Vậy ma trận tốc độ ban đầu khai triển vào các dạng dao động riêng của hệ:

$$\left[V_{kh}^o\right] = \left[\{v_1^o\}, \{v_2^o\}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{v_o}{2}$$

Kiểm tra theo công thức (2-85):

$$v_1^o = v_{11}^o + v_{12}^o = \left(\frac{1}{2}v_o + \frac{3}{2}v_o\right) = 2v_o \ \text{: Đúng}$$

$$v_2^o = v_{21}^o + v_{22}^o = \left(-\frac{1}{2}v_o + \frac{3}{2}v_o\right) = v_o \ \text{: Đúng}$$

Véc tơ chuyển vị của hệ - phương trình dao động tự do được xác định theo công thức (2-86):

$$\{y(t)\} = \left[V_{kh}^o\right]\{K_{vo}(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{v_o}{2} \begin{Bmatrix} \dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} \\ \dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} \end{Bmatrix}$$

$$\{y(t)\}=\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{v_o}{2}\cdot\dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}+\dfrac{3v_o}{2}\,\dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\\ \left(\dfrac{-v_o}{2}\cdot\dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}+\dfrac{3v_o}{2}\,\dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(0,07217\sin\omega_1 t+0,1432\sin\omega_2 t)\\ (-0,07217\sin\omega_1 t+0,1432\sin\omega_2 t\end{Bmatrix}v_o\sqrt{\frac{ml^3}{EJ}}$$

§9. PHƯƠNG PHÁP LẶP NĂNG LƯỢNG XÁC ĐỊNH TẦN SỐ VÀ DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO

Như đã trình bày ở chương 1, phương pháp năng lượng được dựa trên định luật bảo toàn năng lượng: Trong quá trình dao động tổng động năng và thế năng của hệ luôn là một đại lượng không đổi. Với hệ một bậc tự do, tần số dao động riêng được tính theo công thức (1.64). Nói chung sử dụng phương pháp năng lượng cho bài toán dao động riêng hệ một bậc tự do là thuận lợi và đơn giản, nhưng trong thực tế với nhiều công trình cần yêu cầu tính toán với độ chính xác cao đòi hỏi phải phân tích dao động của hệ với một số tần số thấp và các dạng dao động riêng tương ứng; các kết cấu công trình thực có số bậc tự do là rất lớn, việc xác định tần số và dạng dao động riêng như §4, §5 chương này là khó thực hiện được. Vì vậy, người ta đưa các phương pháp gần đúng dần (phương pháp lặp) nhờ sự trợ giúp của máy tính để giải quyết bài toán dao động riêng cỡ lớn cho phép nhận được kết quả tin cậy. Dưới đây sẽ đưa ra phương pháp lặp năng lượng xác định tần số và dạng dao động riêng của hệ hữu hạn bậc tự do.

Ở bài toán dao động riêng, với hệ biến dạng hữu hạn bậc tự do, cần hiểu rằng: Đường đàn hồi của một dạng dao động riêng chính là do lực quán tính tương ứng gây ra, bởi vì phương trình vi phân dao động của bài toán dao động riêng là phương trình vi phân dao động tự do không xét đến ảnh hưởng của lực cản, nghĩa là, khi xét dao động riêng, thì lực quán tính bằng lực đàn hồi. Ta sẽ xác định động năng và thế năng cực đại ứng với một đường đàn hồi trên cơ sở các lực quán tính và các chuyển vị tại các khối lượng do các lực quán tính của hệ gây ra, sau đó sẽ tính được giá trị tần số dao động riêng. Lặp lại quá trình xác định lực quán tính ứng với đường đàn hồi mới, và xác định chuyển vị do lực quán tính gây ra sẽ xác định được tần số dao động riêng có giá trị chính xác hơn lần trước. Quá trình lặp cần phải đảm bảo điều kiện trực giao của dạng dao động riêng sau với tất cả các dạng dao động riêng trước đó.

1. Xác định tần số và dạng dao động riêng thứ nhất: ω_1 $\{\varphi_1\}$

Bước 1: Chọn hàm dẫn (đường đàn hồi) thỏa mãn điều kiện biên hình học và phù hợp với dạng dao động riêng $\{\varphi_1\}$

$$\{\varphi_1^{(o)}\}=\begin{Bmatrix}\varphi_{11}^{(o)}\\ \varphi_{21}^{(o)}\\ \ldots\\ \varphi_{n1}^{(o)}\end{Bmatrix}\qquad(2\text{-}89)$$

Bước 2: Xác định lực quán tính lớn nhất (theo thời gian) ứng với hàm dẫn trên

$$\left\{P_q^{(1)}\right\} = \omega_{1,0}^2 [M]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\}$$

Chọn $\omega_{1,0} = 1$ (có thể lấy $\omega_{1,0}$ bất kì), ta có:

$$\left\{P_q^{(1)}\right\} = [M]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\} \tag{2-90}$$

Bước 3: Xác định chuyển vị do lực quán tính trên gây ra:

$$\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\} = [F]\left\{P_q^{(1)}\right\} = [F][M]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\}$$

Hay $$\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\} = [B]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\} \tag{2-91}$$

Với $$[B] = [F]\,[M] \tag{2-92}$$

gọi là ma trận xác định dạng dao động riêng thứ nhất

Trong đó [F] là ma trận mẫu.

Lấy $$\left\{\varphi_1^{(1)}\right\} = \left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\} \cdot \frac{1}{\overline{\varphi}_{11}^{(1)}} \tag{2-93}$$

Bước 4: Xác định thế năng cực đại (công ngoại lực) của lực quán tính ứng với các chuyển vị.

$$U_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{P_q^{(1)}\right\}^T\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}^T\left\{P_q^{(1)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}^T.[M]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\} \tag{2-94}$$

Bước 5: Xác định động năng cực đại của hệ

$$\overline{T}_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}[M]\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\} \tag{2-95}$$

Bước 6: Xác định tần số dao động riêng ω_1

$$\left(\omega_1^{(1)}\right)^2 = \frac{U_{max}^{(1)}}{\overline{T}_{max}^{(1)}} = \frac{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}^T[M]\left\{\varphi_1^{(o)}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}^T[M]\left\{\overline{\varphi}_1^{(1)}\right\}} \tag{2-96}$$

Bước 7: Lặp lại bước 2.

$$\left\{P_q^{(2)}\right\} = [M]\left\{\varphi_1^{(1)}\right\}$$

Bước 8: Lặp lại bước 3

$$\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\} = [B]\left\{\varphi_1^{(1)}\right\} \quad , \quad \text{Lấy:} \quad \left\{\varphi_1^{(2)}\right\} = \left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\} \cdot \frac{1}{\overline{\varphi}_{11}^{(2)}}$$

Bước 9: Lặp lại bước 4

$$U_{max}^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}^T [M]\left\{\varphi_1^{(1)}\right\}$$

Bước 10: Lặp lại bước 5

$$\overline{T}_{max}^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}^T [M]\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}$$

Bước 11: Lặp lại bước 6

$$\left(\omega_1^{(2)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}^T [M]\left\{\varphi_1^{(1)}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}^T [M]\left\{\overline{\varphi}_1^{(2)}\right\}}$$

Một cách tổng quát, ở lần tính thứ s, ta có tần số và dạng dao động riêng thứ nhất:

$$\left\{\overline{\varphi}_1^{(s)}\right\} = [B]\left\{\varphi_1^{(s-1)}\right\} \tag{2-97}$$

$$\left(\omega_1^{(s)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(s)}\right\}^T [M]\left\{\varphi_1^{(s-1)}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\overline{\varphi}_1^{(s)}\right\}^T [M]\left\{\overline{\varphi}_1^{(s)}\right\}}, \text{ hoặc: } \left(\omega_1^{(s)}\right)^2 = \frac{\varphi_{K,1}^{(s-1)}}{\overline{\varphi}_{K1}^{(s)}} \tag{2-98}$$

$$\left\{\varphi_1^{(s)}\right\} = \left\{\overline{\varphi}_1^{(s)}\right\} \cdot \frac{1}{\overline{\varphi}_{11}^{(s)}} \tag{2-99}$$

Khi $S \to \infty$, thì: $\omega_1^{(s)} \to \omega_1$ chính xác. Quá trình lặp sẽ dừng khi giá trị tần số dao động riêng ở hai lần tính liên tiếp sát nhau theo yêu cầu.

2. Xác định tần số và dạng dao động riêng thứ hai: ω_2, $\{\varphi_2\}$.

Bước 1: Chọn hàm dẫn thỏa mãn điều kiện biên hình học và phù hợp với dạng dao động riêng $\{\varphi_2\}$.

$$\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{12}^{(o)} \\ \varphi_{22}^{(o)} \\ \cdots \\ \varphi_{n2}^{(o)} \end{Bmatrix}; \text{ véc tơ này chưa trực giao với } \{\varphi_1\} \tag{2-100}$$

Bước 2: Xác định hệ số trực giao: $a_o = \dfrac{\{\varphi_1\}^T [M]\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\}}{\{\varphi_1\}^T [M]\{\varphi_1\}} = \dfrac{\{\varphi_1\}^T [M]\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\}}{M_1}$ (2-101)

Bước 3: Thiết lập véc tơ $\left\{\varphi_2^{*(o)}\right\}$ thỏa mãn điều kiện trực giao với véc tơ $\{\varphi_1\}$:

$$\left\{\varphi_2^{*(o)}\right\} = \left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\} - a_o\{\varphi_1\} = [T_1]\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\} \tag{2-102}$$

Với: $$[T_1] = \left([E] - \frac{\{\varphi_1\}\{\varphi_1\}^T[M]}{M_1}\right); \tag{2-103}$$

$[T_1]$ gọi là ma trận đảm bảo điều kiện trực giao.

Lấy: $$\left\{\varphi_2^{(o)}\right\} = \left\{\varphi_2^{*(o)}\right\} \cdot \frac{1}{\varphi_{12}^{*(o)}} \tag{2-104}$$

Bước 4: Xác định lực quán tính lớn nhất ứng với $\left\{\varphi_2^{*(o)}\right\}$:

$$\left\{P_q^{(1)}\right\} = [M]\left\{\varphi_2^{*(o)}\right\} \tag{2-105}$$

Bước 5: Xác định chuyển vị do lực quán tính gây ra:

$$\left\{\varphi_2^{-1}\right\} = [F]\left\{P_q^{(1)}\right\} = [F][M]\left\{\varphi_2^{*(o)}\right\} = [B][T_1]\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\}$$

$$\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\} = [B_2]\left\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\right\} \tag{2-106}$$

Với $$[B_2] = [B]\,[T_1] \tag{2-107}$$

gọi là ma trận xác định dạng dao động riêng thứ hai

Lấy $$\left\{\hat{\varphi}_2^{(1)}\right\} = \left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\} \cdot \frac{1}{\bar{\varphi}_{12}^{(1)}} \tag{2-108}$$

Bước 6: Xác định thế năng cực đại

$$U_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\varphi_2^{(o)}\right\} \tag{2-109}$$

Bước 7: Xác định động năng cực đại.

$$\bar{T}_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\} \tag{2-110}$$

Bước 8: Xác định tần số dao động riêng.

$$\left(\omega_2^{(1)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\varphi_2^{(o)}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\bar{\varphi}_2^{(1)}\right\}} \tag{2-111}$$

Bước 9: Xác định hệ số trực giao của $\left\{\hat{\varphi}_2^{(1)}\right\}$

$$a_1 = \frac{\{\varphi_1\}^T . [M] . \left\{\hat{\varphi}_2^{(1)}\right\}}{M_1}$$

Bước 10: Thiết lập véc tơ $\left\{\varphi_2^{*(1)}\right\}$ thỏa mãn điều kiện trực giao với $\{\varphi_1\}$:

$$\left\{\varphi_2^{*(1)}\right\} = [T_1]\left\{\hat{\varphi}_2^{(1)}\right\} \text{ ; Lấy } \left\{\varphi_2^{(1)}\right\} = \left\{\varphi_2^{*(1)}\right\} \cdot \frac{1}{\varphi_{12}^{*(1)}}$$

Quá trình tính được lặp lại từ bước 4.

3. Xác định tần số và dạng dao động riêng thứ ba: ω_3, $\{\varphi_3\}$

Quá trình tính toán tương tự như trên, lúc này ma trận đảm bảo điều kiện trực giao $\{\varphi_3\}$ với $\{\varphi_1\}$ và $\{\varphi_2\}$ là:

$$[T_2]=[T_1]-\frac{\{\varphi_2\}\{\varphi_2\}^T[M]}{M_2} \qquad (2\text{-}112)$$

Ma trận xác định dạng: $[B_3] = [B].[T_2]$ (2-113)

Một cách tổng quát, đối với dạng dao động riêng thứ i khi cần xác định ω_i, $\{\varphi_i\}$ ta có ma trận đảm bảo điều kiện trực giao và ma trận xác định dạng như sau:

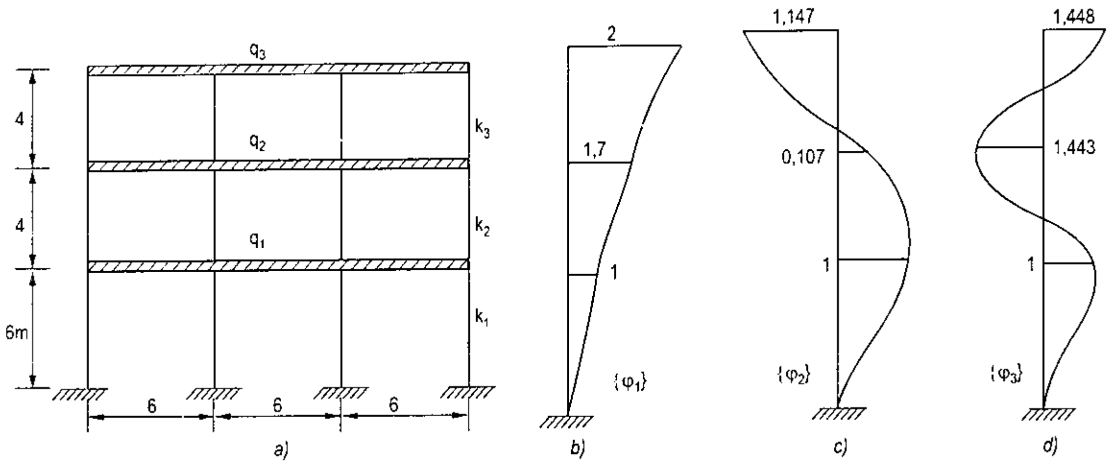
$$[T_{i-1}] = [T_{i-2}] - \frac{1}{M_{i-1}}\{\varphi_{i-1}\}\{\varphi_{i-1}\}^T[M]; \qquad (2\text{-}114)$$

$$[B_i] = [B]\,.\,[T_{i-1}] \qquad (2\text{-}115)$$

$$(i = 1 : [B_1 = [B], [T_{i-1}] = [T_0] = [E])$$

Thí dụ 2.7:

Xác định tần số và dạng dao động riêng ω_1, $\{\varphi_1\}$; ω_2, $\{\varphi_2\}$, của khung 3 tầng, 3 nhịp trên hình (2-11) a) Biết: Độ cứng các tầng là K_1 = 28,446T/cm, K_2 = 29,57T/cm, K_3 = 25,862 T/cm; Trọng lượng phân bố theo chiều dài các tầng là q_1 = 6,82T/m, q_2 = 6,82T/m, q_3 = 3,5T/m.



Hình 2.11

Ma trận cứng của hệ và ma trận mềm các hệ:

$$[K]=\begin{bmatrix}2,2433 & -1,1434 & 0\\ -1,1434 & 2,1434 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.25,862\,T/cm;\quad [F]=[K]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1,962 & 1,962\\ 1 & 1,962 & 3,0619\end{bmatrix}\frac{1}{28,4456}\,cm/T$$

Ma trận khối lượng của hệ:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5132 \end{bmatrix}.125,135.10^{-3}T.s^2/cm$$

1. Xác định tần số và dạng dao động riêng thứ nhất ω_1, $\{\varphi_1\}$:

Ma trận xác định dạng tính theo (2-92):

$$[B_1]=[B]=[F][M]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,962 & 1,962 \\ 1 & 1,962 & 3,0619 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5132 \end{bmatrix}.\frac{125,135.10^{-3}}{28,4456}$$

$$[B_1]=\frac{1}{227,319}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5132 \\ 1 & 1,962 & 1,0069 \\ 1 & 1,962 & 1,5714 \end{bmatrix}.s^2$$

Quá trình tính lặp tương ứng với các công thức (2-97), (2-99) được cho ở dạng bảng sau:

$$\{\bar{\varphi}_1^{(s)}\}=[B_1]\{\varphi_1^{(s-1)}\}=\frac{1}{227,319}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5132 \\ 1 & 1,962 & 1,0069 \\ 1 & 1,962 & 1,5714 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(o)}\}}=\frac{1}{227,319}\begin{Bmatrix} 2,5132 \\ 3,9689 \\ 4,5334 \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 2,5132 \\ 3,9689 \\ 4,5334 \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\varphi}_1^{(1)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,5796 \\ 1,8038 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(1)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 3,5053 \\ 5,9154 \\ 6,9337 \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\varphi}_1^{(2)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,6876 \\ 1,9781 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(2)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 3,70276 \\ 6,30282 \\ 7,41946 \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\varphi}_1^{(3)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,7022 \\ 2,0038 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(3)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1,73035 \\ 6,3574 \\ 7,4884 \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\varphi}_1^{(4)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,7041 \\ 2,00734 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(4)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 3,73417 \\ 6,3646 \\ 7,4978 \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\varphi}_1^{(5)}\}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,7043 \\ 2,0078 \end{Bmatrix}}_{\{\varphi_1^{(5)}\}}$$

Ta lấy dạng dao động riêng thứ nhất ở lần tính thứ 5:

$$\{\varphi_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,7043 \\ 2,0078 \end{Bmatrix}$$ - mô tả trên hình (2-11b).

Tần số dao động riêng được tính theo (2-98):

$$\omega_j^2=\left[\omega_1^{(5)}\right]^2=\frac{\varphi_{31}^{(4)}}{\bar{\varphi}_{31}^{(5)}}=\frac{2,00734}{7,4978}.\,227,319=(7,8012)^2.\left(\frac{1}{s}\right)^2$$

$$\omega_1=7,8012.\frac{1}{s}\,.$$

2. Xác định tần số và dạng dao động riêng thứ 2: $\omega_2,\{\varphi_2\}$

Ma trận đảm bảo điều kiện trực giao của $\{\varphi_2\}$ với $\{\varphi_1\}$ được tính theo (2-103):

$$[T_1]=[F]-\frac{\{\varphi_1\}\{\varphi_1\}^T[M]}{\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac{\begin{Bmatrix}1\\1,7043\\2,0078\end{Bmatrix}\{1\quad 1,7043\quad 2,0078\}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0,5132\end{bmatrix}}{\{1\ \ 1,7043\quad 20078\}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0,5132\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1,7043\\2,0078\end{Bmatrix}}$$

$$[T_1]=\begin{bmatrix}0,8322935&-0,285311&-0,1724962\\-0,285311&0,5137445&-0,2939852\\-0,3361189&-0,5728474&0,653662\end{bmatrix}$$

Ma trận xác định dạng được tính theo (2-107)

$$[B_2]=[B][T_1]=\cdots=\begin{bmatrix}0,3747863&-0,0655517&-0,131022\\-0,0656247&0,1458557&-0,0911227\\-0,2553638&-0,1775167&0,2778696\end{bmatrix}\frac{1}{227,319}$$

Quá trình tính lặp tương ứng với công thức (2-106), (2-108) có xét đến điều kiện trực giao được cho dưới dạng bảng sau:

$$\{\overline{\varphi}_2^{(s)}\}=[B_2]\{\hat{\varphi}_2^{(s-1)}\}=\begin{bmatrix}0,3747863&-0,0655517&-0,131022\\-0,0656247&0,1458557&-0,0911227\\-0,2553638&-0,1775167&0,2778696\end{bmatrix}\frac{1}{227,319}\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\end{Bmatrix}}_{\{\hat{\varphi}_2^{(o)}\}}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|c|cc|}
0,4403 & 1 & 0,5606 & 1 & 0,53908 & & 1 & 0,518309\\
0,17135 & 0,38952 & 0,13818 & 0,24648 & 0,095826 & \ldots & 0,10933 & 0,05492\\
-0,71075 & -1,61308 & -0,77274 & -1,37841 & -0,68244 & & -1,15165 & -0,59519\\
\{\overline{\varphi}_2^{(1)}\} & \{\hat{\varphi}_2^{(1)}\} & \{\overline{\varphi}_2^{(2)}\} & \{\hat{\varphi}_2^{(2)}\} & \{\overline{\varphi}_2^{(3)}\} & & \{\hat{\varphi}_2^{(7)}\} & \{\overline{\varphi}_2^{(8)}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|l}
1 & 0,518296 & \\
1,10598 & 0,054468 & \ldots\\
-1,148325 & -0,593258 & \\
\{\hat{\varphi}_2^{(8)}\} & \{\overline{\varphi}_2^{(9)}\} &
\end{array}$$

Tần số dao động riêng thứ hai:

$$\omega_2^2(9)=\frac{\hat{\varphi}_{32}^{(8)}}{\varphi_{32}^{(9)}}=\frac{-1,148325}{-0,593258}.227,319=(20,97)^2.\frac{1}{s^2}\ ;\ \omega_2=20,97.\frac{1}{s}$$

Dạng dao động riêng thứ hai: Véctơ đảm bảo điều kiện trực giao.

$\{\varphi_2^*\}=[T_1]\left[\hat{\varphi}_2^{(8)}\right]$; hoặc tính hệ số trực giao:

$$a_8 = \frac{1}{M_1}\left\{\hat{\varphi}_2^{(8)}\right\}^T [M]\{\varphi_1\} = -0,0004438$$

$$\left\{\varphi_2^{*(8)}\right\} = \left\{\hat{\varphi}_2^{(8)}\right\} - a_8\{\varphi_1\} = \begin{Bmatrix} 1,000444 \\ 0,106715 \\ -1,147434 \end{Bmatrix}$$

Cuối cùng:

$$\{\varphi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,1066676 \\ -1,1469247 \end{Bmatrix} \text{ hình (2-11c)}$$

Tương tự có thể tiến hành tính tần số và dạng dao động riêng thứ ba:

$$\omega_3 = 28,447.\frac{1}{s}, \; \{\varphi_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,443 \\ 1,448 \end{Bmatrix} \text{ (hình 2.11d)}$$

§10. DAO ĐỘNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG XUNG

Như đã biết khi hệ chịu tác dụng của xung lượng, hệ sẽ dao động tự do. Phương trình dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i được viết theo (2-75):

$$\{y_i(t)\} = \{y_i^o\}\cos\omega_i t + \{v_i^o\}\cdot\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i}$$

Trong đó $\{y_i^o\}$ được xác định theo (2-80), $\{v_i^o\}$ được xác định theo (2-83). Vấn đề ở đây là phải xác định $\{v_i^o\}$ như thế nào khi hệ chịu tác dụng của xung tức thời?

Ta xem rằng tại thời điểm ban đầu t = 0, dưới tác dụng của véc tơ xung lượng $\{S_i\}$, (Véc tơ xung khai triển vào dạng chính thứ i của các xung lượng bên ngoài tác dụng vào hệ), các khối lượng của hệ sẽ nhận được vận tốc ban đầu tương tự như công thức (1-157) của hệ một bậc tự do:

$$v_{1,i}^o = \frac{S_{1,i}}{m_1}; \; v_{2,i}^o = \frac{S_{2,i}}{m_2}; \ldots\ldots\ldots; \; v_{ni}^o = \frac{S_{n,i}}{m_n}$$

Như vậy, véc tơ vận tốc ban đầu của hệ ứng với dạng i:

$$\{v_i^o\} = \begin{Bmatrix} v_{1i}^o \\ v_{2i}^o \\ \ldots \\ v_{ni}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{S_{1i}}{m_1} \\ \frac{S_{2i}}{m_2} \\ \frac{S_{ni}}{m_n} \end{Bmatrix}$$

hay có thể viết:

$$\{v_i^o\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ \dots \\ S_{ni} \end{Bmatrix} = [M]^{-1}\{S_i\} \qquad (2\text{-}116)$$

Nếu xem rằng chuyển vị ban đầu của hệ bằng không:

$$\{y_i^o\} = \{o\}$$

thì, sau khi thế các điều kiện ban đầu vào phương trình dao động tự do (2-75), ta sẽ nhận được véc tơ chuyển vị của hệ ứng với dạng i:

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1}\{S_i\}K_{ai}(t) \qquad (2\text{-}117)$$

Trong đó: $$K_{ai}(t) = \frac{\sin\omega_i t}{\omega_i} \qquad (2\text{-}118)$$

$\{S_i\}$ là véc tơ xung khai triển ứng với dạng dao động riêng thứ i.

Để xác định $\{S_i\}$, ta cũng đặt:

$$\{S_i\} = \alpha_i[M]\,\{\varphi_i\}$$

và tiến hành tương tự như khai triển chuyển vị và tốc độ ban đầu vào các dạng riêng ở phần dao động tự do (§8 chương này), sẽ nhận được:

$$\{S_i\} = \frac{\{\varphi_i\}^T\{S\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\,\{\varphi_i\} \qquad (2\text{-}119)$$

Trong đó $\{S\}$ là véc tơ xung lượng bên ngoài tác dụng vào hệ.

Gộp các véc tơ xung khai triển theo các dạng riêng, ta có ma trận xung khai triển của cả hệ:

$$[S_{kh}] = [\{S_1\},\{S_2\},\dots\{S_n\}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}120)$$

Công thức kiểm tra theo hàng:

$$S_K = \sum_{i=1}^{n} S_{Ki} = (S_{K1} + S_{K2} + \dots + S_{Kn}) \qquad (2\text{-}121)$$

Cuối cùng ta có véc tơ chuyển vị của các khối lượng cũng chính là phương trình dao động của hệ chịu tác dụng xung như sau:

$$\{y(t)\} = [M]^{-1} [S_{kh}] \{K_{ai}(t)\} \tag{2-122}$$

Trong đó, $[S_{kh}]$ là ma trận xung khai triển được tính từ (2-119), $\{K_{ai}(t)\}$ là véc tơ có các phần tử là $K_{ai}(t)$ được xác định theo(2-118). Nếu xung tác dụng vào hệ không phải thời điểm t = 0, mà tại thời điểm $t = \tau$, thì véc tơ chuyển vị của các khối lượng ứng với dạng chính thứ i sẽ là:

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1} \{S_i\} . \frac{\sin \omega_i (t - \tau)}{\omega_i} \tag{2-123}$$

Véctơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được tính qua lực quán tính:

$$\{P_{d,i}(t)\} = -[M] \{\ddot{y}_i(t)\} \tag{2-124}$$

Đưa (2-117) với đạo hàm cấp hai tương ứng vào biểu thức trên, sẽ được:

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{S_i\} \omega_i \sin \omega_i t$$

Hay

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{S_i\} . K_i(t) \tag{2-125}$$

Với:

$$K_i(t) = \omega_i \sin \omega_i t \tag{2-126}$$

$K_i(t)$ là hệ số động học theo thời gian ứng với dạng i khi hệ chịu tác dụng xung.

Véctơ lực đàn hồi của cả hệ:

$$\{P_d(t)\} = \{S_{kh}\} . \{K_i(t)\} \tag{2-127}$$

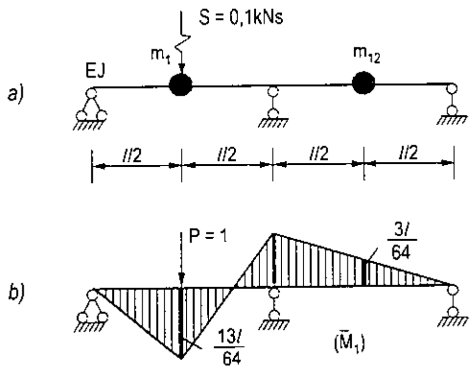
Trong đó $[S_{kh}]$ là ma trận xung khai triển của cả hệ, $\{K_i(t)\}$ là véctơ có các hệ số là $K_i(t)$ được xác định theo (2-126). Cũng cần nhớ rằng, khi đã có véc tơ lực đàn hồi, ta có thể xác định véc tơ chuyển vị của các khối lượng qua ma trận mềm:

$$\{y(t)\} = [F] \{P_d(t)\} \tag{2-128}$$

Từ véc tơ lực đàn hồi, ta có thể xác định chuyển vị và nội lực của các điểm bất kì của hệ qua ma trận ảnh hưởng chuyển vị và ma trận ảnh hưởng nội lực.

Thí dụ 2.8:

Hệ chịu tác dụng xung cho trên hình (2.12a). Hãy xác định mômen uốn tại vị trí khối lượng m_1. Cho $E = 2,1.10^4 kN/cm^2; J = 21720 cm^4$, $m_1 = m_2 = M = 0,023 kNs^2/cm$; $l = 3m$.



Hình 2.12

1. Xác định tần số và dạng dao động riêng

Ở thí dụ (2-2) ta đã có kết quả tần số và dạng dao động riêng:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,9282 \\ 10,4745 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}} = \begin{Bmatrix} 187 \\ 284 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{s} \ ; [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Xác định xung khai triển theo các dạng riêng:

Véctơ xung tác dụng vào hệ: $\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01 \\ 0 \end{Bmatrix}.kNs$

Tính véctơ xung khai triển vào dạng chính thứ i theo (2-119)

$$\{S_1\} = \frac{\{\varphi_1\}^T\{S\}}{\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\}}[M]\{\varphi_1\} = \frac{\{1 \ \ -1\}\begin{Bmatrix} S \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1 \ \ -1\} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{S}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\{S_2\} = \frac{\{\varphi_2\}^T\{S\}}{\{\varphi_2\}^T[M]\{\varphi_2\}}[M]\{\varphi_2\} = \frac{\{1 \ \ 1\}\begin{Bmatrix} S \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1 \ \ 1\} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{S}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận xung khai triển của cả hệ:

$$[S_{Kh}] = [\{S_1\}, \{S_2\}] = \frac{S}{2}\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

3. Xác định véc tơ lực đàn hồi: theo công thức (2-127)

$$\{P_d(t)\} = [S_{Kh}]\{K_i(t)\} = \frac{S}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_1 \sin\omega_1 t \\ \omega_2 \sin\omega_2 t \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{S}{2}\begin{Bmatrix} (\omega_1 \sin\omega_1 t + \omega_2 \sin\omega_2 t) \\ (-\omega_1 \sin\omega_1 t + \omega_2 \sin\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

4. Xác định mômen uốn tại A

Từ biểu đồ trạng thái đơn vị cho trên hình 2.12b; ta có giá trị mômen uốn tại A do lực P = 1 đặt tại A và B gây ra là:

$$M_{A1} = \frac{13l}{64} \quad ; \quad M_{A2} = \frac{-3l}{64}$$

Vậy, mômen uốn tại A sẽ là:

$$M_A(t) = \{M_{A1}, \ M_{A2}\}\begin{Bmatrix} P_{d,1}(t) \\ P_{d,2}(t) \end{Bmatrix} = \left(M_{A1}.P_{d,1}(t) + M_{A2}.P_{d2}(t)\right)$$

$$M_A(t)=\frac{S}{2}\left\{\frac{13l}{64}(\omega_1\sin\omega_1 t+\omega_2\sin\omega_2 t)-\frac{3l}{64}(-\omega_1\sin\omega_1 t+\omega_2\sin\omega_2 t)\right\}$$

$$M_A(t)=7{,}0125(\sin 187t+0{,}94\sin 284t).\ \text{kNm}$$

§11. TÍNH DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO THEO PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN TẢI TRỌNG THEO CÁC DẠNG RIÊNG

1. Xác định tải trọng theo các dạng riêng

Tương tự như các phần trước, véctơ tải trọng động bên ngoài tác dụng vào hệ được khai triển vào các dạng dao động riêng:

$$\{P(t)\}=\{P_1(t)\}+\{P_2(t)\}+...+\{P_i(t)\}+...+\{P_n(t)\}$$

Ta cũng đặt:

$$\{P_i(t)\}=\alpha_i(t)[M]\{\varphi_i\}$$

Và tiến hành tương tự như khai triển chuyển vị và tốc độ ban đầu vào các dạng riêng ở phần dao động tự do, sẽ nhận được

$$\{P_i(t)\}=\frac{\{\varphi_i\}^T\{P(t)\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\} \tag{2-129}$$

Khi chỉ khai triển véctơ cường độ tải trọng động bên ngoài, ta có:

$$\{P_i\}=\frac{\{\varphi_i\}\{P\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\} \tag{2-130}$$

Gộp các véc tơ tải trọng theo các dạng riêng, ta được ma trận tải trọng khai triển của cả hệ:

$$[P_{Kh}]=[\{P_1\},\{P_2\},...\{P_n\}]=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & ... & P_{1n}\\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nn}\end{bmatrix} \tag{2-131}$$

Tải trọng động tác dụng tại khối lượng K được kiểm tra theo hàng:

$$P_K=\sum_{i=1}^{n}P_{Ki}=(P_{K1}+P_{K2}+...+P_{Kn}) \tag{2-132}$$

Việc thiết lập ma trận tải trọng khai triển (2-131) từ các véctơ $\{P_i\}$ được xác định theo (2-130), như vậy là ta đã khai triển tải trọng động bên ngoài vào các khối lượng của hệ theo từng dạng dao động riêng, cũng có nghĩa là ta đã xác định từng cột của ma trận $[P_{Kh}]$. Ta cũng có thể khai triển tải trọng động bên ngoài theo các dạng dao động riêng vào từng khối lượng thứ K của hệ, nghĩa là ta đi xác định từng hàng của ma trận $[P_{Kh}]$, công thức được tính như sau:

$$\{P_K\}^T = m_K \, \mathrm{diag}\,\varphi_{Ki} \left[\Phi\right]^{-1} \left[M\right]^{-1} \{P\} \qquad (2\text{-}133)$$

Trong đó: diag φ_{Ki} là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính là φ_{Ki}, $i = 1, 2, \ldots n$.

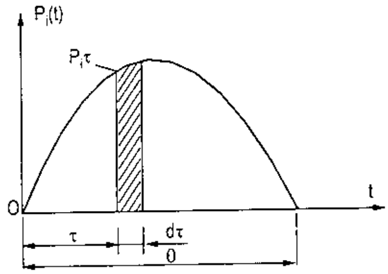
$\{P\}$ là véctơ cường độ tải trọng động bên ngoài tác dụng vào hệ.

Khi dùng dạng dao động riêng đã chuẩn hoá, công thức $\{P_K\}^T$ sẽ đơn giản hơn:

$$\{P_K\}^T = m_K \mathrm{diag}\varphi_{Ki} \left[\Phi_{ch}\right]^T \{P\} \qquad (2.134)$$

2. Phương trình dao động của hệ

Khi hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật thay đổi bất kỳ theo thời gian, để tìm nghiệm ứng với dạng dao động riêng thứ i trong trường hợp này ta có thể sử dụng phương trình nghiệm của hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng xung. Muốn vậy, trên biểu đồ tải trọng ứng với dạng chính thứ i, ta tách ra một phân tố tải trọng ứng với thời điểm τ (hình 2.13). Xem rằng tại thời điểm τ hệ chịu tác dụng của xung lượng phân tố $\{dS_i\}$:



Hình 2.13

$$\{dS_i\} = \begin{Bmatrix} dS_{1i} \\ dS_{2i} \\ \ldots \\ dS_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1i,\tau}\ d\tau \\ P_{2i,\tau}\ d\tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{ni,\tau}\ d\tau \end{Bmatrix} = \{P_{i,\tau}\}\ d\tau$$

Xung lượng phân tố này sẽ gây ra chuyển vị được xác định theo (2-123) như sau:

$$\{dy_i(t)\} = [M]^{-1}\{P_{i,\tau}\}d\tau.\frac{\sin\omega_i(t-\tau)}{\omega_i}$$

Chuyển vị toàn phần là tích phân biểu thức trên:

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1}\{P_i\}K_{ai}(t) \qquad (2\text{-}135)$$

Trong đó: $\{P_i\}$ là véctơ tải trọng khai triển vào dạng chính thứ i được xác định theo (2-130):

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t f(\tau).\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (2\text{-}136)$$

Véctơ chuyển vị cả hệ bằng tổng các véc tơ chuyển vị đối với các dạng riêng:

$$\{y(t)\} = [M]^{-1}[P_{Kh}]\{K_{ai}(t)\} \qquad (2\text{-}137)$$

Trong đó: $[P_{Kh}]$ là ma trận tải trọng khai triển theo các dạng riêng được thiết lập theo công thức (2-131); $\{K_{ai}(t)\}$ là véc tơ có các phần tử là $K_{ai}(t)$ được xác định theo (2-136).

Ta thấy rằng, phương trình dao động hệ hữu hạn bậc tự do (2-137) có dạng tương tự như phương trình dao động hệ một bậc tự do (1-185).

$$y(t) = \frac{1}{M.\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau = M^{-1}.P_m.K_a(t)$$

Với: $$K_a(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

3. Biểu thức lực đàn hồi

Lực đàn hồi có thể được xác định từ ma trận cứng [K] và véc tơ chuyển vị động {y(t)} của hệ đã tính được ở trên.

$$\{P_d(t)\} = [K]\{y(t)\} \tag{2-138}$$

Ta cũng có thể xác định lực đàn hồi từ ma trận tải trọng khai triển theo các dạng riêng và véc tơ hệ số động học theo thời gian. Tương tự như lực đàn hồi của hệ một bậc tự do chịu tải trọng động bất kì (1-191).

$$P_d(t) = P_m.K(t)$$

Với $$K(t) = \omega\int_0^t f(\tau).\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Ở hệ hữu hạn bậc tự do, véc tơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được viết như sau:

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{P_i\}.K_i(t) \tag{2-139}$$

Với $\{P_i\}$ là véctơ tải trọng khai triển ứng với dạng i, $K_i(t)$ là hệ số động học theo thời gian ứng với dạng i:

$$K_i(t) = \omega_i\int_0^t f(\tau).\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{2-140}$$

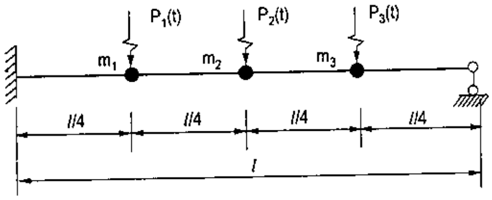
Từ các véc tơ lực đàn hồi ứng với các dạng riêng, ta sẽ có véctơ lực đàn hồi của cả hệ:

$$\{P_d(t)\} = [P_{Kh}]\{K_i(t)\} \tag{2-141}$$

Trong đó $[P_{Kh}]$ là ma trận tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng được thiết lập theo (2-131), $\{K_i(t)\}$ là véctơ có các phần tử là $K_i(t)$ được xác định theo (2-140).

$$\{K_i(t)\} = \begin{Bmatrix} K_1(t) \\ K_2(t) \\ \ldots\ldots \\ K_n(t) \end{Bmatrix} \tag{2-142}$$

Thí dụ (2-9): Xác định chuyển vị tại các khối lượng của hệ cho ở hình 2.14, cho $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{ml}{4}$; $P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = P\sin rt$, $r = 10\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$; EJ = const.



Hình 2.14

1. Tần số và dạng dao động riêng

Hệ này có 3 bậc tự do là 3 chuyển vị thẳng đứng tại 3 khối lượng.

Ma trận khối lượng của hệ:

$$[M] = \frac{ml}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tính được kết quả như sau:

$$[K] = \frac{16}{97}\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 7296 & -4584 & 1728 \\ -4584 & 5568 & -3720 \\ 1728 & -3720 & 3840 \end{bmatrix}$$

Tần số dao động riêng được xác định theo phương trình (2-37):

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 15,504 \\ 49,052 \\ 91,53 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Các dao động riêng được tính theo công thức (2-46), ma trận các dạng dao động riêng là:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2,221 & 0,421 & -0,954 \\ 1,878 & -1,02 & 0,596 \end{bmatrix}$$

Chuẩn hóa các dạng dao động riêng theo (2-69):

$$[\Phi_{ch}] = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0,3251 & 0,6726 & 0,6644 \\ 0,7221 & 0,2771 & -0,6338 \\ 0,6106 & -0,6861 & 0,396 \end{bmatrix}$$

Trong đó: $a = \frac{1}{2}\sqrt{ml}$

2. Xác định tải trọng khai triển theo các dạng riêng

* Sử dụng công thức (2-129): $\{P_i\} = \dfrac{\{\varphi_i^T\}\,\{P\}}{\{\varphi_i^T\}\,[M]\,\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\}$

$$\{P_1\} = \frac{1}{a}\{0,325\ \ 0,7221\ \ 0,611\}\begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}a^2\begin{Bmatrix} 0,325 \\ 0,722 \\ 0,611 \end{Bmatrix}\frac{1}{a} = \begin{Bmatrix} 0,539 \\ 1,1973 \\ 1,0131 \end{Bmatrix}p$$

$$\{P_2\} = \{0,6726\ \ 0,2771\ \ -0,6861\}\begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0,6726 \\ 0,2771 \\ -0,6861 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1774 \\ 0,0731 \\ 0,1809 \end{Bmatrix}p$$

$$\{P_3\} = \{0,6664\ \ -0,6338\ \ 0,396\}\begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0,6664 \\ -0,6338 \\ 0,396 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2836 \\ -0,273 \\ 0,1697 \end{Bmatrix}p$$

Vậy:

$$\{P_{kh}\} = [P_1,\ \ P_2,\ \ P_3] = \begin{bmatrix} 0,539 & 1,1774 & 0,2836 \\ 1,1973 & 0,0731 & -0,273 \\ 1,0131 & -0,1809 & 0,1697 \end{bmatrix}P$$

Sử dụng công thức (2-134): $\{P_K\}^T = m_K \mathrm{diag}\varphi_{Ki}\,[\Phi_{ch}]^T\{P\}$:

$$\{P_1\}^T = m_1\mathrm{diag}\varphi_{1i}\,[\Phi_{ch}]^T\{P\} = \frac{ml}{4}\cdot\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0,3251 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6726 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6644 \end{bmatrix}\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0,3251 & 0,7221 & 0,6106 \\ 0,6726 & 0,2771 & -0,6861 \\ 0,6644 & -0,6338 & 0,396 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

$$\{P_1\}^T = \begin{bmatrix} 0,3251 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6726 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6644 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1,6578 \\ 0,2636 \\ 0,4266 \end{Bmatrix}P = \begin{Bmatrix} 0,53895 \\ 0,1773 \\ 0,2834 \end{Bmatrix}P$$

$$\{P_2\}^T = m_2\mathrm{diag}\varphi_{2i}\,[\Phi_{ch}]^T\{P\} = \begin{Bmatrix} 1,197 \\ 0,0731 \\ -0,2725 \end{Bmatrix}P$$

$$\{P_3\}^T = m_3\mathrm{diag}\varphi_{3i}\,[\Phi_{ch}]^T\{P\} = \begin{Bmatrix} 1,0122 \\ -0,1809 \\ 0,1702 \end{Bmatrix}P$$

Các kết quả này đúng với kết quả đã nhận được theo cách tính áp dụng công thức (2-129) ở trên, có sai số rất nhỏ.

3. Phương trình dao động của hệ

Trước hết ta tính các phần tử của véctơ các hệ số ảnh hưởng động học theo (2-136).

$$K_{ai}(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_o^T \sin r\tau \sin\omega_i(t-\tau)d\tau=\frac{\sin rt}{\omega_i^2-r^2}$$

Thay các giá trị ω_i vào công thức trên, ta có được véctơ các hệ số ảnh hưởng động học như sau:

$$\{K_{ai}(t)\}=\begin{Bmatrix}K_{a1}(t)\\K_{a2}(t)\\K_{a3}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}0072825\\0{,}0004336\\0{,}0001208\end{Bmatrix}\cdot\frac{ml^4}{EJ}\sin rt$$

Chuyển vị của hệ được tính theo (2-137)

$$\{Y(t)\}=[M]^{-1}[P_{kh}]\{K_{ai}(t)\}=\frac{4}{ml}\begin{bmatrix}0{,}539 & 0{,}1774 & 0{,}285\\1{,}197 & 0{,}073 & -0{,}273\\1{,}0123 & -0{,}181 & 0{,}169\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0{,}00728\\0{,}000434\\0{,}000121\end{bmatrix}\frac{ml^4}{EJ}\sin rt=$$

$$=\begin{bmatrix}0{,}01615\\0{,}03462\\0{,}02962\end{bmatrix}\frac{Pl^3}{EJ}\sin rt$$

Thí dụ 2.10:

Xác định chuyển vị tại các khối lượng của hệ cho bởi phương trình cân bằng lực sau:

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}$$

1. Xác định tần số và dạng dao động riêng.

Theo phương trình (2-37) $\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0$ ta được

$\begin{vmatrix}(6-2u) & -2\\-2 & (4-u)\end{vmatrix}$ = 0, trong đó: u = ω^2, khai triển định thức và giải phương trình ta nhận được: $u_1 = 2$; $u_2 = 5$.

Do đó: $$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{Bmatrix}$$

Các dạng dao động riêng được xác định theo công thức (2-46), kết quả như sau:

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$$

Để chuẩn hóa các dạng dao động riêng ta sử dụng công thức (2-68) và (2-69), kết quả ta nhận được:

$$[\Phi_{ch}]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{bmatrix}$$

2- Xác định tải trọng khai triển theo các dạng riêng

Sử dụng công thức (2-130) ta được:

$$\{P_1\}=\frac{10}{3}\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix},\ \{P_2\}=\frac{10}{3}\begin{Bmatrix}-2\\2\end{Bmatrix}\qquad \text{Do đó : } [P_{kh}]=\frac{10}{3}\begin{bmatrix}2 & -2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

3. Xác định chuyển vị tại các khối lượng của hệ

Từ công thức (2-137) ta có phương trình dao động của hệ như sau:

$$\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}10 & -4\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}(1-\cos\sqrt{2}\,t)\\(1-\cos\sqrt{5}\,t)\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}\left(1-\dfrac{5}{3}\cos\sqrt{2}\,t+\dfrac{2}{3}\cos\sqrt{5}\,t\right)\\ \left(3-\dfrac{5}{3}\cos\sqrt{2}\,t-\dfrac{4}{3}\cos\sqrt{5}\,t\right)\end{Bmatrix}$$

4. Xác định lực đàn hồi theo (2-141)

$$\{P_d\}=[P_{kh}]\{K_i(t)\}=\frac{10}{3}\begin{bmatrix}2 & -2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}(1-\cos\sqrt{2}\,t)\\(1-\cos\sqrt{5}\,t)\end{Bmatrix}$$

$$\{P_d(t)\}=\frac{10}{3}\begin{Bmatrix}(2\cos\sqrt{5}\,t-2\cos\sqrt{2}\,t)\\(3-\cos\sqrt{2}\,t-2\cos\sqrt{5}\,t)\end{Bmatrix}$$

5. Xác định chuyển vị của hệ theo (2-128)

$$\{Y(t)\}=[F]\{P_d(t)\}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}\frac{10}{3}\begin{Bmatrix}(2\cos\sqrt{5}\,t-2\cos\sqrt{2}\,t)\\(3-\cos\sqrt{2}\,t-2\cos\sqrt{5}\,t)\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}\left(1-\dfrac{5}{3}\cos\sqrt{2}\,t+\dfrac{2}{5}\cos\sqrt{5}\,t\right)\\ \left(3-\dfrac{5}{3}\cos\sqrt{2}\,t-\dfrac{4}{3}\cos\sqrt{5}\,t\right)\end{Bmatrix}.$$

Giá trị chuyển vị này có thể nhận được từ (2-137)

Nhớ rằng từ lực đàn hồi đã nhận được ở trên ta không chỉ xác định được chuyển vị mà còn xác định được cả nội lực của điểm bất kì trên hệ. Việc xác định nội lực có thể được tiến hành trước việc xác định chuyển vị của hệ.

§12. TÍNH DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO THEO PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TỔNG QUÁT

1. Tọa độ tổng quát

Đối với dao động của hệ hữu hạn bậc tự do, chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động riêng.

$$\{Y(t)\} = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i(t)\} = \{Y_1(t)\} + \{Y_2(t)\} + ... + \{Y_i(t)\} + ... + \{Y_n(t)\} \qquad (2\text{-}143)$$

Để xác định các chuyển vị thành phần $\{Y_i(t)\}$, ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng, ta xem $\{Y_i(t)\}$ được gây ra bởi tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i $\{P_i(t)\}$ của hệ tải trọng động bên ngoài, và muốn tìm $\{Y_i(t)\}$ thì trước tiên phải xác định tải trọng khai triển $\{P_i(t)\}$.

Ở đây, ta xem $\{Y_i(t)\}$ bằng tích của chính dạng dao động riêng $\{\varphi_i\}$ với một đại lượng $Z_i(t)$ nào đó:

$$\{Y_i(t)\} = \{\varphi_i\}.Z_i(t) \qquad (2\text{-}144)$$

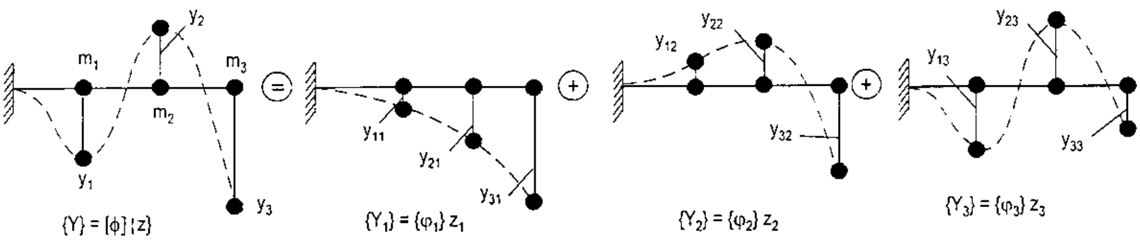
Nếu tìm được các đại lượng $Z_i(t)$ đó, thì ta sẽ xác định được các chuyển vị thành phần, và do đó sẽ xác định được chuyển vị của hệ.

Các đại lượng $Z_i(t)$ đó được gọi là các tọa độ tổng quát của hệ. Phương pháp tính dao động của hệ hữu hạn tự do đi từ việc xác định các tọa độ tổng quát được gọi là phương pháp tọa độ tổng quát.

Đưa (2-144) vào (2-143) ta có:

$$\{Y(t)\} = \{\varphi_1\}Z_1 + \{\varphi_2\}Z_2 + ... + \{\varphi_i\}Z_i + ... + \{\varphi_n\}Z_n = [\Phi]\{Z(t)\} \qquad (2\text{-}145)$$

Ta lại lấy sơ đồ dầm một đầu ngàm, có ba khối lượng để minh họa (xem hình 2.15):



Hình 2.15

Từ (2-145), ta cũng thấy rằng: ma trận các dạng dao động riêng $[\Phi]$ là ma trận để chuyển các tọa độ tổng quát $\{Z\}$ về các tọa độ hình học ban đầu $\{Y\}$.

Phù hợp với tính chất trực giao của các dạng dao động riêng, ta có thể biểu thị tọa độ tổng quát Z_i bất kì qua chuyển vị của hệ. Muốn vậy, ta nhân trái biểu thức (2-145) với $\{\varphi_i\}^T[M]$:

$$\{\varphi_i\}^T[M]\{Y(t)\} = \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_1\}Z_1(t) + ... + \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}Z_i(t) + ... + \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}Z_i(t)$$

Áp dụng tính chất trực giao (2-58) vào vế phải của biểu thức trên, ta được:

$$\{\varphi_i\}^T[M]\{Y(t)\} = \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}.Z_i(t)$$

Suy ra
$$Z_i(t) = \frac{\{\varphi_i\}^T[M]\{Y(t)\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}} \tag{2-146}$$

2. Xác định các tọa độ tổng quát

Phương trình vi phân dao động của hệ hữu hạn bậc tự do không xét ảnh hưởng của lực cản như đã biết (2-12) với C = 0.

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \tag{2-147}$$

Ta sẽ sử dụng tính chất trực giao của các dạng dao động riêng để xác định các tọa độ tổng quát. Muốn vậy, trước hết ta đưa phương trình (2-145) và đạo hàm bậc hai của nó: $\{\ddot{Y}(t)\} = [\Phi]\{\ddot{Z}(t)\}$ vào phương trình (2-147), ta được:

$$[M][\Phi]\{\ddot{Z}(t)\} + [K][\Phi]\{Z(t)\} = \{P(t)\} \tag{2-148}$$

Nhân trái hai vế của phương trình (2-148) với φ_i^T :

$$\{\varphi_i\}^T[M][\Phi]\{\ddot{Z}(t)\} + \{\varphi_i\}^T[K][\Phi]\{Z(t)\} = \{\varphi_i\}^T\{P\} \tag{2-149}$$

Khai triển các thành phần ở vế trái của phương trình (2-149) và sử dụng các biểu thức tính chất trực giao (2-58) và (2-59), ta sẽ nhận được phương trình sau:

$$\{\varphi_i\}^T[M][\varphi_i]\{\ddot{Z}_i(t)\} + \{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\}.\{Z_i(t)\} = \{\varphi_i\}^T\{P(t)\} \tag{2-150}$$

Ta đưa vào các kí hiệu mới:

$$M_i = \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\} \tag{2-151}$$

$$K_i = \{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\} \tag{2-152}$$

$$P_i(t) = \{\varphi_i\}^T\{P(t)\} \tag{2-153}$$

M_i được gọi là khối lượng tổng quát, K_i: được gọi là độ cứng tổng quát, $P_i(t)$ - gọi là tải trọng tổng quát của dạng chính thứ i. Giữa khối lượng tổng quát và độ cứng tổng quát có sự liên hệ với nhau bởi công thức (2-60):

$$[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2[M]\{\varphi_i\}$$

Nhân trái hai vế của đẳng thức trên với $\{\varphi_i\}^T$, ta được

$$K_i = \omega_i^2 M_i \tag{2-154}$$

Sử dụng các kí hiệu (2-151), (2-152), (2-153), ta viết lại phương trình (2-150) như sau:

$$M_i\ddot{Z}_i(t) + K_i Z_i(t) = P_i(t) \tag{2-155}$$

Chia hai vế của phương trình (2-155) cho M_i, có sử dụng (2-154) ta được:

$$\ddot{Z}_i(t)+\omega_i^2 Z_i(t)=\frac{P_i(t)}{M_i} \tag{2-156}$$

Phương trình (2-156) là phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do với tần số ω_i. Giải phương trình này ta được nghiệm là tọa độ tổng quát $Z_i(t)$, nó được xác định bằng tích phân Duamen (1.185):

$$Z_i(t)=\frac{1}{M_i\omega_i}\int_0^t P_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \tag{2-157}$$

Với bài toán dao động tự do, phương trình (2-156) sẽ là:

$$\ddot{Z}_i(t)+\omega_i^2 Z_i(t)=0 \tag{2-158}$$

Nghiệm tương ứng của phương trình này như đã biết ở (1.45)

$$Z_i(t)=Z_{i,o}\cos\omega_i t+\frac{\dot{Z}_{i,o}}{\omega_i}\sin\omega_i t \tag{2-159}$$

Các $Z_{i,o}$ và $\dot{Z}_{i,o}$ được xác định từ điều kiện ban đầu ở (2-146) và biểu thức đạo hàm của nó.

Như vậy, bằng phép biến đổi và sử dụng các tọa độ tổng quát (2-145), ta đã đưa phương trình vi phân dao động có sự liên hệ trong các ma trận [K], [M] về hệ chỉ chứa các phương trình vi phân độc lập với các tọa độ tổng quát, mỗi phương trình đều ứng với hệ một bậc tự do và dễ dàng nhận được nghiệm. Dưới đây ta sẽ xét một số thí dụ minh họa và so sánh với kết quả nhận được ở phương pháp trên.

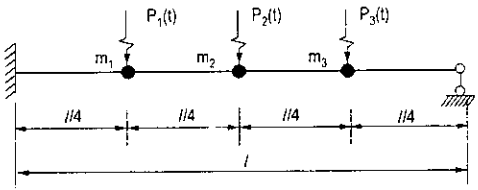
Thí dụ 2-11

Tính dao động của hệ cho ở thí dụ (2-9)

$$m_1=m_2=m_3=\frac{ml}{4}\cdot r=10\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}};$$

$P_1(t)=P_2(t)=P_3(t)=P\sin rt$.

EJ = const.



Hình 2.16

1. Tần số và dạng dao động riêng

Ở thí dụ (2-9) ta đã có:

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}15,504\\49,052\\91,53\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}} \quad ; \quad [\Phi_{ch}]=\begin{bmatrix}0,3251 & 0,6726 & 0,6664\\0,7221 & 0,277 & -0,6338\\0,6106 & -0,686 & 0,396\end{bmatrix}\frac{1}{a}$$

2- Xác định khối lượng tổng quát và tải trọng tổng quát

$M_1=1$, $M_2=1$, $M_3=1$ (vì dùng các dạng dao động riêng đã chuẩn hóa).

Các tải trọng tổng quát được xác định theo (2-153):

$$P_1(t)=\{\varphi_1\}^T\{P(t)\}=\frac{1}{a}\{0,3251\quad 0,722\quad 0,6106\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}.P\sin rt=1,6578\cdot\frac{P\sin rt}{a}$$

$$P_2(t)=\{\varphi_2\}^T\{P(t)\}=\frac{1}{a}\{0,6726\quad 0,277\quad -0,6861\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}.P\sin rt=0,2636\cdot\frac{P\sin rt}{a}$$

$$P_3(t)=\{\varphi_3\}^T\{P(t)\}=\frac{1}{a}\{0,6644\quad -0,6338\quad 0,396\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}.P\sin rt=0,4266\cdot\frac{P\sin rt}{a}$$

3. Xác định các tọa độ tổng quát: theo (2-157)

$$Z_i(t)=\frac{1}{M_i\omega_i}\int_0^t P_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau=\frac{P_i}{M_i}K_{ai}(t)$$

Trong đó:

$$K_{ai}(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t \sin r\ \tau\sin\omega_i(t-\tau)d\tau=\frac{\sin rt}{\omega_i^2-r^2}$$

Ở thí dụ (2-9) ta đã có:

$$\{K_{ai}(t)\}=\begin{Bmatrix}0,0072825\\0,0004336\\0,0001208\end{Bmatrix}\frac{ml^4}{EJ}\sin rt$$

Vậy các tọa độ tổng quát:

$$\{Z(t)\}=\begin{Bmatrix}Z_1(t)\\Z_2(t)\\Z_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1K_{a1}(t)\\P_2K_{a2}(t)\\P_3K_{a3}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,16578.0.0072825\\0,2636.0,0004336\\0,4266.0,0001208\end{Bmatrix}\frac{ml^4}{aEJ}P\sin rt$$

$$\{Z(t)\}=\begin{Bmatrix}0,01207\\0,0001142\\0,0000515\end{Bmatrix}\cdot\frac{ml^4}{aEJ}P\sin rt$$

4. Chuyển vị của các khối lượng:

$$\{Y(t)\}=[\Phi]\{Z(t)\}=\begin{bmatrix}0,3251 & 0,67265 & 0,6644\\0,7221 & 0,277 & -0,6338\\0,6106 & -0,686 & 0,396\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0,01207\\0,0001142\\0,0000515\end{Bmatrix}\frac{ml^4}{a^2EJ}P\sin rt$$

$$\{Y(t)\}=\begin{Bmatrix}0,016144\\0,034868\\0,029255\end{Bmatrix}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}\sin rt$$

Kết quả này trùng với kết quả của phương pháp tải trọng khai triển theo các dạng riêng đã xét ở thí dụ (2-9).

Thí dụ 2-12

Tính dao động của hệ cho ở thí dụ (2-10), hệ có phương trình vi phân dao động viết ở dạng:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

1. Tần số và dạng dao động riêng

Ở thí dụ (2-10) ta đã có:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{Bmatrix} \quad , \quad [\Phi_{ch}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

2- Xác định khối lượng tổng quát và tải trọng tổng quát

$M_1 = M_2 = 1$ (vì dùng các dạng dao động riêng đã chuẩn hóa).

Các tải trọng tổng quát được xác định theo (2-153).

$$P_1(t) = \{\varphi_1\}^T \{P\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$P_2(t) = \{\varphi\}^T \{P\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = -10.\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Các phương trình vi phân dao động viết với các tọa độ tổng quát theo (2-156):

$$\ddot{Z}_1(t) + 2Z_1(t) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\ddot{Z}_2(t) + 5Z_2(t) = -10\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. Xác định các tọa độ tổng quát

Nghiệm của hai phương trình vi phân trên với điều kiện ban đầu bằng không tìm được như sau:

$$Z_1(t) = \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos\sqrt{2}t)$$

$$Z_2(t) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(-1 + \cos\sqrt{5}t)$$

4. Chuyển vị của hệ

$$\{Y(t)\} = [\Phi]\{Z(t)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos\sqrt{2}\,t) \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(-1 + \cos\sqrt{5}\,t) \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\left(1-\frac{5}{3}\cos\sqrt{2}t+\frac{2}{3}\cos\sqrt{5}\,t\right)\\ \left(3-\frac{5}{3}\cos\sqrt{2}\,t-\frac{4}{3}\cos\sqrt{5}\,t\right)\end{Bmatrix}$$

Kết quả này hoàn toàn đúng với kết quả đã nhận được ở thí dụ (2-10).

Dưới đây ta sẽ tính các giá trị chuyển vị của hệ ở 12 bước thời gian, với mỗi bước $\Delta t = 0{,}28$, kết quả cho ở bảng (2-1).

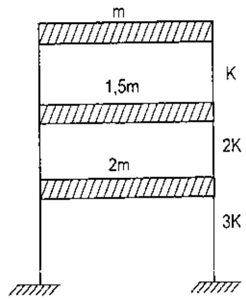
Bảng 2-1

Thời gian	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
$\{Y(t)\}$	0,003	0,038	0,376	0,486	0,996	1,66	2,338	2,861	3,052	2,806	2,131	1,157
	0,382	1,41	2,78	4,09	5,0	5,29	4,986	4,277	3,457	2,806	2,484	2,489

Thí dụ 2-13:

Tính dao động tự do của khung ba tầng cho ở thí dụ (2-3). Biết các điều kiện ban đầu của hệ:

$$\{Y\}_{(t=0)}=\{Y^{o}\}=\begin{Bmatrix}1,27\\1,01\\0,76\end{Bmatrix}\text{cm};\ \{\dot{Y}\}_{(t=0)}=\{V^{o}\}=\begin{Bmatrix}0\\22,86\\0\end{Bmatrix}\text{cm/s}$$



Hình 2.17

Các ma trận $\{\omega\}$, $[M]$, $[\Phi]$ đã có ở thí dụ (2-3)

- Xác định các tọa độ tổng quát tại thời điểm ban đầu theo biểu thức (2-146) cho cả hệ:

$$\{Z\}_{t=0}=[M_c]^{-1}[\Phi]^{T}[M]\{Y^{o}\}$$

Trong đó: $[M_c]$ là ma trận chéo chứa các phần tử là các khối lượng tổng quát ứng với các dạng dao động riêng.

$$[M_c]=\begin{bmatrix}M_1 & 0 & 0\\ 0 & M_2 & 0\\ 0 & 0 & M_3\end{bmatrix}$$

$$M_1=\{\varphi_1\}^{T}[M]\{\varphi_1\}=\{1\ \ 0,644\ \ 0,3\ \ 0,178\}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1,5&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0,644\\0,3\end{Bmatrix}=1,802.1,78$$

$$M_2=\{\varphi_2\}^{T}[M]\{\varphi_2\}=2,456.1,78$$

$$M_3 = \{\varphi_3\}^T [M]\{\varphi_3\} = 23{,}11.1{,}78$$

Ta tính:

$$[M_c]^{-1}[\Phi]^T[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1{,}802} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2{,}456} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{23{,}11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}648 & 0{,}302 \\ 1 & -0{,}602 & -0{,}678 \\ 1 & -2{,}58 & 2{,}485 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}555 & 0{,}539 & 0{,}335 \\ 0{,}407 & -0{,}367 & 0{,}552 \\ 0{,}043 & -0{,}166 & 0{,}214 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\{Z_o\} = [M_c]^{-1}[\Phi]^T[M] \begin{Bmatrix} 1{,}27 \\ 1{,}01 \\ 0{,}76 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}503 \\ -0{,}274 \\ 0{,}048 \end{Bmatrix} \text{cm}$$

- Xác định đạo hàm các tọa độ tổng quát tại thời điểm ban đầu viết cho cả hệ theo biểu thức sau:

$$\{\dot{Z}_o\} = [M_c]^{-1}[\Phi]^T[M]\{V_o\} = [M_c]^{-1}[\Phi]^T[M] \begin{Bmatrix} 0 \\ 22{,}86 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12{,}26 \\ -8{,}382 \\ -3{,}81 \end{Bmatrix} \text{cm/s}$$

- Các tọa độ tổng quát của hệ được xác định từ phương trình (2-159), ở đây viết cho cả hệ như sau:

$$\{Z(t)\} = \begin{Bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}503\cos\omega_1 t \\ -0{,}274\cos\omega_2 t \\ 0{,}048\cos\omega_3 t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}846\sin\omega_1 t \\ -0{,}27\sin\omega_2 t \\ -0{,}083\sin\omega_3 t \end{Bmatrix}$$

- Phương trình dao động tự do của hệ:

$$\{Y(t)\} = [\Phi]\{Z(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}648 & -0{,}602 & -2{,}58 \\ 0{,}302 & -0{,}678 & 2{,}485 \end{bmatrix} \{Z(t)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}503 & -0{,}274 & 0{,}048 \\ 0{,}973 & 0{,}1649 & -0{,}124 \\ 0{,}453 & 0{,}1857 & 0{,}12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\omega_1 t \\ \cos\omega_2 t \\ \cos\omega_3 t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}846 & -0{,}27 & -0{,}0838 \\ 0{,}5482 & 0{,}1625 & 0{,}2141 \\ 0{,}2555 & 0{,}1831 & -0{,}2602 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin\omega_1 t \\ \sin\omega_2 t \\ \sin\omega_3 t \end{Bmatrix}$$

§13. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN TẢI TRỌNG THEO CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG TÍNH HỆ CHỊU TẢI TRỌNG ĐIỀU HÒA

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động có quy luật thay đổi theo thời gian là quy luật điều hòa

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{Bmatrix} .\sin rt \tag{2-160}$$

thì, chuyển động của hệ khi ổn định cũng thay đổi với quy luật điều hòa, nghĩa là, nghiệm của phương trình vi phân có vế phải của phương trình:

$$[M]\{\ddot{Y}(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\} \tag{2-161}$$

Sẽ là:

$$\{Y(t)\} = \{Y\}\sin rt \tag{2-162}$$

Trong đó: $\{Y\}$ là véc tơ chứa các biên độ dao động của hệ.

Đưa (2-162) và đạo hàm bậc hai

$$\{\ddot{Y}(t)\} = r^2\{Y\}\sin rt$$

vào (2-161) ta được:

$$\left([K] - r^2[M]\right)\{Y\} = \{P\} \tag{2-163}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (2-163) dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các dạng dao động riêng chuẩn:

$$\{Y\} = [\Phi_{ch}]\{Z\} \tag{2-164}$$

Trong đó: $[\Phi_{ch}]$ là ma trận các dạng dao động riêng đã được chuẩn hóa; $\{Z\}$ là véc tơ có các phần tử là biên độ dao động của các dạng, nó chính là các tọa độ tổng quát chưa biết. Đưa (2-164) vào (2-163), ta được:

$$\left([K][\Phi_{ch}] - r^2[M][\Phi_{ch}]\right)\{Z\} = \{P\} \tag{2-165}$$

Nhân trái hai vế của phương trình (2-165) với $\{\Phi_{ch}\}^T$, ta có:

$$\left([\Phi_{ch}]^T[K][\Phi_{ch}] - r^2[\Phi_{ch}]^T[M][\Phi_{ch}]\right)\{Z\} = [\Phi_{ch}]^T\{P\} \tag{2-166}$$

Áp dụng điều kiện trực chuẩn (2-70) và (2-72) vào vế trái của phương trình (2-166), ta viết lại phương trình này như sau:

$$\left([\Omega] - r^2[E]\right)\{Z\} = [\Phi_{ch}]^T\{P\} \tag{2-167}$$

Nhân trái hai vế của phương trình (2-167) với $\left[\Omega - r^2E\right]^{-1}$, ta nhận được nghiệm là các tọa độ tổng quát:

$$\{Z\} = \left[\Omega - r^2E\right]^{-1}[\Phi_{ch}]^T\{P\} \tag{2-168}$$

Đưa (2-168) vào (2-164) ta nhận được chuyển vị của hệ:

$$\{Y\} = [\Phi_{ch}]\left[\Omega - r^2E\right]^{-1}[\Phi_{ch}]^T\{P\} \tag{2-169}$$

Ta đặt: $$[D] = \left[\Omega - r^2E\right]^{-1} \tag{2-170}$$

Đưa vào kí hiệu:

$$S_i = \frac{1}{\omega_i^2 - r^2} \tag{2-171}$$

Khi đó: $$[D] = \text{diag}(Si) \tag{2-172}$$

Nếu đặt: $$[G] = [\Phi_{ch}][D][\Phi_{ch}]^T \tag{2-173}$$

Thì: $$\{Y\} = [G]\{P\} \tag{2-174}$$

Ma trận [G] được gọi là ma trận giải thức Green.

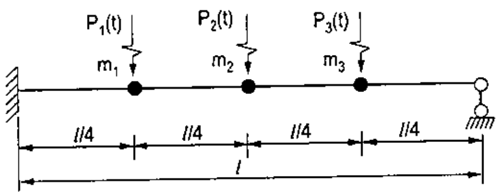
Như vậy, khi tính hệ chịu tải trọng điều hòa, ta chỉ cần xác định ma trận Green, rồi nhân với véctơ biên độ tải trọng là nhận được véctơ biên độ dao động của hệ.

Thí dụ 2-14:

Tính dao động của hệ cho ở thí dụ (2-9)

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{ml}{4};\ EJ = \text{const}$$

$$P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = P\sin rt; \qquad r = 10\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$



Hình 2.18

Ở thí dụ (2-9) ta có:

$$[\Omega] = \text{diag}\left(\omega_i^2\right) = \begin{bmatrix} 237,314 & 0 & 0 \\ 0 & 2406,1 & 0 \\ 0 & 0 & 8377,7 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{ml^4}$$

$$[\Phi_{ch}] = \begin{bmatrix} 0,3251 & 0,6726 & 0,6644 \\ 0,7221 & 0,2771 & -0,6338 \\ 0,6106 & -0,6861 & 0,396 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a}$$

Ta tính ma trận [G] theo công thức (2-173).

$$[G] = [\Phi_{ch}][D][\Phi_{ch}]^T = \begin{bmatrix} 0,3251 & 0,6726 & 0,6644 \\ 0,7221 & 0,2771 & -0,6338 \\ 0,6106 & -0,6861 & 0,396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 137,31 & 0 & 0 \\ 0 & 2306,1 & 0 \\ 0 & 0 & 8277,7 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,3251 & 0,7221 & 0,6106 \\ 0,6726 & 0,2771 & -0,6861 \\ 0,6644 & -0,6338 & 0,396 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001019 & 0,00174 & 0,001277 \\ 0,00174 & 0,00388 & 0,0031 \\ 0,001277 & 0,0031 & 0,00294 \end{bmatrix} \left(\frac{ml^4}{a^2 EJ} \right)$$

Vậy: $$\{Y\} = [G]\{P\} = [G]\begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01615 \\ 0,03488 \\ 0,02928 \end{Bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Do đó dao động của hệ:

$$\{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} 0,01615 \\ 0,03488 \\ 0,02928 \end{Bmatrix} \times \frac{Pl^3}{EJ} \sin rt$$

Kết quả này đúng với kết quả đã nhận được ở hai phương pháp trên.

§14. LỰC TƯƠNG ỨNG VỚI TRẠNG THÁI ĐỘNG VÀ MA TRẬN MỀM ĐỘNG HỌC TỔNG QUÁT CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG BẤT KÌ

1. Xác định véctơ lực tương ứng với trạng thái động của hệ hữu hạn bậc tự do chịu tải trọng động bất kì

Ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng, ta có véctơ tải trọng khai triển dạng i (2-130):

$$\{P_i\} = \frac{\{\varphi_i\}^T \{P\}}{\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\}} [M] \{\varphi_i\}$$

Giá trị tải trọng khai triển vào khối lượng K ứng với dạng dao động riêng thứ i được xác định từ biểu thức trên như sau:

$$P_{Ki} = \frac{\{\varphi_i\}^T \{P\}}{M_i} \cdot m_K \cdot \varphi_{Ki} \qquad \text{(a)}$$

Với M_i là khối lượng tổng quát thứ i.

Véctơ lực đàn hồi ứng với dạng dao động riêng thứ i được xác định theo (2-139):

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{P_i\}.K_i(t) \tag{b}$$

Với $K_i(t)$ là hệ số động học theo thời gian được xác định theo (2-140). Từ các công thức (a) và (b) ta có lực tương ứng với trạng thái động tại khối lượng K ứng với dạng dao động riêng thứ i:

$$P^i_{d,K}(t) = P_{Ki}.K_i(t) = m_K.\varphi_{Ki}\frac{\{\varphi_i\}^T\{P\}}{M_i}.K_i(t) \tag{c}$$

Do vậy, véc tơ lực tương ứng với trạng thái động ứng với dạng dao động riêng thứ i sẽ là:

$$\{P_d(t)\} = [M]\{\varphi_i\}\frac{K_i(t)}{M_i}\{\varphi_i\}^T\{P\} \tag{d}$$

Cuối cùng, véc tơ lực tương ứng với trạng thái động của cả hệ được viết như sau:

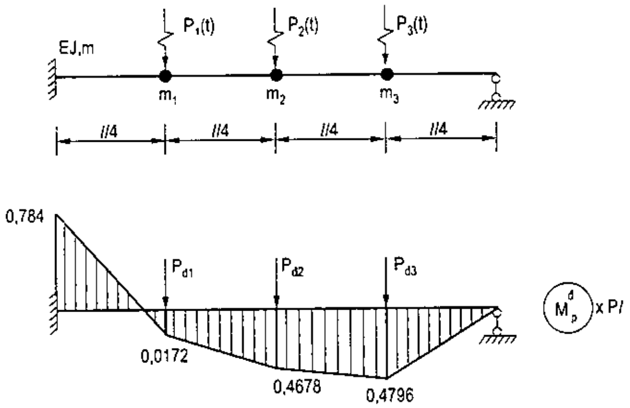
$$\{P_d(t)\} = [M][\Phi]\,\mathrm{diag}\frac{K_i(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{2-175}$$

Trong đó: $\mathrm{diag}\dfrac{K_i(t)}{M_i}$ là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng $\dfrac{K_i(t)}{M_i}$, i = 1, 2,... n; Nếu dùng các dạng dao động riêng chuẩn, thì tất cả các khối lượng tổng quát M_i đều bằng 1.

Công thức (2-175) cho phép tính trực tiếp được véctơ lực tương ứng với trạng thái động $\{P_d(t)\}$, từ đó có thể xác định nội lực và chuyển vị động của hệ dao động.

Thí dụ 2.15:

Vẽ biểu đồ mômen uốn động của hệ cho trên hình 2-19a. Biết: $m_1 = m_2 = m_3 = \dfrac{ml}{4}$; $P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = P.\sin rt$; $r = \dfrac{10}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}$, EJ = const.



Hình 2-19

Ma trận khối lượng và ma trận cứng của hệ:

$$[M]=\frac{ml}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};\qquad [K]=\frac{16EJ}{97l^3}\begin{bmatrix}7296&-4584&1728\\-4584&5568&-3720\\1728&-3720&3840\end{bmatrix}$$

Ở bài toán dao động riêng, ta có véctơ tần số và ma trận các dạng dao động riêng đã chuẩn hóa (§11).

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}15,405\\49,052\\91,53\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}};\qquad [\Phi_{ch}]=\begin{bmatrix}0,3251&0,6726&0,6644\\0,7221&0,2771&-0,6338\\0,6106&-0,6861&0,396\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{a}$$

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{ml}$$

Véctơ tải trọng động và véctơ hệ số động học theo thời gian

$$\{P(t)\}=\begin{Bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\\P_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}P.\sin rt$$

$$\{K_i(t)\}=\begin{Bmatrix}K_1(t)\\K_2(t)\\K_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1:\left(1-\dfrac{r^2}{\omega_1^2}\right)\\1:\left(1-\dfrac{r^2}{\omega_2^2}\right)\\1:\left(1-\dfrac{r^2}{\omega_3^2}\right)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1,7283\\1,0435\\1,0121\end{Bmatrix}\sin rt$$

Véctơ lực tương ứng với trạng thái động được xác định theo (2-175):

$$\{P_d(t)\}=[M][\Phi_{ch}]\operatorname{diag}K_i(t)\left[\Phi_{ch}\right]^T\{P\}$$

$$\{P_d(t)\}=a^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0,3151&0,6726&0,6644\\0,7221&0,2771&-0,6338\\0,6106&-0,6861&0,396\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,7283&0&0\\0&1,0435&0\\0&0&1,0121\end{bmatrix}\sin rt\times$$

$$\times\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0,3251&0,7221&0,6106\\0,6726&0,2771&-0,6861\\0,6644&-0,6338&0,396\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}P=\begin{Bmatrix}1,40334\\1,87151\\1,73173\end{Bmatrix}P.\sin rt$$

Giá trị lớn nhất khi sinrt = 1, tương ứng ta có:

$$\{P_d\}=\begin{Bmatrix}1,40334\\1,87151\\1,73173\end{Bmatrix}P$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn động $\left(M_p^d\right)$:

Đặt véctơ lực $\{P_d\}$ vào các khối lượng và vẽ $\left(M_p^d\right)$ hình (2.19b).

2- Xác định ma trận mềm động học tổng quát

Ở phương pháp cộng dạng dao động, có thể biểu thị véctơ chuyển vị của hệ là tổ hợp của các dạng dao động riêng với các tọa độ tổng quát (2-145):

$$\{Y(t)\} = [\Phi]\{Z_i(t)\} \tag{e}$$

Trong đó: $[\Phi]$ là ma trận các dạng dao động riêng;

$\{Z_i(t)\}$ là véc tơ có các phần tử là các tọa độ tổng quát $Z_i(t)$

$$Z_i(t) = \frac{P_i}{M_i}K_{ai}(t) = \frac{K_{ai}(t)}{M_i}\{\varphi_i\}^T\{P\}; \tag{f}$$

$$i = 1, 2, ...n$$

Với: $$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{g}$$

Từ (f) ta có thể viết véc tơ tọa độ tổng quát của cả hệ

$$\{Z_i(t)\} = \text{diag}\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{i}$$

Đưa (i) vào (e) ta được:

$$\{y(t)\} = [\Phi]\text{diag}\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{k}$$

Hay: $$y(t) = [F_d(t)]\{P\} \text{ (2-176)} \tag{2-176}$$

Trong đó: $$[F_d(t)] = [\Phi]\text{ diag }\frac{K_{ai}(t)}{M_i}[\Phi]^T\{P\} \tag{2-177}$$

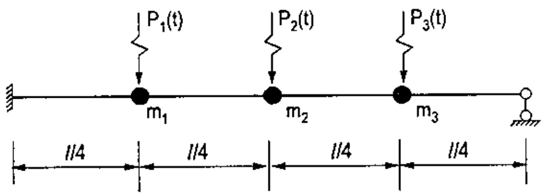
Ở bài toán tĩnh ta luôn có $\{y\} = [F]\{P\}$, với $[F]$ là ma trận mềm, vì vậy ma trận $[F_d(t)]$ ở công thức (2-176) được xác định theo (2-177) gọi là ma trận mềm động học.

Thí dụ 2.16:

Tính chuyển vị của hệ chịu tải trọng điều hòa cho ở hình 2.20. Biết: $P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = P.\sin rt$,

$$r = \frac{10}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\ ;\ m_1 = m_2 = m_3 = \frac{ml}{4}$$

EJ = const.



Hình 2.20

Ở bài toán dao động riêng, ta có véc tơ tần số và ma trận dạng dao động riêng đã chuẩn hóa:

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}15,405\\49,052\\91,53\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}\;;\quad [\Phi_{ch}]=\begin{bmatrix}0,3251 & 0,6726 & 0,6644\\0,7221 & 0,2771 & -0,6338\\0,6106 & -0,6861 & 0,396\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{a}$$

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{ml}$$

Với tải trọng điều hòa: f(t) = sinrt, ta có $K_{ai}(t)=\dfrac{\sin rt}{\omega_i^2-r^2}$

$$\{K_{ai}(t)\}=\begin{Bmatrix}K_{a1}(t)\\K_{a2}(t)\\K_{a3}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1:(\omega_1^2-r^2)\\1:(\omega_2^2-r^2)\\1:(\omega_3^2-r^2)\end{Bmatrix}\sin rt=\begin{Bmatrix}1:137,31\\1:2306,1\\1:8277,7\end{Bmatrix}\frac{ml^4}{EJ}\cdot\sin rt$$

Ma trận mềm động học được xác định theo (2-177) viết với các dạng dao động riêng chuẩn.

$$[F_d(t)]=[\Phi_{ch}]\operatorname{diag}K_{ai}(t)\,[\Phi_{ch}]^T\{P\}$$

$$[F_d(t)]=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0,3251 & 0,6726 & 0,6644\\0,7221 & 0,2771 & -0,6338\\0,6106 & -0,6861 & 0,396\end{bmatrix}\begin{bmatrix}137,31 & 0 & 0\\0 & 2306,1 & 0\\0 & 0 & 8277,7\end{bmatrix}^{-1}\frac{ml^4}{EJ}\cdot\sin rt\,\times$$

$$\times\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0,3251 & 0,7221 & 0,6106\\0,6726 & 0,2771 & -0,6861\\0,6644 & -0,6338 & 0,396\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,001019 & 0,00174 & 0,001277\\0,00174 & 0,00388 & 0,0031\\0,001277 & 0,0031 & 0,00294\end{bmatrix}\frac{ml^4}{EJa^2}\times\sin rt$$

Véc tơ chuyển vị của hệ (2-176):

$$\{y(t)\}=[F_d(t)]\{P\}=\begin{bmatrix}0,001019 & 0,00174 & 0,001277\\0,00174 & 0,00388 & 0,0031\\0,001277 & 0,0031 & 0,00294\end{bmatrix}\frac{ml^4}{EJa^2}\sin rt\begin{Bmatrix}P\\P\\P\end{Bmatrix}$$

$$\{y(t)\}=\begin{Bmatrix}0,01615\\0,03488\\0,02928\end{Bmatrix}\frac{Pl^3}{EJ}\sin rt$$

Kết quả này trùng với kết quả đã có ở các thí dụ (2-9), (2-11), (2-14)

§15. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN

1. Giả thiết về lực cản và xác định ma trận tắt dần

Khi tính dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản ta dùng giả thiết:

- Lực cản tỉ lệ với vận tốc - ma trận tắt dần thỏa mãn điều kiện trực giao và được biểu thị bằng quan hệ sau:

$$\{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_j\} = 2\omega_i\varepsilon_i\delta_{ij} \tag{2-178}$$

Trong đó: ε_i - tham số tắt dần ;

δ_{ij} - kí hiệu Crônheker:

$$\delta_{ij} = \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\}$$

Ở (2-178) ta thấy rằng: Các dạng dao động riêng của hệ khi kể đến và khi không kể đến ảnh hưởng của lực cản là trùng nhau. Chúng trực giao với nhau qua ma trận tắt dần [C]. Điều đó có nghĩa là sự tiêu hao năng lượng trong quá trình dao động của hệ được tính bằng tổng các năng lượng hấp thụ ở mỗi dạng dao động riêng. Như vậy, tác dụng của tải trọng ngòai và các điều kiện ban đầu đối với mỗi dạng dao động riêng đều có thể được tính một cách độc lập. Sự thỏa mãn điều kiện (2-178) sẽ dễ dàng cho phép tính dao động của hệ hữu hạn bậc tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản theo phương pháp khai triển theo các dạng riêng.

Phù hợp với điều kiện ma trận tắt dần thỏa mãn điều kiện trực giao. Râylây đã giả định ma trận tắt dần bằng tổ hợp của các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng:

$$[C] = a_o[M] + a_1[K] \tag{2-179}$$

Trong đó: a_o và a_1 là các hệ số tỉ lệ nào đó. Các hệ số này được xác định theo các giá trị khác nhau của tham số tắt dần và tần số dao động riêng.

Thí dụ 2.17:

Cho hai tần số dao động riêng của hệ hữu hạn bậc tự do: $\omega_1 = 2$ và $\omega_3 = 3$. Sự tắt dần tương ứng với hai dạng dao động đó bằng 2% và 10% tắt dần tới hạn, nghĩa là: $\varepsilon_1 = 0{,}02$ và $\varepsilon_2 = 0{,}1$. Hãy xác định các hệ số a_o và a_1.

Đưa ma trận tắt dần theo (2-179) vào (2-178), ta sẽ nhận được phương trình sau:

$$a_o + a_1\omega_i^2 = 2\omega_i\varepsilon_i \tag{a}$$

Thay các giá trị ω_1, ε_1 và ω_2, ε_2 vào phương trình (a), ta có:

$$\begin{cases} a_o + 4a_1 = 0{,}08 \\ a_o + 9a_1 = 0{,}6 \end{cases} \tag{b}$$

Giải hệ phương trình (b), ta được: a_o = - 0,336 và a_1 = 0,104.

Vậy ma trận tắt dần theo Râylây (2-179).

$$[C] = -0{,}336[M] + 0{,}104\,[K] \tag{c}$$

Từ phương trình (a) ta có thể nhận được tham số tắt dần ứng với các tần số dao động riêng ω_i bất kì:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2\omega_i}\left(a_o + a_1\omega_i^2\right) = \frac{-0,336 + 0,104\omega_i^2}{2\omega_i} \tag{d}$$

Trong các bài toán thực tế, các tham số tắt dần có thể lớn hơn 2, khi đó, để tính a_o và a_1 ta dùng hai cặp giá trị trung bình của các tham số tắt dần và tần số dao động riêng. Ta xét thí dụ sau đây:

Thí dụ 2.18:

Cho các giá trị tần số dao động riêng và tham số tắt dần:

$$\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 3,\ \omega_3 = 7,\ \omega_4 = 15,\ \omega_5 = 19,$$
$$\varepsilon_1 = 0{,}02,\ \varepsilon_2 = 0{,}03,\ \varepsilon_3 = 0{,}04,\ \varepsilon_4 = 0{,}01,\ \varepsilon_5 = 0{,}14$$

Hãy xác định các hệ số a_o và a_1

Các hệ số a_o và a_1 nhận được từ phương trình do phép thế (1.179) vào (2-178):

$$a_o + a_1\omega_i^2 = 2\omega_i\varepsilon_i \tag{a}$$

Để xác định 2 hệ số a_o và a_1 ta phải sử dụng hai cặp giá trị trung bình của các ω_i và ε_i, ta kí hiệu là:

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\varepsilon}_1) \text{ và } (\bar{\omega}_2, \bar{\varepsilon}_2)$$

Ở đây ta lấy:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 4\,; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0{,}03$$
$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\omega_4 + \omega_5) = 17; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_4 + \varepsilon_5) = 0{,}12 \tag{b}$$

Thế các giá trị ở (b) vào (a), ta nhận được hệ 2 phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} a_o + 16a_1 &= 0{,}24 \\ a_o + 289a_1 &= 4{,}08 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Giải (c), ta được: $a_o = 0{,}0498$, $a_1 = 0{,}01405$. Vậy ma trận tắt dần theo Râylây (2-179) là:

$$[C] = 0{,}01498\ [M] + 0{,}01405\ [K] \tag{d}$$

Thay a_o và a_1 vào phương trình (a) ta sẽ tính được biểu thức xác định các tham số tắt dần ứng với các tần số dao động riêng bất kì:

$$\varepsilon_i = \frac{0{,}01498 + 0{,}01405\omega_i^2}{2\omega_i} \tag{e}$$

Trong trường hợp tổng quát, như đã biết ở phần trên: điều kiện trực giao của các dạng dao động riêng còn được thỏa mãn đối với tích của số không hạn chế các ma trận được tạo nên từ ma trận độ cứng và ma trận khối lượng (2-65). Vì vậy, ma trận trực giao tắt dần có thể được biểu thị bằng tổ hợp của các ma trận đó:

$$[C] = [M]\sum_k a_k\left[M^{-1}K\right]^k \tag{2-180}$$

Trong đó: Các hệ số a_k được xác định từ việc giải hệ n phương trình sau:

$$2\omega_i\varepsilon_i = a_o + a_1\omega_i^2 + a_2\omega_i^4 + ... + a_{n-1}\omega_i^{2(n-1)} \qquad (2\text{-}181)$$

Cần thấy thêm rằng: Khi k = 1 ma trận tắt dần (2-180) sẽ dẫn đến ma trận tắt dần theo Râylây (2-179).

2. Tính dao động cưỡng bức theo phương pháp khai triển tải trong theo các dạng riêng có xét đến lực cản

Khi phân tích dao động của hệ thành các dạng riêng, ta xem chuyển vị của hệ bằng tổng các chuyển vị thành phần, trong đó mỗi chuyển vị thành phần tương ứng với một dạng dao động riêng. Bài toán xét chuyển vị đối với từng thành phần là bài toán dao động của hệ một bậc tự do. Khi xét dao động cưỡng bức có kể đến ảnh hưởng của lực cản, phù hợp với giả thiết ở trên ta có thể xét một cách độc lập từng dạng dao động thành phần như hệ một bậc tự do.

Phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tải trọng động bất kì có xét đến ảnh hưởng của lực cản như đã biết (1-196):

$$y(t) = \frac{1}{M\omega_c}\int_o^t P_{(\tau)}e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)d\tau$$

Hoặc có thể viết:

$$y(t) = \frac{P}{M}K_a(t)$$

Trong đó:

$$K_a(t) = \frac{1}{\omega_c}\int_o^1 f_{(\tau)}e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)d\tau$$

Đối với hệ hữu hạn bậc tự do, ta vẫn sử dụng công thức (2-132) để xác định các tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng, chỉ có véctơ các hệ số ảnh hưởng động học sẽ kể đến ảnh hưởng của lực cản phù hợp với hệ số $K_a(t)$ ở trên. Cụ thể đối với các phần tử $K_{ai}(t)$ theo (2-136) được viết như sau:

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_{i,c}}\int_o^t f_{(\tau)}e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_{i,c}(t-\tau)\,d\tau \qquad (2\text{-}182)$$

Chuyển vị của hệ vẫn được xác định theo công thức (2-137)

$$\{Y(t)\} = [M]^{-1}[P_{Kh}]\{K_{ai}(t)\}$$

3. Tính dao động cưỡng bức theo phương pháp tọa độ tổng quát có xét đến lực cản

Trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình vi phân biểu thị dao động đối với các tọa độ tổng quát (2-155) sẽ có dạng sau (Ở đây không trình bày, vì quá trình tiến hành tương tự như thiết lập phương trình (2-155)):

$$M_i Z_i(t) + C_i Z_i(t) + K_i Z_i(t) = P_i(t) \tag{2-183}$$

Trong đó:

$$C_i = \{\varphi_i\}^T [C] \{\varphi_i\} = 2\omega_i \varepsilon_i M_i$$

Phương trình (2-183) được viết lại:

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\omega_i \varepsilon_i \dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{P_i(t)}{M_i} \tag{2-184}$$

Đây chính là phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do ứng với tần số ω_i đối với hệ có khối lượng tổng quát M_i, độ cứng tổng quát K_i, chịu tải trọng tổng quát $P_i(t)$, và hệ có hệ số tắt dần tổng quát C_i. Tọa độ tổng quát $Z_i(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân (2-184).

$$Z_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{i,c}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\omega_i \varepsilon_i (t-\tau)} . \sin \omega_{i,c}(t-\tau) d\tau \tag{2-185}$$

Chuyển vị của hệ là tổ hợp của các dạng riêng được tính theo (2-145):

$$\{Y(t)\} = [\Phi] \{Z(t)\}$$

Trong đó: $\{Z(t)\}$ là véc tơ có các phần tử được xác định theo (2-185).

Trình tự tính toán hệ dao động hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động bất kì được tiến hành như sau:

1. Xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ. Đối với các bài toán cỡ lớn, ta phải giảm cỡ bài toán và chỉ xác định một số tần số và dạng dao động riêng thấp.

2- Phân tích tải trọng tác dụng lên hệ ra các tải trọng khai triển theo từng dạng dao động riêng; hoặc xác định các tọa độ tổng quát ứng với các dạng dao động riêng, theo (2-130) hoặc (2-185).

3. Xác định chuyển vị của hệ từ kết quả nhận được ma trận tải trọng khai triển, hoặc ma trận các tọa độ tổng quát ở bước trên, theo (2-137) hoặc (2-145).

4. Xác định lực đàn hồi để tính nội lực của hệ.

$$\{P_d(t) = [K] \{Y(t)\}$$

Ở phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng, lực đàn hồi có thể được tính trực tiếp từ ma trận tải trọng khai triển theo các dạng chính dao động. Trên cơ sở đã xác định được lực đàn hồi, ta có thể tìm được chuyển vị và nội lực của một điểm bất kì trên hệ, ở phương pháp tọa độ tổng quát, lực đàn hồi phải tính qua chuyển vị $\{Y\}$ và ma trận cứng [K].

§16. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TRỰC TIẾP

Phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do như đã biết:

$$\mathbf{M\ddot{Y}_t + CY_t + KY_t = P_t} \tag{2-186}$$

Nghiệm của các phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do hoặc hữu hạn bậc tự do đều có thể tìm được bằng các phương pháp tích phân trực tiếp, ở đây phương trình (2-186) được lấy tích phân theo các trình tự bước số đặc biệt. Việc lấy tích phân số trực tiếp được tiến hành trên các đoạn thời gian ngắn và phải đảm bảo điều kiện cân bằng lực của phương trình (2-186), trong đó có tính đến lực quán tính, lực cản tại các điểm rời rạc của khoảng thời gian khảo sát. Quá trình này rất thích hợp và có hiệu quả khi sử dụng máy tính điện tử.

Giả sử các véctơ chuyển vị, véctơ tốc độ và véctơ gia tốc tại thời điểm ban đầu t = 0: $\mathbf{Y_o}$ $\mathbf{\dot{Y}_o}$, $\mathbf{\ddot{Y}_o}$ là đã biết và ta cần phải tìm nghiệm của phương trình vi phân (2-186) trong khoảng thời gian từ không đến T. Ta chia khoảng thời gian ra n đoạn bằng nhau và bằng nhau và bằng Δt:

$$\mathbf{\Delta t = \frac{T}{n}}$$

Các giá trị cần tìm ở thời điểm sau phải sử dụng các giá trị đã biết ở thời điểm trước. Quá trình tính của các phương pháp tích phân trực tiếp sẽ cho các nghiệm gần đúng tại các thời điểm rời rạc của khoảng thời gian chia 0, Δt, 2Δt,..., T. Dưới đây sẽ trình bày một số phương pháp tích phân trực tiếp.

Ở phần này, các đại lượng in nét đậm đều biểu thị ma trận hoặc véc tơ.

1. Phương pháp sai phân hữu hạn

Từ việc khảo sát (2-186) như việc khảo sát các hệ phương trình vi phân thông thường có hệ số hằng số, ta có thể biểu thị gần đúng các gia tốc và tốc độ bằng các biểu thức sai phân hữu hạn của các chuyển vị, nghĩa là, ta dùng sai phân của hàm số thay cho các vi phân của hàm số. Có nhiều phương pháp sai phân khác nhau để biểu thị gần đúng gia tốc và tốc độ, phương pháp sai phân đúng tâm là một trong các phương pháp có hiệu quả để giải các bài toán cụ thể. Ở phương pháp này hàm chuyển vị được biểu thị bằng một đa thức nội suy là đa thức parabol bậc hai. Khi đó ta có biểu thức gần đúng của gia tốc và tốc độ tại thời điểm t như sau:

$$\mathbf{\ddot{Y}_t = \frac{Y_{t-\Delta t} - 2Y_t + Y_{t+\Delta t}}{\Delta t^2}} \tag{2-187}$$

$$\mathbf{\dot{Y}_t = \frac{Y_{t+\Delta t} - Y_{t-\Delta t}}{2\Delta t}} \tag{2-188}$$

Chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) được tính từ quan hệ (2-186) tại thời điểm t (từ điều kiện cân bằng lực tại thời điểm t):

$$M\ddot{Y}_t + C\dot{Y}_t + KY_t = P_t \quad (2\text{-}189)$$

Thế (2-187) và (2-188) vào (2-189) ta được phương trình:

$$K^* Y_{t+\Delta t} = P_t^* \quad (2\text{-}190)$$

Trong đó:

$$K^* = \frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C \quad (2\text{-}191)$$

$$P_t^* = P_t - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right)Y_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right)Y_{t-\Delta t} \quad (2\text{-}192)$$

Từ (2-190) ta thấy rằng: Chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) $Y_{t+\Delta t}$ được tính qua các chuyển vị tại các thời điểm t và (t - Δt): Y_t và $Y_{t-\Delta t}$. Vậy để tính chuyển vị tại thời điểm Δt: $Y_{\Delta t}$ phải biết được các chuyển vị tại các thời điểm t = 0 và t = - Δt: Y_o và $Y_{-\Delta t}$. Chuyển vị Y_o là điều kiện ban đầu đã biết, còn $Y_{-\Delta t}$ được xác định như sau. Ở phương trình (2-187) và (2-188) ta thay t = 0, sẽ được:

$$\Delta t^2 \ddot{Y}_o = Y_{-\Delta t} - 2Y_o + Y_{\Delta t}$$

$$2\Delta t \dot{Y} = -Y_{-\Delta t} + Y_{\Delta t}$$

Từ hai phương trình này ta sẽ có:

$$Y_{-\Delta t} = Y_o - \Delta t \dot{Y}_o + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{Y}_o \quad (2\text{-}193)$$

Trong đó: $\dot{Y}_o$ là điều kiện ban đầu đã biết, còn gia tốc $\ddot{Y}_{(o)}$ được xác định từ phương trình vi phân dao động ứng với thời điểm ban đầu (2-189):

$$\ddot{Y}_o = M^{-1}(P_o - C\dot{Y}_o - KY_o) \quad (2\text{-}194)$$

Quá trình tính theo các bước thời gian được tiến hành theo các công thức: (2-192) và (2-190).

Vấn đề chọn bước thời gian đối với các phương pháp tích phân trực tiếp là vấn đề rất quan trọng, nó liên quan đến độ chính xác của kết quả tính toán và sự ổn định của sơ đồ tích phân. Nếu chọn bước thời gian càng nhỏ thì kết quả tính càng chính xác nhưng khối lượng tính càng nhiều, và ngược lại, nếu chọn bước thời gian càng lớn thì khối lượng tính sẽ ít đi, nhưng kết quả tính sẽ không đảm bảo chính xác. Vì vậy, phải chọn bước thời gian đủ nhỏ để đạt được độ chính xác cần thiết và chi phí tính toán vừa phải.

Đối với phương pháp sai phân đã khảo sát ở trên, để nhận được nghiệm đủ tin cậy, thì bước thời gian phải chọn thỏa mãn điều kiện sau:

$$\Delta t \le \Delta t_{gh} = \frac{T_n}{\pi} \quad (2\text{-}195)$$

Trong đó: T_n là chu kì dao động riêng nhỏ nhất của hệ (ứng với tần số dao động riêng lớn nhất).

Trình tự tính toán của phương pháp sai phân được tiến hành như sau:

1. Xác định các ma trận độ cứng, ma trận tắt dần và ma trận khối lượng của hệ: **K, C, M**;

2. Xác định điều kiện ban đầu $\ddot{\mathbf{Y}}_o$ từ $\dot{\mathbf{Y}}_o$ và $\mathbf{Y}_o$ theo (2-194);

3. Chọn bước thời gian Δt thỏa mãn (2-195);

4. Xác định $\mathbf{Y}_{-\Delta t}$ theo (2-193);

5. Xác định ma trận K^* theo (2-191);

6. Xác định véc tơ tải trọng tại thời điểm t: $\mathbf{P}_t^*$ theo (2-192);

7. Tính chuyển vị ở thời điểm $(t + \Delta t)$ từ phương trình (2-190).

Việc xác định tải trọng $\mathbf{P}_t^*$ và giải phương trình: $\mathbf{K}^*\ \mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_t^*$ được tính và lập lại ở mỗi bước.

Khi cần thiết xác định các giá trị gia tốc và tốc độ chuyển động, ta sử dụng các biểu thức (2-187) và (2-188).

Thí dụ 2.19

Cho hệ hai bậc tự do có phương trình cân bằng lực:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Giá trị các chu kì dao động riêng của hệ: $T_1 = 4{,}45$; $T_2 = 2{,}8$.

Cho điều kiện ban đầu: tại $t = 0$, $\mathbf{Y}_o = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$.

Hãy khảo sát dao động của hệ với 12 bước thời gian với hai trường hợp:

$$\Delta t = \frac{T_2}{10} = 0{,}28 \text{ và } \Delta t = 10T_2 = 28$$

a) Tính với trường hợp $\Delta t = 0{,}28 < \Delta t_{gh} = \dfrac{T_2}{\pi} = 0{,}89.$

- Xác định $\ddot{\mathbf{Y}}_o$ theo (2-194) với $\mathbf{Y}_o = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{Y}}_o = \mathbf{0}$, ta có:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_o = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_o = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

- Xác định $\mathbf{Y}_{-\Delta t}$ theo (2-193):

$$\mathbf{Y}_{-\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 0{,}28 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{0{,}28^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}392 \end{Bmatrix}$$

Xác định ma trận $\mathbf{K}^*$ theo (2-191):

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{0{,}28^2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{2.0{,}28}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25{,}51 & 0 \\ 0 & 12{,}755 \end{bmatrix}$$

- Xác định véc tơ $\mathbf{P}_t^*$ theo (2-192):

$$\mathbf{P}_t^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 45 & 2 \\ 2 & 21,5 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_t - \begin{bmatrix} 25,51 & 0 \\ 0 & 12,755 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_{t-\Delta t}$$

Chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) tìm được bằng việc giải phương trình (2-190) đối với mỗi bước thời gian:

$$\begin{bmatrix} 25,51 & 0 \\ 0 & 12,755 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_t^*$$

Quá trình tính đối với 12 bước thời gian ta có kết quả ghi ở bảng 2-2:

Bảng 2-2

Thời gian	Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	7Δt	8Δt	9Δt	10Δt	11Δt	12Δt
$\{Y_t\}$	0	0,0307	0,168	0,487	1,02	1,7	2,40	2,91	3,07	2,77	2,04	1,02
	0,392	1,45	2,83	4,14	5,02	5,26	4,90	4,17	3,37	2,78	2,54	2,60

Các kết quả nhận được có thể so sánh với các giá trị chính xác đã nhận được ở thí dụ (2-12).

b) Tính với trường hợp $\Delta t = 10 \quad T_2 = 28 > \Delta t_{gh} = 0,89$

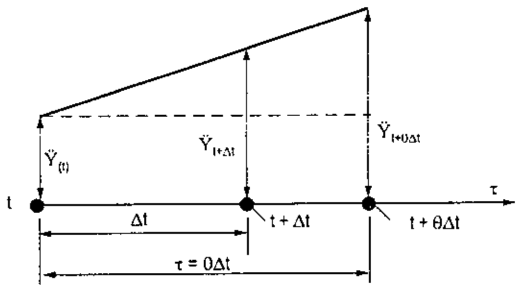
Ta lập lại quá trình tính tương tự như trên sẽ nhận được kết quả:

$$\mathbf{Y}_{\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,83.10^3 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{Y}_{2\Delta t} = \begin{Bmatrix} 3,03.10^6 \\ -1,21.10^7 \end{Bmatrix}$$

Các chuyển vị tính được ở các bước thời gian sau cũng tiếp tục tăng. Sự tăng các giá trị này là do hậu quả của sự không ổn định của sơ đồ tích phân sử dụng do bước thời gian không thỏa mãn điều kiện (2-195).

2. Phương pháp gia tốc tuyến tính

Phương pháp gia tốc tuyến tính xem rằng: Sự thay đổi của gia tốc chuyển động trong mỗi bước thời gian từ t đến (t + Δt) là tuyến tính. Vinson đã phát triển phương pháp này và giả thiết rằng: Sự thay đổi tuyến tính của gia tốc từ t đến (t +θΔt), trong đó θ ≥ 1. Để đảm bảo sự ổn định vô điều kiện của sơ đồ tích phân thì: θ ≥ 1,37, thường lấy θ = 1,4.



Hình 2.21

Ta kí hiệu gia số thời gian qua biến τ, trong đó: $0 \le \tau \le \theta\Delta t$. Từ hình vẽ 2.21 ta có:

$$\ddot{Y}_{t+\tau} = \ddot{Y}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{Y}_t) \tag{2-196}$$

Trong đó: $0 \le \tau \le \theta\Delta t$.

Tích phân hai vế đẳng thức trên, ta được

$$\dot{Y}_{t+\tau} = \dot{Y}_t + \ddot{Y}_t.\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{Y}_t) \tag{2-197}$$

Tích phân tiếp hai vế (2-197), ta được:

$$Y_{t+\tau} = Y_t + \dot{Y}_t.\tau + \frac{1}{2}\ddot{Y}_t\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{Y}_t) \tag{2-198}$$

Tính các biểu thức (2-197) và (2-198) tại thời điểm $(t + \theta\Delta t)$, ta có:

$$\dot{Y}_{t+\theta\Delta t} = \dot{Y}_t + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{Y}_t) \tag{2-199}$$

$$Y_{t+\theta\Delta t} = Y_t + \theta\Delta t\dot{Y}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{Y}_t) \tag{2-200}$$

Từ các biểu thức (2-200) và (2-199) ta có thể biểu thị $\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t}$ và $\dot{Y}_{t+\theta\Delta t}$ qua chuyển vị $Y_{t+\theta\Delta t}$ như sau:

$$\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(Y_{t+\theta\Delta t} - Y_t) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{Y}_t - 2\ddot{Y}_t \tag{2-201}$$

$$\dot{Y}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}(Y_{t+\theta\Delta t} - Y_t) - 2\dot{Y}_t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{Y}_t \tag{2-202}$$

Để xác định các chuyển vị, tốc độ, gia tốc của hệ tại thời điểm $(t + \Delta t)$, ta sẽ khảo sát phương trình vi phân dao động (2-186) tại thời điểm $(t + \theta\Delta t)$.

$$M\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{Y}_{t+\theta\Delta t} + KY_{t+\theta\Delta t} = P_{t+\theta\Delta t} \tag{2-203}$$

Trong đó: $P_{t+\theta\Delta t}$ là tải trọng ứng với thời điểm $(t + \theta\Delta t)$, nó được tính trên cơ sở xem rằng: Khi gia tốc chuyển động thay đổi tuyến tính thì tải trọng cũng thay đổi tuyến tính, do đó:

$$P_{t+\theta\Delta t} = P_t + \theta(P_{t+\Delta t} - P_t) \tag{2-204}$$

Thế các biểu thức (2-201), (2-202) vào (2-203), ta nhận được phương trình để xác định $Y_{t+\theta\Delta t}$:

$$K^* Y_{t+\theta\Delta t} = P^*_{t+\theta\Delta t} \tag{2-205}$$

Trong đó: $$K^* = K + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}M + \frac{3}{\theta\Delta t}C \tag{2-206}$$

$$P^*_{t+\theta\Delta t} = P_t + \theta(P_{t+\Delta t} - P_t) + M\left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}Y_t + \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{Y}_t + 2\ddot{Y}_t\right) +$$

$$+c\left(\frac{3}{\theta\Delta t}Y_t + 2\dot{Y}_t + \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{Y}_t\right) \tag{2-207}$$

Đưa giá trị $Y_{t+\theta\Delta t}$ vào (2-201) ta sẽ được $\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t}$, sau đó thế $\ddot{Y}_{t+\theta\Delta t}$, vào các biểu thức (2-202), (2-197), (2-198) khi $\tau = \Delta t$ ta sẽ được: $Y_{t+\Delta t}$, $\dot{Y}_{t+\Delta t}$, $\ddot{Y}_{t+\Delta t}$.

$$\ddot{Y}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{3}{\theta}\right)\ddot{Y}_t - \frac{6}{\theta^2\Delta t}\dot{Y}_t + \frac{6}{\theta^3\Delta t^2}(Y_{t+\theta\Delta t} - Y_t) \tag{2-208}$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{2}\ddot{Y}_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\ddot{Y}_t + \dot{Y}_t \tag{2-209}$$

$$Y_{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{Y}_{t+\Delta t} + 2\ddot{Y}_t) + \Delta t\,\dot{Y}_t + Y_t \tag{2-210}$$

Để nhận được kết quả tính toán gần sát với dao động thực của kết cấu khảo sát, ta cần chọn bước thời gian bằng 10% chu kì dao động riêng thấp nhất của hệ, tức là:

$$\Delta t = \frac{T_n}{10}$$

Trình tự tính toán của phương pháp gia tốc tuyến tính được tiến hành như sau:

1. Xác định các ma trận độ cứng, ma trận tắt dần và ma trận khối lượng của hệ: **K, C, M**.
2. Xác định điều kiện ban đầu $\ddot{Y}_o$ từ Y_o và $\dot{Y}_o$ theo (2-194);
3. Chọn bước thời gian Δt;
4. Xác định ma trận K^* theo (2-206);
5. Xác định tải trọng $P^*_{t+\theta\Delta t}$ theo (2-207);
6. Tính các chuyển vị tại thời điểm $(t + \theta\Delta t)$ từ việc giải phương trình (2-205);
7. Tính các chuyển vị, tốc độ và gia tốc tại thời điểm $(t + \Delta t)$ theo (2-208), (2-209), (2-210).

Việc xác định tải trọng $P^*_{t+\theta\Delta t}$, giải phương trình: $K^*\ Y^*_{t+\theta\Delta t} = P^*_{t+\theta\Delta t}$ và tính $\ddot{Y}_{t+\Delta t}$, $\dot{Y}_{t+\Delta t}$, $Y_{t+\Delta t}$ ở các trình tự thứ 5, 6, 7 được tính và lặp lại ở mỗi bước thời gian.

Thí dụ 2-20

Xét dao động của hệ đã có ở thí dụ (2-19) theo phương pháp gia tốc tuyến tính. Lấy $\theta = 1{,}4$.

Ở thí dụ (2-19) ta đã có điều kiện ban đầu:

$$Y_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},\ \dot{Y}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},\ \ddot{Y}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Chọn bước thời gian $\Delta t = \frac{T_2}{10} = 0,28.$

- Xác định ma trận $\mathbf{K}^*$ theo (2-206):

$$K^* = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{6}{(1,4.0,28)^2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,1 & -2 \\ -2 & 43 \end{bmatrix}$$

Ở mỗi bước cần phải tính:

- Tải trọng $\mathbf{P}^*_{t+\theta\Delta t}$ theo (2-207)

$$P^*_{t+\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{39\,Y_t + 15,3\,\dot{Y}_t + 2\ddot{Y}_t\right\}$$

Xác định chuyển vị tại thời điểm (t + θΔt) từ phương trình (2-205):

$$K^* Y_{t+\theta\Delta t} = P^*_{t+\theta\Delta t}$$

-Tính các gia tốc, tốc độ và chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) theo (2-208), (2-209), (2-210):

$$\ddot{Y}_{t+\Delta t} = 27,9(Y_{t+\theta\Delta t} - Y_t) - 10,9\,\dot{Y}_t - 1,14\ddot{Y}_t$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = \dot{Y}_t + 0,14(\ddot{Y}_{t+\Delta t} + \ddot{Y}_t)$$

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + 0,28\dot{Y}_t + 0,0131(\ddot{Y}_{t+\Delta t} + 2\ddot{Y}_t)$$

Quá trình tính với 12 bước cho kết quả ghi ở bảng (2-3):

Bảng 2-3

Thời gian		Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	7Δt	8Δt	9Δt	10Δt	11Δt	12Δt
$\{Y_t\} = \begin{Bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{Bmatrix}$	y_{1t}	0,006	0,0525	0,196	0,49	0,952	1,54	2,16	2,67	2,92	2,82	2,33	1,54
	y_{2t}	0,366	1,34	2,64	3,92	4,48	5,31	5,18	4,61	3,82	3,06	2,52	2,29

Các kết quả nhận được có thể so sánh với các giá trị chính xác của thí dụ (2-12).

3. Phương pháp gia tốc trung bình không đổi

Phương pháp gia tốc trung bình không đổi giả thiết rằng: Ở mỗi bước thời gian Δt gia tốc chuyển động bằng hằng số và được tính bằng giá trị trung bình ở hai giá trị đầu và cuối của khoảng Δt:

$$\ddot{Y}_{t+\tau} = \frac{\ddot{Y}_{t+\Delta t} + \ddot{Y}_t}{2} \tag{2-211}$$

Trong đó: $0 \le \tau \le \Delta t$

Tích phân hai vế đẳng thức trên, ta được:

$$\dot{Y}_{t+\tau} = \dot{Y}_t + \tau\frac{\ddot{Y}_{t+\Delta t} + \ddot{Y}_t}{2} \tag{2-212}$$

Tích phân tiếp hai vế của (2-212) ta được:

$$\mathbf{Y}_{t+\tau} = \mathbf{Y}_t + \tau\dot{\mathbf{Y}}_t + \tau^2 \frac{\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{Y}}_t}{4} \tag{2-213}$$

Sử dụng các biểu thức (2-212) và (2-213), ta tính chuyển vị và tốc độ tại thời điểm cuối khoảng Δt, ứng với τ = Δt.

$$\dot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{Y}}_t + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{Y}}_t) \tag{2-214}$$

$$\mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{Y}_t + \Delta t\dot{\mathbf{Y}}_t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{Y}}_t) \tag{2-215}$$

Bây giờ ta viết các biểu thức $\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}$ và $\dot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}$ qua $\ddot{\mathbf{Y}}_t$, $\dot{\mathbf{Y}}_t$, $\mathbf{Y}_t$ và $\mathbf{Y}_{t+\Delta t}$

Từ (2-215) ta có:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{Y}_{t+\Delta t} - \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{Y}_t - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{Y}}_t - \ddot{\mathbf{Y}}_t \tag{2-216}$$

Thế biểu thức (2-216) vào (2-214) ta được:

$$\dot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}\mathbf{Y}_{t+\Delta t} - \frac{2}{\Delta t}\mathbf{Y}_t - \dot{\mathbf{Y}}_t \tag{2-217}$$

Để xác định các giá trị chuyển vị của hệ tại thời điểm (t + Δt), ta xét phương trình vi phân chuyển động của hệ tại thời điểm (t + Δt):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \tag{2-218}$$

Sau khi đưa các biểu thức (2-216) và (2-217) vào (2-218) ta sẽ nhận được phương trình để xác định $\mathbf{Y}_{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{K}^*\mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}^*_{t+\Delta t} \tag{2-219}$$

Trong đó:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} \tag{2-220}$$

$$\mathbf{P}^*_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{Y}_t + \frac{4}{\Delta t} + \dot{\mathbf{Y}}_t + \ddot{\mathbf{Y}}_t\right) + \mathbf{C}\left(\frac{2}{\Delta t}\mathbf{Y}_t + \dot{\mathbf{Y}}_t\right) \tag{2-221}$$

Quá trình các bước tính được tiến hành theo các công thức (2-221), (2-219), (2-216), (2-217). ở thời điểm ban đầu gia tốc $\ddot{\mathbf{Y}}_0$ được xác định theo biểu thức (2-194).

Việc chọn bước thời gian ở phương pháp này cũng lấy như phương pháp gia tốc tuyến tính $\Delta t = \frac{T_n}{10}$.

Trình tự tính toán của phương pháp gia tốc trung bình không đổi được tiến hành như sau:

1. Xác định các ma trận độ cứng, ma trận tắt dần và ma trận khối lượng **K, C, M**;

2- Xác định điều kiện ban đầu $\ddot{Y}_o$, $\dot{Y}_o$, Y_o;

3. Chọn bước thời gian;

4. Xác định ma trận K^* theo (2-220);

5. Xác định tải trọng $P^*_{t+\Delta t}$ theo (2-221);

6. Tính chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) từ việc giải phương trình (2-219);

7. Tính tốc độ và gia tốc tại thời điểm (t + Δt) theo các công thức (2-216) và (2-217).

Trong quá trình tính toán với các bước thời gian, các trình tự thứ 5, 6, 7 được tính và lập lại ở mỗi bước.

Thí dụ 2.21

Xét dao động của hệ đã cho ở thí dụ (2-19) theo phương pháp gia tốc trung bình không đổi.

Ở thí dụ (2-19) ta đã có các điều kiện ban đầu:

$$Y_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{Y}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \ddot{Y}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Chọn bước thời gian: $\Delta t = \dfrac{T_n}{10} = 0,28.$

- Xác định ma trận K^* theo (2-220):

$$K^* = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{4}{0,28^2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}$$

Ở mỗi bước, cần tính:

- Tải trọng $P^*_{t+\Delta t}$ theo (2-221)

$$P^*_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(51Y_t + 14,3\,\dot{Y}_t + \ddot{Y}_t)$$

- Xác định chuyển vị tại thời điểm (t + Δt) bằng việc giải phương trình (2-219):

$$K^* Y_{t+\Delta t} = P^*_{t+\Delta t}$$

- Tính gia tốc và tốc độ tại thời điểm (t + Δt) theo (2-216) và (2-217):

$$\ddot{Y}_{t+\Delta t} = 51(Y_{t+\Delta t} - Y_t) - 14,3\dot{Y}_t - \ddot{Y}_t$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = \dot{Y}_t + 0,14(\ddot{Y}_t + \ddot{Y}_{t+\Delta t})$$

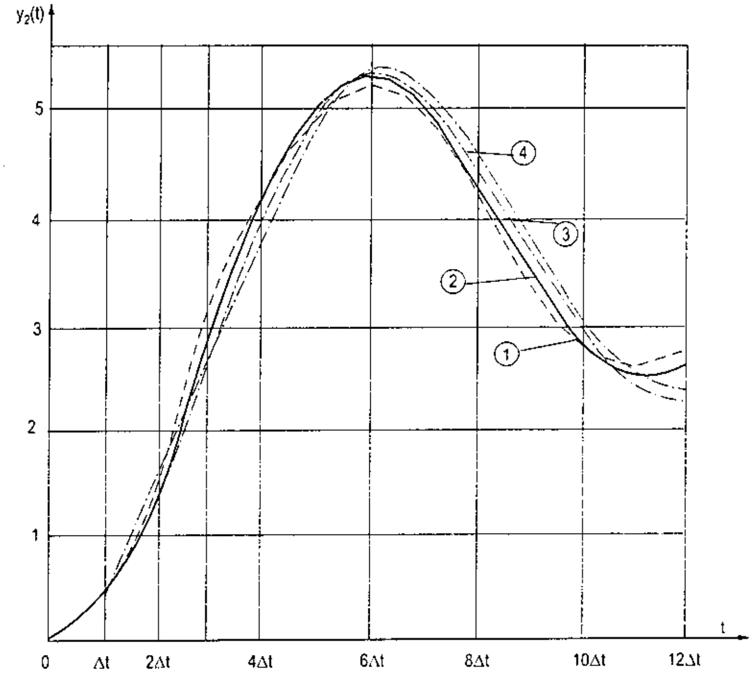
Quá trình tính với 12 bước cho kết quả ghi ở bảng 2-4:

Bảng 2-4

Thời gian	Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	7Δt	8Δt	9Δt	10Δt	11Δt	12Δt
$\{Y_i\}$	0,0067 0,364	0,0504 1,35	0,189 2,68	0,485 4	0,961 4,95	1,58 5,34	2,23 5,13	2,76 4,48	3 3,64	2,85 2,9	2,28 2,44	1,4 2,31

Các kết quả nhận được có thể so sánh với các giá trị chính xác ở thí dụ (2-13).

Trên hình 2.22 mô tả chuyển vị $Y_2(t)$ của hệ được khảo sát trong các thí dụ (2-10), (2-19), (2-20), (2-21).



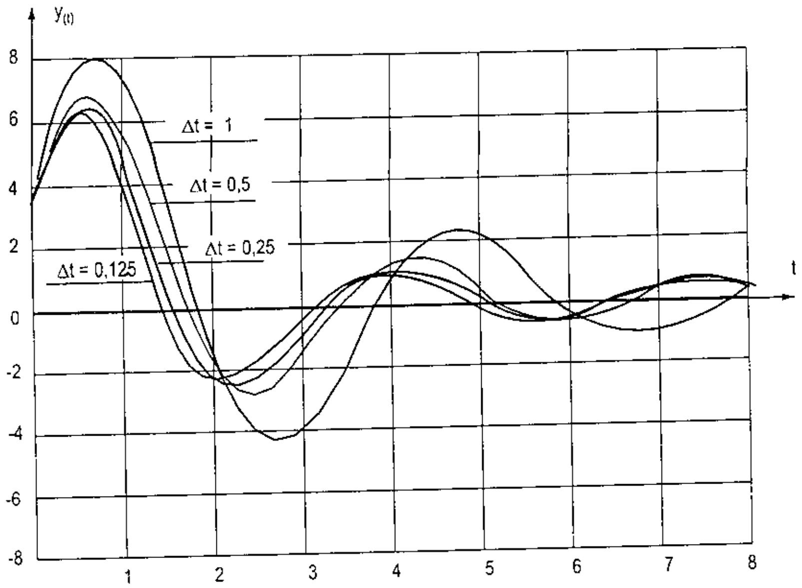
Hình 2.22

1) Phương pháp sai phân hữu hạn; 2) Phương pháp chính xác

3) Phương pháp gia tốc trung bình không đổi. 4) Phương pháp gia tốc tuyến tính.

Các phương pháp tích phân trực tiếp ở trên đều có thể áp dụng được đối với hệ một bậc tự do.

Trên hình 2.23 mô tả dao động tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản của hệ một bậc tự do với điều kiện ban đầu: $y_0 = 3$, $v_0 = 15$. Hệ có tham số tắt dần $\varepsilon = 0,3$, tần số dao động riêng $\omega = 2$, $\left(T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\right)$.



Hình 2.23

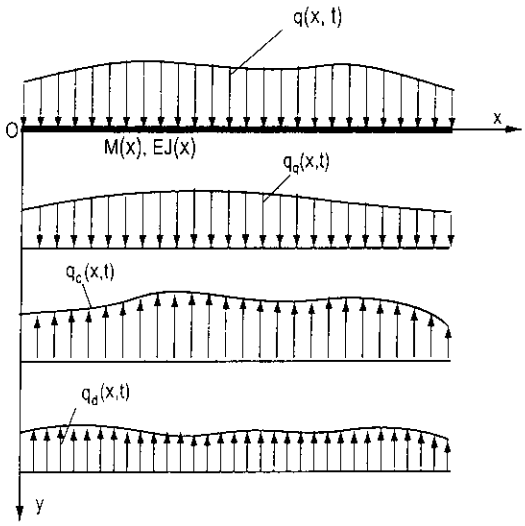
Các đồ thị được vẽ tương ứng với các giá trị khác nhau của bước thời gian Δt. Đồ thị ứng với $\Delta t = 0{,}125$ (đường cong nét đậm) trùng với đồ thị đã mô tả ở hình 1.19 của phương pháp chính xác. Đồ thị ứng với: $\Delta t = 0{,}25 < \dfrac{T}{10} = 0{,}314$ cho các giá trị gần sát với kết quả chính xác. Các đồ thị ứng với $\Delta t = 0{,}5$ $\Delta t = 1$ cho kết quả xa với kết quả chính xác, bởi vì $\Delta t > \dfrac{T}{10} = 0{,}314$.

Chương 3

DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

§1. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG TỔNG QUÁT HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Xét thanh thẳng có khối lượng phân bố bất kì m(x), độ cứng thay đổi EJ(x) chịu tải trọng động phân bố q(x,t) trên hình 3.1:



Hình 3.1

Ta giả thiết rằng: khi dao động mọi điểm trên hệ đều dịch chuyển theo phương vuông góc với trục thanh. Dao động ngang của hệ tại một thời điểm bất kì được xác định bằng đường đàn hồi của hệ đường đàn hồi này là hàm phụ thuộc vào hai biến số: tọa độ x và thời gian t

$$y = y(x,t)$$

Để xây dựng phương trình vi phân dao động của hệ ta sử dụng phương pháp tĩnh động, trong đó có bổ sung vào hệ lực quán tính viết theo nguyên lí Đalambe. Các lực tác dụng vào hệ bao gồm:

- Lực quán tính phân bố: $q_q(x,t) = -m_{(x)} \cdot \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

- Lực cản chuyển động (cản nhớt): $q_c(x,t) = C \cdot \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

- Lực đàn hồi phân bố tương ứng với chuyển vị động y(x,t) có xu hướng đưa hệ về vị trí cân bằng ban đầu:

$$q_d(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right)$$

- *Tải trọng động:* q(x,t)

Viết phương trình cân bằng lực theo phương đứng: $\sum Y = 0$, ta có:

$$-q_q(x,t) + q_c(x,t) + q_d(x,t) = q(x,t) \qquad (3\text{-}1)$$

Đưa các thành phần lực cản, lực quán tính, lực đàn hồi ở trên vào phương trình cân bằng (3.1) sẽ được:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = q\ (x,t) \qquad (3\text{-}2)$$

Phương trình (3.2) là phương trình vi phân dao động tổng quát của thanh thẳng - hệ vô hạn bậc tự do chịu tải trọng động bất kì.

Khi không xét tới ảnh hưởng của lực cản, ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q\ (x,t) \qquad (3\text{-}3)$$

Khi tính dao động có xét đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết độ cứng phức, ta có phương trình vi phân dao động tổng quát như sau:

$$m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] = q\ (x,\ t) \qquad (3\text{-}4)$$

§2. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG

1. Phương trình dao động tự do tổng quát của hệ

Phương trình vi phân dao động tự do khi không xét tới ảnh hưởng của lực cản nhận được từ phương trình (3-3) khi không có vế phải:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân (3-5) có thể biểu thị dưới dạng sau:

$$y(x,\ t) = X(x)\ .\ T(t) \qquad (3\text{-}6)$$

Trong đó:

X(x) - hàm chỉ phụ thuộc vào tọa độ x, nó biểu thị dạng uốn của dầm;

T(t) - hàm chỉ phụ thuộc vào thời gian, nó biểu thị luật dao động của hệ.

Từ (3-6) ta lấy đạo hàm riêng của y(x, t) theo thời gian và theo tọa độ:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2X(x)}{dx^2} \cdot T(t) \tag{3-7}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{d^2T}{dt^2} \cdot X(x) \tag{3-8}$$

Đưa các biểu thức (3-7) và (3-8) vào phương trình (3-5) ta được:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2X}{dx^2} \cdot T\right] + m(x)\frac{d^2T}{dt^2} \cdot X = 0$$

Chia cả phương trình trên cho tích m(x).X.T, sau khi biến đổi ta sẽ viết được dạng sau:

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]}{m(x).X} = -\frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T} \tag{3-9}$$

Từ (3-9) ta thấy: Vế phải của phương trình chỉ phụ thuộc vào thời gian t, còn vế trái chỉ phụ thuộc vào tọa độ x. Như vậy, muốn thỏa mãn phương trình (3-9), thì cả hai vế của phương trình này cùng phải bằng một đại lượng nào đó. Ta kí hiệu đại lượng này là ω^2. Từ đó, ta có thể rút ra hai phương trình sau:

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]}{m(x).X} = \omega^2$$

Và
$$\frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T} = \omega^2$$

Suy ra:
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right] - \omega^2 m(x)X = 0 \tag{3-10}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{3-11}$$

Ta thấy phương trình (3-11) giống như phương trình vi phân dao động đối với hệ một bậc tự do, nghiệm của phương trình này có dạng:

$$T = A\sin(\omega t + \gamma) \tag{3-12}$$

Phương trình (3-10) là phương trình vi phân dạng uốn của dầm. Giải phương trình này ta xác định được dạng dao động X. Tương tự như đối với dao động của hệ hữu hạn bậc tự do, khi xét điều kiện đảm bảo cho hệ dao động ta sẽ xác định được các tần số dao động riêng của hệ.

Trong trường hợp tổng quát, phương trình vi phân (3-10) có các hệ số thay đổi theo tọa độ. Khi dầm có độ cứng không đổi, phương trình (3-10) có dạng đơn giản hơn:

$$EJ\frac{d^4X}{dx^4}-\omega^2 m(x)X=0 \tag{3-13}$$

Nếu dầm có độ cứng không đổi và khối lượng phân bố đều, ta có:

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\omega^2\frac{m}{EJ}X=0 \tag{3-14}$$

Phương trình (3-14) được giải quyết cụ thể ở §3.

Như vậy, nghiệm của phương trình vi phân (3-5) được biểu thị dưới dạng (3-6) chính là nghiệm của hệ phương trình vi phân (3-10) và (3-11). Vì hệ có vô số bậc tự do, nên ta cũng tìm được vô số tần số dao động riêng. Tương ứng với tần số dao động riêng ω_i, ta có dạng dao động chính thứ i ứng với hàm biểu thị dạng uốn X_i và luật dao động T_i:

$$Y_i(x,t)=X_iT_i=X_iA_i\sin(\omega_i t+\gamma_i) \tag{3-15}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3-5) sẽ là:

$$Y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_iT_i=\sum_{i=1}^{\infty}X_iA_i\sin(\omega_i t+\gamma_i) \tag{3-16}$$

Phương trình (3-16) là phương trình dao động tổng quát của hệ vô số bậc tự do.

Trong trường hợp kể đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình vi phân dao động tự do có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]+m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=0 \tag{3-17}$$

Ở đây xét trường hợp lực cản nhỏ, ứng với $\varepsilon < 1$.

Ta cũng biểu thị nghiệm dưới dạng (3-6) và tiến hành làm tương tự như trên, ta sẽ nhận được phương trình dao động tổng quát của hệ như sau:

$$Y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\omega_i\varepsilon_i t}X_i\ A_i\sin(\omega_{i,c}t+\gamma_i) \tag{3-18}$$

Trong đó: $\omega_{i,c}=\omega_i\sqrt{1-\varepsilon_i}$

2. Tính chất trực giao của các dạng dao động riêng

Tương tự như đối với dao động của hệ hữu hạn bậc tự do, các dạng dao động riêng của hệ vô số bậc tự do cũng có tính chất trực giao. Biểu thức của tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng được tìm trên cơ sở áp dụng nguyên lí công tương hỗ Betti đối với các dạng dao động riêng.

Xét hai dạng dao động riêng ứng với hai tần số dao động riêng ω_i và ω_j. Khi dao động tự do, ta xem hệ chịu tác dụng của các lực quán tính xem như ngoại lực (hình 3.2).

Với dạng chính thứ i, ta có chuyển vị của hệ:

$$Y_i(x, t) = X_i T_i = X_i A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)$$

Và lực quán tính phân bố:

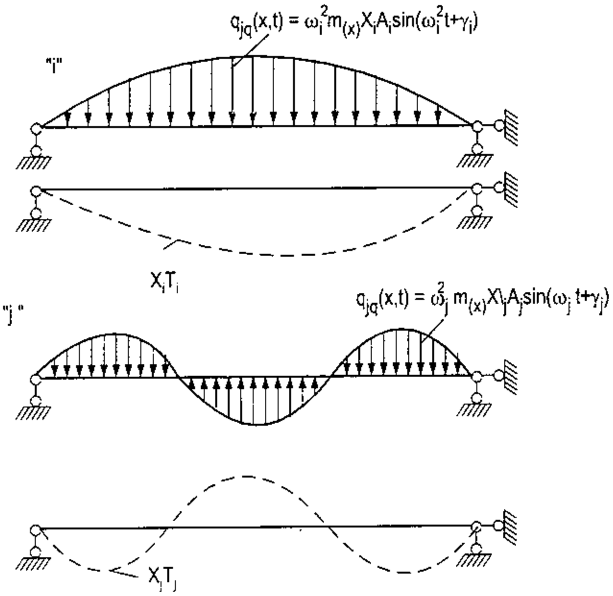
$$q_{i,q}(x,t) = \omega_i^2 m(x) X_i A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)$$

Với dạng chính thứ J, ta có chuyển vị của hệ:

$$Y_{j(x,t)} = X_j A_j \sin(\omega_j t + \gamma_j)$$

Và lực quán tính phân bố:

$$q_{j,q}(x,t) = \omega_j^2 m_{(x)} X_j A_j \sin(\omega_j t + \gamma_j)$$



Hình 3.2

Áp dụng nguyên lí Betti vào hai trạng thái biến dạng ứng với hai dạng dao động đó, ta có:

$$\int_0^l q_{i,q}(x,t).y_j(x,t)dx = \int_0^l q_{j,q}(x,t).y_i(x,t)dx$$

Hay:

$$\int_0^l \omega_i^2 m_x X_i A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i) . X_j A_j \sin(\omega_j t + \gamma_j)dx =$$

$$= \int_0^l \omega_j^2 m_x X_j A_j \sin(\omega_j t + \gamma_j) . X_i A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)dx$$

Sau khi đơn giản hai vế cho $A_i A_j . \sin(\omega_i t + \gamma_i)\sin((\omega_j t + \gamma_j)$ và chuyển vế, ta được:

$$\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right) \int_0^l m(x) X_i X_j dx = 0$$

Vì các tần số dao động riêng có giá trị khác nhau $\omega_i \neq \omega_j$ nên ta có thể viết biểu thức trên:

$$\int_0^l m(x) X_i X_j \, dx = 0 \tag{3-19}$$

Đó chính là biểu thức tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng.

Dạng dao động riêng thoả mãn điều kiện sau đây được gọi là dạng chuẩn:

$$\int_0^l m(x) X_i^2 \, dx = 1 \tag{3-20}$$

Biểu thức (3-19) biểu thị tính chất trực giao của các dạng dao động riêng qua khối lượng của hệ. Tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng còn được biểu thị qua độ cứng của hệ như sau:

$$\int_0^l \left[EJ(x) X_i'' \right]'' X_j \, dx = 0 \tag{3-21}$$

3. Xác định A_i và γ_i của phương trình dao động (3-16)

Ta viết lại phương trình (3-16):

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \; A_i \; \sin(\omega_i t + \gamma_i) \tag{3-22}$$

Trong đó: A_i và γ_i được xác định từ điều kiện ban đầu: Tại thời điểm ban đầu t = 0, ta có độ võng và tốc độ ban đầu của hệ là: $y_o(x)$ và $v_o(x)$. Trước hết ta tính đạo hàm theo thời gian phương trình (3-22).

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \; A_i \, \omega_i \cos(\omega_i t + \gamma_i) \tag{3-23}$$

Chú ý: các kí hiệu đạo hàm theo thời gian, ta để dấu chấm, và kí hiệu đạo hàm theo toạ độ ta để dấu phẩy.

Thay các điều kiện ban đầu vào các phương trình (3-22) và (3-23), ta có:

$$y_o(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i \sin\gamma_i \tag{a}$$

$$v_o(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i \, \omega_i \cos\gamma_i \tag{b}$$

Để xác định A_i và γ_i ta sẽ sử dụng biểu thức tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng. Muốn vậy, ta nhân hai vế của phương trình (a) với $m(x)\,X_i\,dx$ rồi lấy tích phân từ 0 đến *l*:

$$\int_0^l m(x) y_o(x) \, X_i \, dx = \int_0^l \left(m(x) X_i \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i \sin\gamma_i \right) dx$$

Khai triển tổng phía trong bên vế phải của phương trình trên, ta có:

$$\int_0^l m(x)y_o(x)X_i\,dx = \int_0^l m(x)X_i\ (A_1 X_1 \sin\gamma_1 + A_2X_2\sin\gamma_2 + ... +$$

$$+ A_i X_i \sin\gamma_i + ... + A_n X_n \sin\gamma_n)\,dx$$

Sử dụng tính chất trực giao (3-19), ta nhận được:

$$\int_0^l m(x)y_o(x)\ X_i\,dx = \int_0^l m(x)A_iX_i^2\sin\gamma_1\,dx$$

Hay: $$A_i\sin\gamma_i = \frac{\int_0^l m(x)y_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m(x)X_i^2\,dx} \tag{3-24}$$

Tương tự ta nhân hai vế của phương trình (b) với $m(x)X_i\,dx$ và cũng lặp lại quá trình như trên, ta sẽ nhận được:

$$A_i\cos\gamma_i = \frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l m(x)v_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_x\ X_i^2\,dx} \tag{3-25}$$

Từ hai biểu thức (3-24) và (3-25), ta suy ra:

$$\gamma_i = \text{arctg}\left[\omega_i\ \frac{\int_0^l m(x)y_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_x v_o(x)X_i\,dx}\right] \tag{3-26}$$

$$A_i = \frac{\sqrt{1+\text{tg}^2\gamma_i}}{\omega_i}\ \frac{\int_0^l m(x)v_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_xX_i^2\,dx} \tag{3-27}$$

Hoặc:

$$A_i = \frac{1}{\sin\gamma_i}\cdot\frac{\int_0^l m(x)y_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_x\ X_i^2\,dx} \tag{3-27'}$$

Nếu đưa biểu thức (3-24), (3-25) vào (a) và (b) ta sẽ nhận được:

$$y_{i,o}(x) = X_i\ \frac{\int_0^l m(x)y_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_xX_i^2\,dx} \tag{3-28}$$

$$v_{i,o}(x) = X_i\ \frac{\int_0^l m(x)v_o(x)\ X_i\,dx}{\int_0^l m_xX_i^2\,dx} \tag{3-29}$$

Các biểu thức (3-28) và (3-29) chính là các thành phần khai triển của chuyển vị ban đầu và tốc độ ban đầu vào các dạng dao động riêng.

§3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

Trong trường hợp này: m(x) = const, EJ(x) = const, phương trình vi phân dao động tự do (3-5) sẽ là:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EJ}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (3\text{-}30)$$

Phương trình vi phân biểu thị dạng uốn có dạng (3-14) được viết gọn ở dạng sau:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - K^4.X = 0 \qquad (3\text{-}31)$$

Trong đó:

$$K^4 = \frac{m.\omega^2}{EJ} \qquad (3\text{-}32)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (3-31) có dạng:

$$X = A\,\text{ch}\,kx + B\,\text{sh}\,kx + C\sin kx + D\cos kx \qquad (3\text{-}33)$$

Để tiện cho việc tính toán sau này, ta đặt:

$$A = \frac{1}{2}(C_1 + C_3)\,; \qquad B = \frac{1}{2}(C_2 + C_4)$$

$$C = \frac{1}{2}(C_1 - C_3)\,; \qquad D = \frac{1}{2}(C_2 - C_4)$$

Lúc này, ta có thể biểu thị nghiệm như sau:

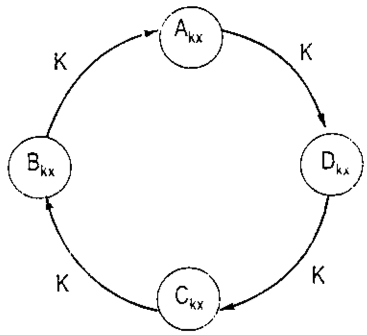
$$X = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} \qquad (3\text{-}34)$$

trong đó:

$$\left.\begin{aligned} A_{kx} &= \frac{1}{2}(\text{ch}\,kx + \cos kx) \\ B_{kx} &= \frac{1}{2}(\text{sh}\,kx + \sin kx) \\ C_{kx} &= \frac{1}{2}(\text{ch}\,kx - \cos kx) \\ D_{kx} &= \frac{1}{2}(\text{sh}\,kx - \sin kx) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}35)$$

Các hàm trên được gọi là hàm Crulov và chúng tuân theo quy luật đạo hàm sau: (xem hình 3.3)

$$\begin{cases} A'_{kx} = KD_{kx} \\ D'_{kx} = KC_{kx} \\ C'_{kx} = KB_{kx} \\ B'_{kx} = KA_{kx} \end{cases}$$



Hình 3.3

Và: $A_{(0)} = 1$

$B_{(0)} = C_{(0)} = D_{(0)} = 0$

Từ (3-34), ta có các đạo hàm:

$$\left.\begin{aligned} X'_x &= C_1 K D_{kx} + C_2 K A_{kx} + C_3 K B_{kx} + C_4 K C_{kx} \\ X''_x &= C_1 K^2 C_{kx} + C_2 K^2 D_{kx} + C_3 K^2 A_{kx} + C_4 K^2 B_{kx} \\ X'''_x &= C_1 K^3 B_{kx} + C_2 K^3 C_{kx} + C_3 K^3 D_{kx} + C_4 K^3 A_{kx} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}36)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định từ điều kiện biên, giả sử tại x = 0, ta có:

$$X_{(x=0)} = X_o,\ X'_{(x=0)} = \theta_o,\ X''_{(x=0)} = -\frac{M_o}{EJ},\ X'''_{(x=0)} = -\frac{Q_o}{EJ}$$

Thay các điều kiện biên trên vào các phương trình (3-34), (3-36) ta sẽ nhận được:

$$C_1 = X_o, \qquad C_2 = \frac{1}{K}\theta_o$$

$$C_3 = -\frac{M_o}{K^2 EJ}, \qquad C_4 = -\frac{Q_o}{K^3 EJ}$$

Đưa lại các hằng số này vào (3-34) và (3-36), ta có phương trình chuyển vị và nội lực của hệ như sau:

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= X_o A_{kx} + \frac{\theta_o}{K} B_{kx} - \frac{M_o}{K^2 EJ} C_{kx} - \frac{Q_o}{K^3 EJ} D_{kx} \\ X'(x) &= X_o K D_{kx} + \theta_o A_{kx} - \frac{M_o}{KEJ} B_{kx} - \frac{Q_o}{K^2 EJ} C_{kx} \\ M(x) &= -EJ X_o K^2 C_{kx} - EJ\theta_o K D_{kx} + M_o A_{kx} + \frac{Q_o}{K} B_{kx} \\ Q(x) &= -EJ X_o K^3 B_{kx} - EJ\theta_o K^2 C_{kx} + M_o K D_{kx} + Q_o A_{kx} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}37)$$

Hai phương trình đầu của (3-37) là hai phương trình biến dạng, còn hai phương trình sau là hai phương trình nội lực. Từ các điều kiện biên cụ thể của bài toán, ta sẽ xét điều kiện đảm bảo hệ dao động để nhận được các thông số K và từ đó sẽ xác định được các tần số dao động riêng của hệ.

Thí dụ 3.1:

Xác định các tần số dao động riêng và phương trình dao động tổng quát của hệ cho ở hình 3.4, hệ có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi.

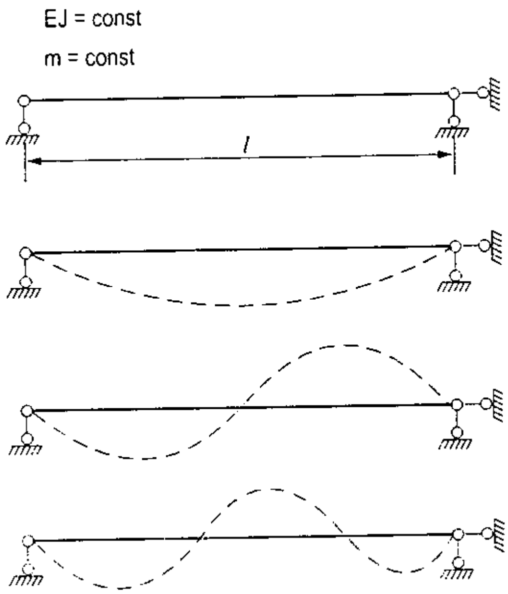
1. Xác định các tần số dao động riêng: các điều kiện biên của dầm đơn giản

- Tại đầu dầm: x = 0

$$\begin{cases} X_{(0)} = 0 \\ M_{(0)} = 0 \end{cases}$$

- Tại cuối dầm: x = l

$$\begin{cases} X_{(l)} = 0 \\ M_{(l)} = 0 \end{cases}$$



Hình 3.4

Thay điều kiện biên này vào phương trình thứ nhất và thứ ba của (3-37), ta được:

$$\left.\begin{aligned} X_{(l)} &= \frac{\theta_o}{K} B_{kl} - \frac{Q_o}{K^3 EJ} D_{kl} = 0 \\ M_{(l)} &= -\theta_o EJ\, K\, D_{kl} + \frac{Q_o}{K} B_{kl} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Điều kiện để cho hệ tồn tại dao động là θ_o và Q_o phải khác không. Do đó, định thức các hệ số tương ứng của hệ hai phương trình (a) phải bằng không:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{K} B_{kl} & -\frac{1}{K^3 EJ} D_{kl} \\ -EJ\, K\, D_{kl} & \frac{1}{K} B_{kl} \end{vmatrix} = 0 \qquad (b)$$

Sau khi khai triển định thức (b) và thay các hàm B_{kx}, D_{kx} theo (3-35), ta sẽ nhận được phương trình tần số sau:

$$\mathrm{Sh}kl \,.\, \sin kl = 0 \qquad (c)$$

Ta biết rằng: K luôn khác không, nên kl cũng luôn khác không và do đó $\mathrm{Sh}kl \neq 0$ vậy:

$$\sin kl = 0$$

Suy ra: $kl = i\pi$, với $i = 1, 2, 3... \infty$. (i nguyên và dương)

Hay: $$K_i = \frac{i\pi}{l} \qquad \text{(d)}$$

Thay (d) vào (3-32) ta sẽ có các giá trị tần số dao động riêng: $\omega_i = K_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$.

$$i = 1: \qquad \omega_1 = \frac{1^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{9,87}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$i = 2: \qquad \omega_2 = 2^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = 4\omega_1 = \frac{39,48}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$i = 3: \qquad \omega_3 = 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = 9\omega_1 = \frac{88,826}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

....

2. Xét định dạng dao động riêng

Phương trình dạng dao động của dầm được viết theo phương trình đầu của (3-37) có tính đến điều kiện biên đầu trái.

$$X_i = \frac{\theta_o}{K_i}B_{k_ix} - \frac{Q_o}{K_i^3EJ}D_{k_ix} = \frac{\theta_o}{K_i}\left(B_{k_ix} - \frac{\frac{Q_o}{K_i^3EJ}}{\frac{\theta_o}{K_i}}D_{k_ix}\right) \qquad \text{(e)}$$

Từ phương trình đầu của (a), ta có:

$$\left(\frac{Q_o}{K_i^3EJ} : \frac{\theta_o}{K_i}\right) = \frac{B_{ki}}{D_{kl}}$$

Ta thay B_{kl} và D_{kl} theo (3-35) và tính đến điều kiện Sin $kl = 0$, thì sẽ nhận được:

$$\frac{\frac{Q_o}{K_i^3EJ}}{\frac{\theta_o}{K_i}} = 1$$

Thế giá trị này vào biểu thức (e), và thay tiếp các hàm B_{k_ix}, D_{k_ix} theo (3-35), ta sẽ viết lại (e) như sau:

$$X_i = \frac{\theta_o}{K_i}\sin K_{ix} = \frac{\theta_o}{K_i}\sin\frac{i\pi x}{l} \qquad \text{(g)}$$

Ứng với các giá trị i khác nhau, ta có các dạng dao động riêng tương ứng. Trên hình 3.4 mô tả một số dạng dao động riêng ứng với các tần số dao động riêng ω_1, ω_2, ω_3 của hệ.

Thế hàm dạng X_i theo (g) vào (3.16) ta được phương trình dao động tự do của hệ:

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\frac{\theta_o}{K_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin(\omega_i t+\gamma_i) \qquad \text{(h)}$$

Trong đó: A_i và γ_i được xác định từ điều kiện ban đầu.

Tại t = 0, có:

$$y(x,t=0)=y_o(x)$$
$$\dot{y}(x,t=0)=v_o(x)$$

Từ (3-26) ta có:

$$\gamma_i=\operatorname{arctg}\omega_i\frac{\int_o^l m_x y_o(x)X_i dx}{\int_o^l m_x v_o(x)X_i dx}=\operatorname{arctg}\omega_i\frac{\int_o^l y_o(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx}{\int_o^l v_o(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx} \qquad \text{(i)}$$

A_i được xác định theo (3-27):

$$A_i=\frac{1}{\sin\gamma_i}\frac{\int_o^l m_x y_o(x)X_i dx}{\int_o^l m_x X_i^2 dx}=\frac{1}{\sin\gamma_i}\frac{\int_o^l y_o(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx}{\frac{\theta_o}{K_i}\int_o^l \sin^2\frac{i\pi x}{l}dx}$$

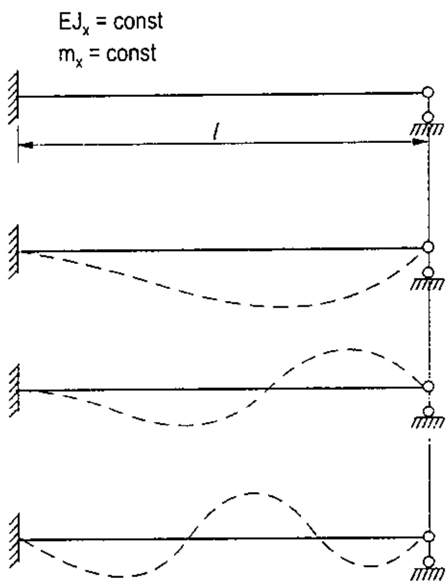
$$=\frac{2\int_o^l y_o(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx}{l\sin\gamma_i\frac{\theta_o}{K_i}} \qquad \text{(k)}$$

Đưa (k) vào (h) ta nhận được phương trình dao động tự do của dầm đơn giản khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi:

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{l\sin\gamma_i}\int_o^l y_o(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx.\sin(\omega_i t+\gamma_i) \qquad \text{(m)}$$

Thí dụ 3.2:

Xác định tần số và dạng dao động riêng của dầm một đầu ngàm một đầu khớp. Dầm có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi. (hình 3.5).



Hình 3.5

Ta có điều kiện biên ở hai đầu dầm như sau:

Tại: x = 0 $\quad X_{(o)}=0$

$\quad X'_{(o)}=0$

Tại: x = l $\quad X_{(l)}=0$

$\quad M_{(l)}=0$

Thay các biểu thức (3-34) và (3-36) vào các hệ thức trên ta nhận được: $C_1 = 0$; $C_2 = 0$ vào hệ hai phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} C_3 C_{kl} + C_4 D_{kl} = 0 \\ C_3 A_{kl} + C_4 B_{kl} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Điều kiện để hệ dao động là định thức của hệ phương trình (a) phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} C_{kl} & D_{kl} \\ A_{kl} & B_{kl} \end{vmatrix} = 0 \tag{b}$$

Đưa biểu thức (3-35) vào (b), ta nhận được phương trình siêu việt sau đây để xác định tần số:

$$\text{tg } kl = \text{th } kl \tag{c}$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$(kl)_1 = 3{,}927; \qquad (kl)_2 = 7{,}069$$

$$(kl)_i = \frac{4i + l}{4} \cdot \pi \text{ suy ra: } \omega_1 = \frac{15{,}42}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{49{,}93}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \ldots \tag{d}$$

Các dạng dao động riêng của dầm được xác định theo phương trình sau:

$$X_i(x) = A_i\,[(\sin K_i l + \text{sh } K_i l)(\text{ch } K_i x - \cos K_i x) -$$

$$- (\text{ch } K_i l + \cos K_i l)(\text{sh } K_i x - \sin K_i x)] \tag{e}$$

Trên hình 3.5 mô tả một số dạng dao động riêng của dầm. Giá trị các tần số và dạng dao động riêng nhận được ở thí dụ (2-9) phù hợp với kết quả ở đây.

§4. DAO ĐỘNG CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG XUNG

Như đã biết, dưới tác dụng của xung tức thời, hệ sẽ dao động tự do. Phương trình dao động tự do tổng quát của hệ vô số bậc tự do được xác định theo (3-15):

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i\, A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i) \tag{3-38}$$

Trong đó A_i và γ_i được xác định từ điều kiện ban đầu theo (3-26) và (3-27), vấn đề ở đây là A_i và γ_i được tính cụ thể như thế nào?

Ta biết rằng, tại thời điểm ban đầu dưới tác dụng của xung lực phân bố trên hệ S(x), khối lượng phân bố của hệ sẽ nhận được vận tốc ban đầu:

$$v_o(x) = \frac{S(x)}{m(x)}$$

Và nếu ta xem rằng: Tại thời điểm ban đầu chuyển vị của hệ bằng không, thì điều kiện ban đầu của hệ có thể viết như sau:

Tại t = 0
$$\begin{cases} y(x,t=0) = y_o(x) = 0 \\ \dot{y}(x,t=0) = v_o(x) = \dfrac{S(x)}{m(x)} \end{cases} \qquad (3\text{-}39)$$

Đưa các điều kiện ban đầu này vào (3-26) và (3-27) ta xác định được:

$$\gamma_i = 0$$
$$A_i = \frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l S(x)X_i dx}{\int_0^l m(x)X_i^2 dx} \qquad (3\text{-}40)$$

Đưa giá trị γ_i và A_i này vào phương trình (3-38), ta nhận được phương trình dao động của hệ vô số bậc tự do chịu tác dụng xung:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{\omega_i} \frac{\int_0^l S(x)X_i dx}{\int_0^l m(x)X_i^2 dx} \sin\omega_i t \qquad (3\text{-}41)$$

Để thấy được sự tương tự với phương trình dao động chịu tác dụng xung của hệ một bậc tự do, hệ hữu hạn bậc tự do, ta nhân trên tử số và mẫu số của biểu thức (3-41) với m_x rồi đặt:

$$S_i(x) = m_x X_i \frac{\int_0^l S(x)X_i dx}{\int_0^l m(x)X_i^2 dx} \qquad (3\text{-}42)$$

Ta viết lại phương trình (3-41) như sau:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i(x)}{m_x\omega_i} \sin\omega_i t \qquad (3\text{-}43)$$

Thành phần $S_i(x)$ được gọi là xung khai triển theo dạng chính thứ i. Phương trình (3-43) còn viết ở dạng sau:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i(x)}{m_x} K_{ai}(t) \qquad (3\text{-}44)$$

Trong đó:

$$K_{ai}(t) = \frac{\sin\omega_i t}{\omega_i} \qquad (3\text{-}45)$$

Người ta cũng chứng minh được rằng:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(x) \qquad (3\text{-}46)$$

Nếu xung tác dụng không phải thời điểm t = 0, mà tại thời điểm t = τ, thì phương trình dao động tổng quát của hệ sẽ là:

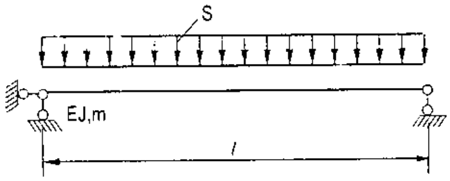
$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i(x)}{m_x\omega_i} \sin\omega_i(t-\tau) \qquad (3\text{-}47)$$

Lực đàn hồi của hệ khi chịu tác dụng của xung tức thời được tính qua lực quán tính:

$$q_d(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} -m_x \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{\infty} S_i(x).\omega_i.\sin\omega_i t \qquad (3\text{-}48)$$

Thí dụ 3.3:

Xác định độ võng và mô men uốn lớn nhất trong dầm đơn giản chịu tác dụng của xung tức thời phân bố đều theo trục dầm. Dầm có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi.



Hình 3.6

Ở thí dụ (3.1) ta đã có biểu thức xác định các giá trị tần số của dầm:

$$\omega_i=i^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}=i^2\omega_i$$

$$\omega_1=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Và dạng dao động riêng của hệ:

$$X_i(x)=\sin\frac{i\pi x}{l}$$

Ta tính thành phần xung khai triển theo công thức (3-42):

$$S_i(x)=m_x X_i \frac{\int_0^l S(x)X_i dx}{\int_0^l m(x)X_i^2 dx}$$

$$=m\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\frac{\int_0^l S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx}{\int_0^l m.\sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx} \qquad (a)$$

Ta tính tử số của biểu thức (a)

$$\int_0^l S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx=\frac{Sl}{i\pi}(1-\cos\pi)=\frac{2Sl}{i\pi}$$

với i = 1, 3, 5, 7...

Mẫu số của (a):

$$\int_0^l S.\sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx=m\int_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos 2=\frac{i\pi x}{l}\right)dx=\frac{ml}{2}$$

Do đó biểu thức (a) sẽ là:

$$S_i(x)=m.\sin\frac{i\pi x}{l}\cdot\frac{4Sl}{i\pi ml}=\frac{4S}{i\pi}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) i=1,3,5... \qquad (b)$$

Phương trình dao động của hệ được tính theo (3-43):

$$y(x,t) = \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{4S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)}{i\pi.m\cdot\frac{i^2\pi^2}{l^2}\cdot\frac{EJ}{m}}\cdot\sin(i^2\omega_1 t)$$

Hay: $$y(x,t) = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\sin(i^3\omega_1 t) \qquad (c)$$

Giá trị lớn nhất của chuyển vị y_{max} theo thời gian xảy ra khi $\sin(i^2\omega_1 t) = \sin\left(i^2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$I = 1, 3, 5...$

Ứng với thời điểm:

$$t = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{T_1}{4}$$

Trong đó: T_1 là chu kì dao động riêng của dạng dao động chính thứ nhất:

$$y(x) = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\sum_{i=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \qquad (d)$$

Giá trị lớn nhất của chuyển vị y_{max} theo toạ độ đạt được tại vị trí $x = \frac{l}{2}$:

$$y_{max} = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\sum_{i=1,3,...}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+...\right) =$$

$$= \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\cdot\frac{\pi^3}{32} = \frac{sl^2}{8\sqrt{EJm}} \qquad (e)$$

Để xác định nội lực mô men uốn trong dầm ta sử dụng biểu thức liên hệ vi phân giữa nội lực và chuyển vị:

$$M_x = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (f)$$

Đưa (d) vào (f), ta được:

$$M(x) = -EJ\left[\frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJm}}\sum_{i=1,3,...}^{\infty}\frac{1}{i^3}\frac{i^2\pi^2}{l^2}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right]$$

$$= \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\sum_{i=1,3,...}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \qquad (g)$$

Ta thấy: $\dfrac{dM(x)}{dx} = 0$ tại $x = \dfrac{l}{2}$, do đó:

$$M_{max} = \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \sum_{i=1,3,...}^{\infty} \frac{1}{i}\sin\left(i\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right)$$

$$M_{max} = \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \cdot \frac{\pi}{4} = S\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

§5. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG BẤT KÌ

Phương trình vi phân dao động của hệ vô số bậc tự do chịu tải trọng bất kì không xét tới ảnh hưởng của lực cản như đã biết (3-3):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right] + m_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{3-49}$$

Ta biểu thị nghiệm tổng quát của (3-49) dưới dạng tổng của các nghiệm riêng (3-6)

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x).\, T_i(t) \tag{3-50}$$

Đưa (3-50) vào (3-49) ta có:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[EJ_x\, X''(x)_i.T_i(t)\right]'' + \sum_{i=1}^{\infty} m_x\, X_i(x)\ddot{T}_i(t) = q(x,t) \tag{3-51}$$

Nhân hai vế của phương trình (3-51) với $X_i(x)$ dx rồi lấy tích phân, ta được:

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{\infty}\left[EJ_x\, X_i''(x).T_i(t)\right]'' X_i(x)dx +$$

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{\infty}\left[m_x\, X_i(x)\ddot{T}_i(t)\right] X_i(x)dx = \int_0^l X_i(x)q(x,t)dx \tag{3-52}$$

Ta khai triển tổng phía trái của phương trình (3-52) và sử dụng các biểu thức của tính chất trực giao (3-19) và (3-21) ta nhận được:

$$\begin{aligned}&\int_0^l \left[EJ_x\, X_i''(x).T_i(t)\right]'' X_i(x)dx + \\ &+ \int_0^l m_x X_i\, \ddot{T}_i(t)X_i(x)dx = \int_0^l X_i(x)q(x,t)dx\end{aligned} \tag{3-53}$$

Đưa một nghiệm riêng ứng với dạng chính thứ i

$$y_i(x,t) = X_i A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)$$

vào phương trình vi phân dao động (3-5), sau khi tính đạo hàm và chuyển vế, ta nhận được:

$$\omega_i^2 m_x X_i(x) A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i) = \left[EJ_x X_i''(x) A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)\right]''$$

Đơn giản hai vế của phương trình trên cho $A_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)$, ta có;

$$\omega_i^2 m_x X_i(x) = \left[EJ_x X_i''(x)\right]''$$

Nhân hai vế của phương trình này với Xi dx rồi lấy tích phân:

$$\omega_i^2 \int_0^l m_x X_i^2(x)dx = \int_0^l \left[EJ_x X_i''(x)\right]'' X_i(x)dx$$

Suy ra:

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ_x X_i''(x)\right]'' X_i(x)dx}{\int_0^l m_x X_i^2(x)dx} \tag{3-54}$$

Bây giờ ta viết lại phương trình (3-53) ở dạng sau:

$$\ddot{T}_i(t)\int_0^l m_x X_i^2(dx)dx + T_i(t)\int_0^l \left[EJ_x X_i''(x)\right]'' X_i(x)dx = \int_0^l X_i(x)q(x,t)dx$$

Chia hai vế của phương trình trên cho tích phân $\int_0^l m_x X_i^2(x)dx$ và sử dụng biểu thức (3-54), ta sẽ nhận được:

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = \frac{\int_0^l X_i(x)q(x,t)dx}{\int_0^l m_x X_i^2(x)dx} \tag{3-55}$$

Đây là phương trình có dạng giống như phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do. Nghiệm của phương trình này.

$$T_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \frac{\int_0^l X_i(x)q(x,\tau)dx}{\int_0^l m_x X_i^2(x)dx} \cdot \sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{3-56}$$

Thế (3-56) vào (3-50) ta nhận được nghiệm tổng quát của dao động cưỡng bức hệ vô số bậc tự do chịu tải trọng bất kì:

$$Y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)}{\omega_i}\int_0^t \frac{\int_0^l X_i(x)q(x,\tau)dx}{\int_0^l m_x X_i^2(x)dx} \cdot \sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{3-57}$$

Để thấy được sựt ương tự với phương trình dao động của hệ một bậc tự do, hệ hữu hạn bậc tự do, ta nhân trên tử số và dưới mẫu số của phương trình (3-57) với m_x và đặt:

$$q_i(x,t) = m_x X_i(x) \frac{\int_0^l X_i(x) q(x,t) dx}{\int_0^l m_x X_i^2(x) dx} \quad (3\text{-}58)$$

$q_i(x,t)$ gọi là tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i của tải trọng động phân bố bên ngoài tác dụng vào hệ; (3-58) có dạng giống với (2-130), ta có thể tìm được tải trọng khai triển $q_i(x, t)$ theo (3-58) như sau:

Đặt: $$q(x,t) = q_1(x,t) + q_2(x,t) + \dots + q_i(x,t) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x,t) \quad (a)$$

Xem rằng: $$q_i(x,t) = m(x).X_i(x).\alpha_i(t) \quad (b)$$

Đưa (b) vào (a):

$$q(x,t) = m(x)X_1(x).\alpha_1(t) + m(x)X_2(x).\alpha_2(t) + \dots + m(x)X_i(x).\alpha_i(t) + \dots = m(x)\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\alpha_i(t) \quad (c)$$

Nhân 2 vế của phương trình (c) với $X_j(x)$ sau đó lấy tích phân sẽ được:

$$\int_0^l X_j(x) q(x,t) dx = \int_0^l X_j(x) m(x) \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x).\alpha_i(t) dx \quad (d)$$

Khai triển tổng bên vế phải của phương trình (d) và áp dụng biểu thức tính chất trực giao các dạng dao động riêng (3-19), ta có:

$$\int_0^l X_j(x) q(x,t) dx = \int_0^l X_j(x) m(x) X_j(x) \alpha_j(t) dx$$

Suy ra:

$$\alpha_j(t) = \frac{\int_0^l X_j(x) q(x,t) dx}{\int_0^l m(x).X_j^2(x) dx}, \text{ hay: } \quad \alpha_i(t) = \frac{\int_0^l X_i(x) q(x,t) dx}{\int_0^l m(x) X_i^2(x) dx} \quad (e)$$

Đưa (e) vào (b) ta nhận được biểu thức (3-58).

Ta xem: $q(x, t) = q(x) . f(t)$

Khi đó, phương trình (3-57) sẽ là:

$$Y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i(x)}{m_x} \cdot \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (3\text{-}59)$$

Hay:

$$Y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i(x)}{m_x} \cdot K_{ai}(t) \quad (3\text{-}60)$$

Trong đó:

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (3\text{-}61)$$

Biểu thức lực đàn hồi được tính ở dạng tổ hợp vô hạn của tích tải trọng phân bố khai triển theo các dạng riêng với hệ số động học thay đổi theo thời gian tương ứng:

$$q_d(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} q_i(x).K_i(t) \tag{3.62}$$

Trong đó: $q_i(x)$ được tính theo (3.58) không kể đến biến thời gian, $K_i(t)$ được tính theo (2.140).

Biểu thức mômen uốn có thể được tính từ quan hệ vi phân sau:

$$M(x,t)=-EJ(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Phương trình dao động (3.57) cũng có thể nhận được từ việc sử dụng kết quả khi tính hệ vô số bậc tự do chịu tác dụng của xung tức thời (§4). Trên biểu đồ tải trọng, tại thời điểm τ ta tách ra một phân tố tải trọng:

$$dS_i = q_i(x,\tau)\, d\tau$$

Xem rằng: tại thời điểm τ, hệ chịu tác dụng của xung dS. Ta tính được chuyển vị do xung phân tố gây ra dy (x, τ) và do đó sẽ tính được $y(x, t)$.

Khi hệ chịu tác dụng của các lực tập trung $P_j(t)$ đặt tại các tạo độ x_j, ta có thể thay thế các tải trọng này bằng tải trọng phân bố tương đương $\tilde{q}(x,t)$, sao cho tải trọng tương đương gây ra dao động đối với hệ cũng giống với các tải trọng tập trung. Ta thấy rằng: tích phân trên tử số của biểu thức (3.58) giống biểu thức xác định giá trị đại lượng nghiên cứu của đường ảnh hưởng cho bởi phương trình X_i do tải trọng phân bố $q(x,t)$ gây ra. Khi các tải trọng tập trung tác dụng, biểu thức xác định giá trị đại lượng nghiên cứu đối với phương trình đường ảnh hưởng X_i do các lực tập trung đó gây ra là:

$$\sum_{i=1}^{m} P_j(t)X_i(x_j)\,;\ \text{ m: số lực tập trung}$$

Vì vậy ta có thể viết biểu thức tải trọng phân bố tương đương đối với dạng dao động riêng thứ i như sau:

$$\tilde{q}_i(x,t)=m_x X_i\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} P_j(t).X_i(x_j)}{\int\limits_0^l m_x X_i^2 dx} \tag{3.63}$$

Thí dụ 3.4:

Xác định độ võng và mômen uốn lớn nhất trong dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột sau đó giữ nguyên giá trị trên hệ, tải trọng này phân bố dọc theo trục dầm với quy luật:

$$q(x)=q\sin\frac{\pi x}{l}$$

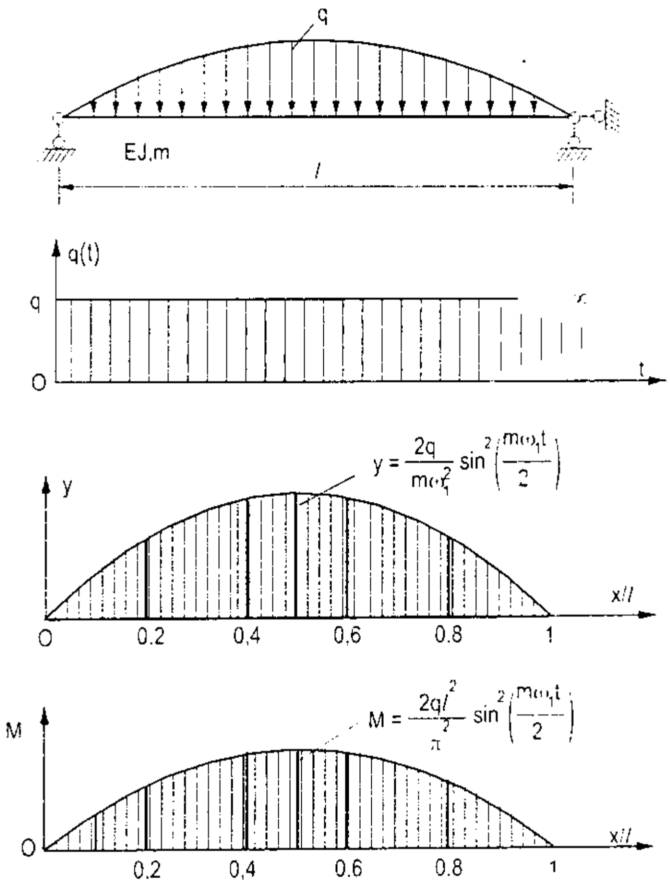
Dầm có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi.

a)

b)

c)

d)



Hình 3.7

Ở thí dụ (3.1) ta đã có giá trị các tần số và dạng dao động riêng:

$$\omega_i = i^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$X_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l}$$

- Xác định tải trọng khai triển theo (3.58):

$$q_i(x) = m_x X_i \frac{\int_0^l q(x)x_i\,dx}{\int_0^l m X_i^2\,dx}$$

Ta tính mẫu số:

$$\int_0^l m X_i^2\,dx = m\int_0^l \sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx = \frac{ml}{2}$$

Tính tích phân trên tử số:

$$\int_0^l q_i X_i dx = q\int_0^l \sin\frac{\pi x}{k}\sin\frac{i\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{q}{2\pi}\int_0^l\left[\cos\frac{(i+1)a}{2} - \cos\frac{(i-1)a}{2}\right]dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i \geq 2 \\ \dfrac{ql}{2} & \text{khi} \quad i = 1 \end{cases}$$

Thay các giá trị tính được vào biểu thức $q_{i(x)}$, ta có:

$$q_1(x) = mX_1 \cdot \frac{\frac{ql}{2}}{\frac{ml}{2}} = qX_1 = q.\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$q_2(x) = q_3(x) = q_i(x) = 0\,; \quad i \geq 2$$

Điều đó có nghĩa là: Với dạng tải trọng phân bố theo trục dầm với quy luật sin trùng với dạng dao động riêng thứ nhất thì hệ chỉ dao động theo dạng chính thứ nhất ứng với tần số dao động riêng ω_1.

Ta tính hệ số ảnh hưởng động học thay đổi theo thời gian (3-61)

$$K_{a1}(t) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t 1.\sin\omega_1(t-\tau)d\tau = \frac{1-\cos\omega_1 t}{\omega_1^2} = \frac{2}{\omega_1^2}\sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$$

Phương trình dao động của hệ viết theo (3-60):

$$Y(x,t) = \frac{q_1(x)}{m}K_{a1}(t) = \frac{2q}{m\omega_1^2}\ \sin\frac{\pi x}{l}\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$$

Chuyển vị lớn nhất của hệ xảy ra tại vị trí $x = \frac{1}{2}$ và tại thời điểm $T_1/2$:

$$Y_{max} = \frac{2q}{m\omega_1^2} = \frac{5}{243}\ \frac{ql^4}{EJ}$$

Nội lực mô men uốn:

$$M(x,t) = -EJ\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{2q}{m\omega_1^2}\ \frac{\pi^2}{l^2}\ \sin\frac{\pi x}{l}\sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{l}\right) =$$

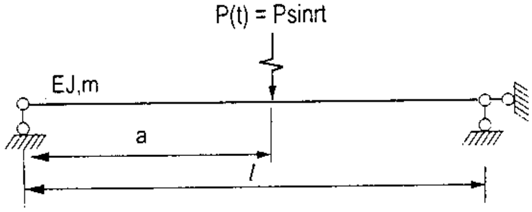
$$= \frac{2ql^2}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$$

Giá trị lớn nhất của mô men uốn $M_{max} = \dfrac{2ql^2}{\pi^2}$

Trên hình (3-7) mô tả biểu đồ độ võng và biểu đồ mô men uốn dọc theo trục dầm:

Thí dụ 3.5:

Xác định phương trình dao động của dầm cho trên hình (3.8). Dầm có khối lượng phân bố đều tiết diện không đổi, chịu lực động tuần hoàn Psinrt. Xác định độ võng lớn nhất khi $a = \frac{1}{2}$, $\frac{r}{\omega_1} = \frac{3}{4}$.



Hình 3.8

Khi hệ chịu tác dụng của lực động tuần hoàn, hệ số $K_{ai}(t)$ theo (3-61) được tính cụ thể như sau:

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \sin r\tau \sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \frac{\sin rt}{\omega_i^2 - r^2} \tag{3-64}$$

Thay hệ số này vào phương trình (3-60), ta có:

$$Y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i(x)}{m_x}\cdot\frac{\sin rt}{\omega_i^2 - r^2} = \frac{\sin rt}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i(x)}{\omega_i^2 - r^2} \tag{3-65}$$

Ở thí dụ (3-1) ta đã có tần số và dạng dao động riêng:

$$\omega_i = i^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$X_i = \sin\frac{i\pi x}{l}$$

Theo (3-63) ta xác định tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng trong trường hợp hệ chịu tác dụng của tải trọng động tập trung:

$$q_i(x) = m_x X_i\frac{\sum_{j=1}^{m} P_j(t)X_i(x_j)}{\int_0^l m_x X_i^2\,dx} = m\sin\frac{i\pi x}{l}\cdot\frac{P.\sin\frac{i\pi a}{l}}{\frac{ml}{2}} =$$

$$= \frac{2P}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}\cdot\frac{i\pi a}{l}$$

Thay giá trị nhận được vào (3-65) ta có phương trình dao động của hệ như sau:

$$Y(x,t) = \frac{\sin rt}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2P}{l}\cdot\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a}{l}}{\omega_i^2 - r^2}$$

Giá trị độ võng đạt lớn nhất theo thời gian khi sinrt = 1, ta có:

$$Y(x) = \frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a}{l}}{\omega_i^2 - r^2} =$$

$$= \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a}{l}}{i^4\left(1-\frac{r^2}{\omega_i^2}\right)}$$

Khi tải trọng động đặt tại vị trí giữa dầm $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ thì độ võng của dầm đạt giá trị lớn nhất theo toạ độ. Khi đó biểu thức tử số bên trong dấu tổng sẽ là:

$$\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a}{l} = \left(\sin\frac{i\pi}{2}\right)^2 = \begin{cases} 0 \text{ khi } i = 2, 4\ldots \text{ (chẵn)} \\ 1 \text{ khi } i = 1, 3\ldots \text{ (lẻ)} \end{cases}$$

Do đó:

$$Y_{max} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}\sum_{i=1,3,}^{\infty}\frac{1}{i^4\left(1 - \frac{r^2}{\omega_i^2}\right)} =$$

$$= Y_T\cdot\frac{96}{\pi^4}\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^4\left(1 - \frac{r^2}{\omega_i^2}\right)}$$

Trong đó: $Y_T = \frac{Pl^3}{48EJ}$ là độ võng tĩnh do tải trọng tập trung đặt tĩnh tại giữa dầm gây ra.

Tính các tỉ số $\frac{r}{\omega_i}$

$$\frac{r}{\omega_3} = \frac{r}{3^2.\omega_1} = \frac{0,75}{9} = 0,083\,;\ \frac{r}{\omega_5} = 0,03\,;\ \frac{r}{\omega_7} = 0,015\,;\ldots$$

Vậy:

$$Y_{max} = Y_T\cdot\frac{96}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4(1-0,75^2)} + \frac{1}{3^4(1-0,083^2)} + \ldots\right] \approx 2,254.Y_T$$

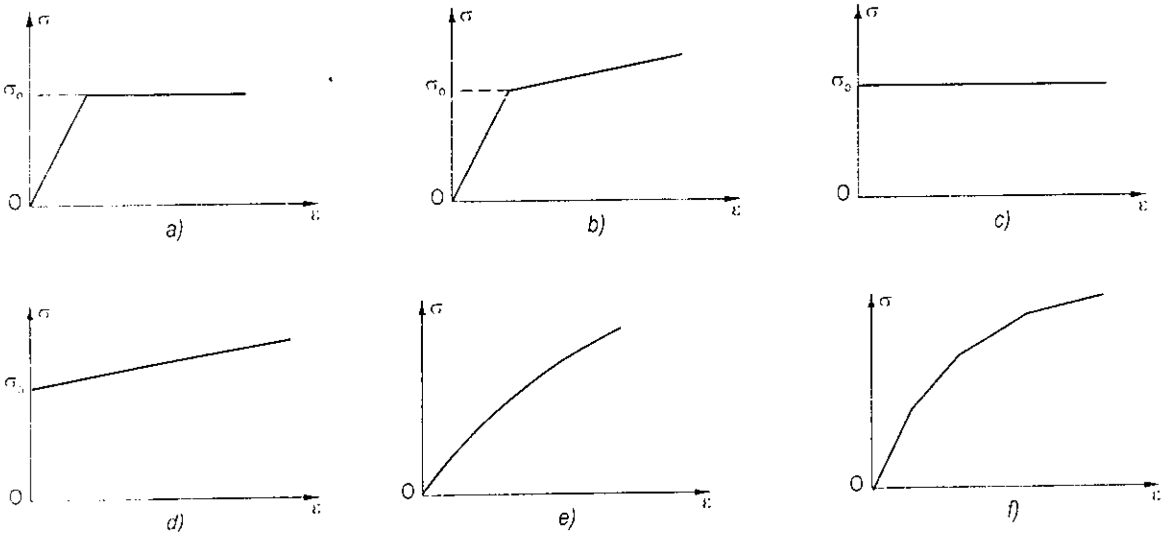
Như vậy có nghĩa là: Ở trường hợp bài toán cụ thể ta xét hệ số động của độ võng $K_{d,y} = 2,254$.

Chương 4
DAO ĐỘNG ĐÀN DẺO HỆ MỘT BẬC TỰ DO

§1. KHÁI NIỆM

Xét đến tính dẻo của vật liệu có ý nghĩa thực tiễn lớn, đặc biệt đối với các công trình chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn. Khi chịu tác dụng của tải trọng ngắn hạn cường độ lớn, nhiều trường hợp cho phép biến dạng dẻo, điều đó thích hợp với việc sử dụng công trình trong một thời gian ngắn của tải trọng động ngắn hạn tác dụng mà không bị phá hoại. Bởi vì, với tác dụng của tải trọng ngắn hạn, khi kết cấu bị biến dạng qua giai đoạn đàn hồi, thì tải trọng động đã mất đi rồi. Chính vì vậy tính kết cấu công trình chịu tải trọng ngắn hạn làm việc trong giai đoạn dẻo có ý nghĩa thực tiễn lớn.

Đặc trưng cơ bản của kết cấu làm việc trong giai đoạn dẻo được thể hiện ở biểu đồ quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (σ - ε). Các biểu đồ quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu có nhiều dạng khác nhau khi chịu tải. Với đa số các vật liệu xây dựng ta sử dụng thích hợp các biểu đồ quan hệ (σ - ε) như sau: hệ đàn hồi dẻo lí tưởng: (Hình 4.1a); hệ đàn hồi có sự tăng ứng suất qua giai đoạn đàn hồi: (hình 4.1b); hệ cứng dẻo: (hình 4.1c); hệ cứng dẻo có sự tăng ứng suất: hình 4.1d; hệ với đặc trưng đàn hồi phi tuyến bất kì: (hình 4.1e). Hệ có đặc trưng đàn hồi phi tuyến bất kì có thể thay đường cong phi tuyến bất kì bằng đường gẫy khúc cho trên hình 4.1f.



Hình 4.1

Khi tính kết cấu chịu tải trọng ngắn hạn, ta thường phải xác định nội lực và chuyển vị lớn nhất trong hệ. Như đã biết: Chỉ có các tần số thấp là có ảnh hưởng lớn đến quy luật chuyển động của hệ. Vì vậy trong nhiều trường hợp tính dao động của hệ chịu tải trọng ngắn hạn ta chỉ hạn chế lấy số bậc tự do không lớn và thường lấy tần số thấp nhất, tức là ta tính hệ như hệ một bậc tự do. Ở hệ một bậc tự do, các hệ số động học được sử dụng rất tiện lợi, nó cho phép đưa bài toán động về bài toán tĩnh bằng thay thế tải trọng động bằng tải trọng tĩnh tương đương nào đó. Ở chương 1, khi xét hệ một bậc tự do ta đã biết: đối với hệ một bậc tự do trong giai đoạn đàn hồi chỉ có một hệ số động, hệ số này chung cho cả chuyển vị và nội lực của hệ. Nhưng đối với hệ một bậc tự do trong giai đoạn dẻo thì hệ số động chuyển vị khác với hệ số động nội lực, hệ số động nội lực cũng chính là hệ số động tải trọng. Ta gọi hệ số động chuyển vị là K_y, gọi hệ số động tải trọng là K_q, ta có $K_y \neq K_q$.

Hệ số K_y được xác định bằng quan hệ giữa chuyển vị cực đại trong hệ khi chịu tải trọng động: y_{max} với chuyển vị do tải trọng tĩnh có giá trị bằng giá trị lớn nhất của tải trọng động gây ra: y_T:

$$K_y = \frac{y_{max}}{y_T} \tag{4-1}$$

Hệ số K_q được xác định bằng quan hệ giữa tải trọng tĩnh tương đương: P_{td} với giá trị lớn nhất của tải trọng động P_m:

$$K_q = \frac{P_{td}}{P_m} \tag{4-2}$$

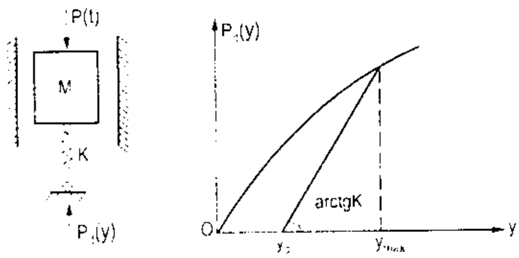
§2. DAO ĐỘNG PHI TUYẾN CỦA HỆ CÓ LỰC ĐÀN HỒI BẤT KÌ

1. Phương trình vi phân dao động

Xét dao động của hệ một bậc tự do có mô hình đơn giản cho trên hình 4.2a. Đặc trưng đàn hồi có dạng phi tuyến bất kì được phản ánh trên hình 4.2b. Vì đặc trưng đàn hồi phi tuyến nên dao động của hệ được xét là dao động phi tuyến (phi tuyến vật lí). Phương trình vi phân chuyển động của hệ được xây dựng trên cơ sở nguyên lí Đalămbe từ điều kiện cân bằng của các lực trong đó có kể đến lực quán tính được viết như sau:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + P_d = P_t \tag{4-3}$$

Quan hệ của lực đàn hồi với chuyển vị được xem xét ở hai giai đoạn: giai đoạn tăng



Hình 4.2

tải và giai đoạn dỡ tải. Khi tăng tải quan hệ của lực đàn hồi với chuyển vị có dạng phi tuyến bất kì, còn khi dỡ tải quan hệ có dạng tuyến tính như cho trên hình 4.2b. Khi dỡ tải:

$$P_d(y) = K\,(y - y_d)$$

Trong đó:
$$y_d = y_{max} - \frac{P_{d(ymax)}}{K}$$

Với: y_{max} là chuyển vị cực đại của hệ khi chất tải, và K là độ cứng đàn hồi của hệ khi dỡ tải. Khi đó, phương trình vi phân dao động của hệ sẽ có dạng:

- Lúc tăng tải:

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} + P_d(y_1) = P(t) \qquad (4\text{-}4)$$

- Lúc dỡ tải:

$$M\frac{d^2y_2}{dt^2} + K(y_2 - y_d) = P(t) \qquad (4\text{-}5)$$

Trong đó: y_1 sẽ là chuyển vị của hệ khi tăng tải, y_2 là chuyển vị của hệ khi dỡ tải.

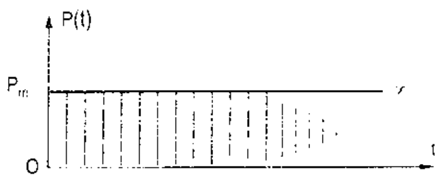
Khi quan hệ $P(y_1)$ và tải trọng P(t) là bất kì, nghiệm của phương trình vi phân (4-4) có thể được tìm bằng các phương pháp tích phân số.

2. Tác dụng của tải trọng đặt đột ngột và giữ nguyên mãi trên hệ

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, sau đó giữ nguyên mãi trên hệ, ta có:

$$P(t) = Pm = const$$

Ta sẽ tiến hành tìm nghiệm của phương trình vi phân (4.3) như sau:



Hình 4.3

Nếu xem rằng:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

thì khi tích phân hai vế của phương trình (4-4) ta sẽ nhận được:

$$\frac{M}{2}\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \int_0^{y_1} P_d(y_1)\,dy = P_m.y_1 + C_1 \qquad (4\text{-}6)$$

Từ biểu thức (4-6), ta suy ra:

$$\frac{dt}{dy_1} = \sqrt{\frac{M}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{P_m.y_1 + C_1 - \int_0^{y_1} P_d(y_1)\,dy}}$$

Tích phân hai vế biểu thức trên, ta sẽ được:

$$t + C_2 = \sqrt{\frac{M}{2}} \int_o^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{P_m.y_1 + C_1 - \int_o^{y_1} P_d(y_1)dy}} \tag{4-7}$$

Các hằng số C_1, C_2 trong các biểu thức (4-6), (4-7) được xác định từ điều kiện ban đầu. Nếu xem điều kiện ban đầu bằng không, tức là: tại $t = 0$, ta có: $y_1 = 0, \frac{dy_1}{dt} = 0$ thay điều kiện ban đầu vào (4-6) và (4-7), ta nhận được $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Chuyển vị lớn nhất của hệ đạt được tại thời điểm khi $\frac{dy_1}{dt} = 0$. Đưa điều kiện này vào biểu thức (4-6), ta có:

$$P_m.y_{1(max)} = \int_o^{y_1} P_d(y_1)\, dy \tag{4-8}$$

Giả sử ta tính với lực đàn hồi có quy luật lũy thừa:

$$P_d(y_1) = K.y^n \tag{4-9}$$

Trong trường hợp này, từ phương trình (4-8), ta sẽ nhận được:

$$y_{max} = \left[\frac{(n+1)\ P_m}{K}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{4-10}$$

Thế biểu thức (4-10) vào (4-9) ta có:

$$P_d y_{(max)} = (n+1)P_m \tag{4-11}$$

Bây giờ ta sẽ xác định hệ số động chuyển vị và hệ số động tải trọng. Độ vòng tĩnh do tải trọng động có giá trị lớn nhất gây ra là: $y_T = \left(\frac{P_m}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Tải trọng động có giá trị lớn nhất: P_m.

Tải trọng tĩnh tương đương: $P_{td} = Ky^n_{max} = (n+1)P_m$.

Do đó, ta có hệ số động chuyển vị:

$$K_y = \frac{y_{max}}{y_T} = (n+1)^{\frac{1}{n}} \tag{4-12}$$

Hệ số động tải trọng:

$$K_q = \frac{P_{td}}{P_m} = (n+1) \tag{4-13}$$

Có hệ số động K_y, K_q được tính với các giá trị khác nhau theo n cho ở bảng (4.1).

Bảng 4.1

N	0,2	0,5	0,8	1	2	3	5	10
K_y	2,49	2,25	2,09	2	1,73	1,59	1,43	1,27
K_q	1,2	1,5	1,8	2	3	4	6	11

Qua các giá trị ở bảng trê ta thấy rằng: Hệ số động phụ thuộc vào đặc trưng phi đàn hồi qua giá trị n.

Khi n < 1, ứng với trường hợp đường cong quan hệ của lực đàn hồi với chuyển vị là đường cong lõm, ta có $K_y > K_q$.

Khi n > 1, ta có: $K_y < K_q$ (đường cong lồi).

Khi n = 1, ứng với trường hợp lực đàn hồi tuyến tính, ta có: $K_y = K_q = 2$. Điều này hoàn toàn đúng với kết quả đã được xét ở chương I.

Chuyển động của hệ khi dỡ tải được xác định từ phương trình vi phân (4-5) với điều kiện ban đầu sau: tại $t = t_m$, ta có:

$$y_2 = y_{1(tm)} = y_{max}$$
$$\dot{y}_2 = 0$$

Trong đó: t_m là thời gian đạt được chuyển vị lớn nhất xác định theo (4-7). Phương trình vi phân dao động (4-5) là phương trình vi phân tuyến tính, nghiệm của nó dễ dàng được tìm.

3. Tác dụng của xung tức thời S

Trong trường hợp này chuyển vị của hệ khi chất tải được tìm từ phương trình vi phân (4-4) với các điều kiện ban đầu sau:

$$y_1(0) = 0$$
$$\dot{y}_1(0) = \frac{S}{M}$$

Lúc này tải trọng bằng không P(t) = 0. Thay các điều kiện này vào phương trình (4-6), ta xác định được hằng số C_1 như sau:

$$C_1 = \frac{S^2}{2M}$$

Phương trình xác định chuyển vị lớn nhất của hệ sẽ nhận được từ phương trình (4-6) khi cho $\frac{dy_1}{dt} = 0$

$$\int_0^{y_1} P_d(y_1)\,dy = \frac{S^2}{2M} \qquad (4\text{-}14)$$

Tính với trường hợp lực đàn hồi có dạng hàm luỹ thừa (4-9). Thế biểu thức (4-9) vào (4-14), sau khi lấy tích phân và biến đổi, ta nhận được:

$$y_{max} = \left[\frac{(n+1)S^2}{2KM}\right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{4-15}$$

Tải trọng tĩnh tương đương được tính tương tự như ở phần trên:

$$P_{td} = \left[\frac{s^2.(n+1)}{2M}\right]^{\frac{n}{n+1}} .K^{\frac{1}{n+1}} \tag{4-16}$$

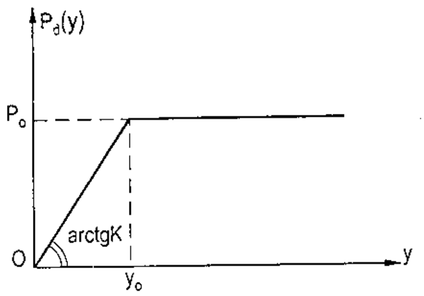
§3. DAO ĐỘNG CỦA HỆ ĐÀN DẺO LÍ TƯỞNG

1. Phương trình dao động của hệ

Xét hệ có đặc trưng đàn hồi dẻo lí tưởng. Quan hệ của lực đàn hồi $P_d(y)$ với chuyển vị y cho trên hình 4.4 gồm hai đoạn thẳng. Đoạn thẳng đầu tiên từ gốc toạ độ phù hợp với giai đoạn đàn hồi. Đoạn thẳng thứ hai song song với trục y phù hợp với giai đoạn dẻo. Lực đàn hồi được xác định như sau:

$P_d(y) = Ky$, khi: $y < y_o = \dfrac{P_o}{K}$

$P_d(y) = P_o = \text{const}$, khi: $y > y_o = \dfrac{P_o}{K}$



Hình 4.4

Phương trình vi phân dao động của hệ nhận được bằng cách thế P(y) vào phương trình cân bằng lực (4-3). Khi thay $P_d(y) = K.y$ vào (4-3), ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ trong giai đoạn đàn hồi.

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} + Ky_1 = P(t) \tag{4-17}$$

Thay $P_d(y) = P_o$ vào (4-3), ta được phương trình vi phân dao động của hệ trong giai đoạn dẻo:

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} + P_o = P(t) \tag{4-18}$$

Như vậy khi tính hệ đàn hồi dẻo lí tưởng, phương trình vi phân dao động (4-3) được phân ra hai phương trình vi phân tuyến tính (4-17) và (4-18).

Nghiệm của phương trình vi phân (4-17) như đã biết ở chương I là:

$$y_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \frac{1}{M\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \tag{4-19}$$

Trong đó: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ là tần số dao động riêng của hệ A, B là các hằng số được xác định từ điều kiện ban đầu. Nếu xem điều kiện ban đầu bằng không, tức là: tại t = 0, ta có: $y_1(t) = 0$, $\dot{y}_1(t) = 0$, thì A = 0, B = 0; Lúc này ta có:

$$y_1(t) = \frac{1}{M\omega} \int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{(4-19')}$$

Biểu thức (4-19), chính là dao động của hệ trong giai đoạn đàn hồi, nó chỉ đúng đến thời điểm $t = t_o$; khi đó: $y_1(t_o) = y_o = \dfrac{P_o}{K}$.

Nghiệm của phương trình vi phân (4-18) được tìm bằng phương pháp tích phân thông thường. Tích phân hai vế phương trình (4-18), ta được:

$$\dot{y}_2(t) = \frac{1}{M}\left[\int_{t_o}^{t} P_{(t)}dt - P_o(t-t_o)\right] + C_1$$

Và do đó:

$$y_2(t) = \frac{1}{M}\left[\int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} P_{(t)}dt^2 - \frac{P_o(t-t_o)^2}{2}\right] + C_1(t-t_o) + C_2$$

Biểu thức trên biểu thị dao động của hệ trong giai đoạn dẻo khi $t > t_o$; các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu sau: tại $t = t_o$, ta có:

$$y_2(t) = y_o\ ;\ \dot{y}_2(t) = \dot{y}_1(t_o)$$

Với điều kiện ban đầu này, ta xác định được:

$$C_1 = \dot{y}_1(t_o)\ ;\ C_2 = y_o$$

Do đó:

$$y_2(t) = \frac{1}{M}\left[\int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} P(t)dt^2 - \frac{P_o(t-t_o)^2}{2}\right] + \dot{y}_1(t_o)(t-t_o) + y_o \qquad \text{(4-20)}$$

2. Tác dụng của tải trọng đặt đột ngột và giữ nguyên mãi trên hệ

Ta sẽ xét một trường hợp cụ thể: khi hệ chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, sau đó giữ nguyên mãi trên hệ (hình 4.3): $P(t) = P_m = \text{const}$.

Ở giai đoạn đàn hồi, nếu xem điều kiện ban đầu bằng không, tức là: tại t = 0, ta có: $y_{1(o)} = 0$, $\dot{y}_{1(o)} = 0$, thì phương trình dao động xác định theo (4-19") sẽ là:

$$y_1(t) = \frac{P_m}{K}(1-\cos\omega t) \qquad \text{(4-21)}$$

Phương trình này chính là (1-191) của chương 1.

Để xác định phương trình dao động trong giai đoạn dẻo, ta cần phải xác định thời điểm cuối giai đoạn đàn hồi $t = t_o$; thời điểm này được xác định từ biểu thức (4-21) khi cho $t = t_o$ và $Ky_1 = P_o$, ta có:

$$Ky_1 = P_m(1 - \cos\omega t_o) = P_o$$

Suy ra: $$\omega t_o = \arccos\left(1 - \frac{P_o}{P_m}\right)$$

Hay: $$t_o = \frac{1}{\omega}\arccos\left(1 - \frac{P_o}{P_m}\right) \qquad (4\text{-}22)$$

Từ biểu thức trên, ta thấy rằng biến dạng dẻo trong hệ phát sinh nếu:

$$\frac{P_o}{P_m} < 2$$

Lấy đạo hàm phương trình (4-20) và tính tại thời điểm $t = t_o$, ta có:

$$\dot{y}_1(t_o) = \frac{P_m.\omega}{K}\sin\omega t_o = \frac{\omega P_o}{K}\sqrt{\frac{2P_m}{P_o} - 1} \qquad (4\text{-}23)$$

Đưa (4-23) vào (4-20), tính tích phân kép của biểu thức (4-20) với $P(t) = P_m$, sau khi biến đổi ta nhận được phương trình chuyển vị của hệ trong giai đoạn dẻo như sau:

$$y_2(t) = \frac{P_o}{K}\left[1 + \sqrt{\frac{2P_m}{P_o} - 1}\ .\ \omega(t - t_o) - \left(1 - \frac{P_m}{P_o}\right)\frac{\omega^2}{2}(t - t_o)^2\right] \qquad (4\text{-}24)$$

Chuyển vị của hệ trong giai đoạn dẻo đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm ứng với phương trình $\dot{y}_2(t) = 0$. Sau khi lấy đạo hàm (4-4) và cho bằng không, ta được:

$$t_m = t_o + \frac{\sqrt{2\frac{P_m}{P_o} - 1}}{\omega\left(1 - \frac{P_m}{P_o}\right)} \qquad (4\text{-}25)$$

Thế $(t_m - t_o)$ theo (4-25) vào (4-24), sau khi biến đổi, ta nhận được:

$$y_{max} = \frac{P_o}{K}\cdot\frac{1}{2\left(1 - \frac{P_m}{P_o}\right)} \qquad (4\text{-}26)$$

Nhận xét:

- Từ biểu thức (4-26) ta thấy rằng: điều kiện để hệ làm việc trong giai đoạn dẻo và có chuyển vị hữu hạn là:

$$0,5\ P_o < P_m < P_o \tag{4-27}$$

- Khi $P_m \le 0,5\ P_o$ thì hệ làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Chuyển vị lớn nhất của hệ trong giai đoạn đàn hồi được xác định từ (4-21).

$$y_{max} = 2\frac{P_m}{K} \tag{4-28}$$

Bây giờ ta sẽ xác định hệ số động chuyển vị và hệ số động tải trọng trong giai đoạn dẻo.

Hệ số động tải trọng phù hợp với biểu thức (4-2) sẽ là:

$$K_q = \frac{P_o}{P_m} \tag{4-29}$$

Từ các biểu thức (4-26) và (4-29) ta sẽ tìm được hệ số động tải trọng biểu thị qua chuyển vị như sau:

$$K_q = \frac{2\left(\dfrac{y_{max}}{y_o}\right)}{2\left(\dfrac{y_{max}}{y_o}\right) - 1} = \frac{1}{1 - 0,5\left(\dfrac{y_o}{y_{max}}\right)} \tag{4-30}$$

Hệ số động chuyển vị được xác định theo (4-1):

$$Ky = \frac{y_{max}}{y_T} \tag{4-31}$$

Trong đó: y_{max} được xác định theo (4-26), còn $y_T = \dfrac{P_m}{K}$. Ta sẽ biểu thị hệ số động chuyển vị theo hệ số động tải trọng bằng cách đưa (4-26) vào (4-31) và sử dụng (4-29), ta có:

$$K_y = K_q\left(1 + 0,5\frac{2 - K_q}{K_q - 1}\right) \tag{4-32}$$

Các công thức (4-29) và (4-32) cho phép kiểm tra khả năng chịu tải của hệ. Từ giá trị tải trọng ngoài P_m và giá trị lực đàn hồi giới hạn P_o ta dễ dàng xác định được hệ số động tải trọng K_q; sau đó sẽ xác định hệ số động chuyển vị theo (4-32). Ta sẽ kiểm tra điều kiện:

$$y_{max} = K_y\frac{P_m}{K} \le y_{gh} \tag{4-33}$$

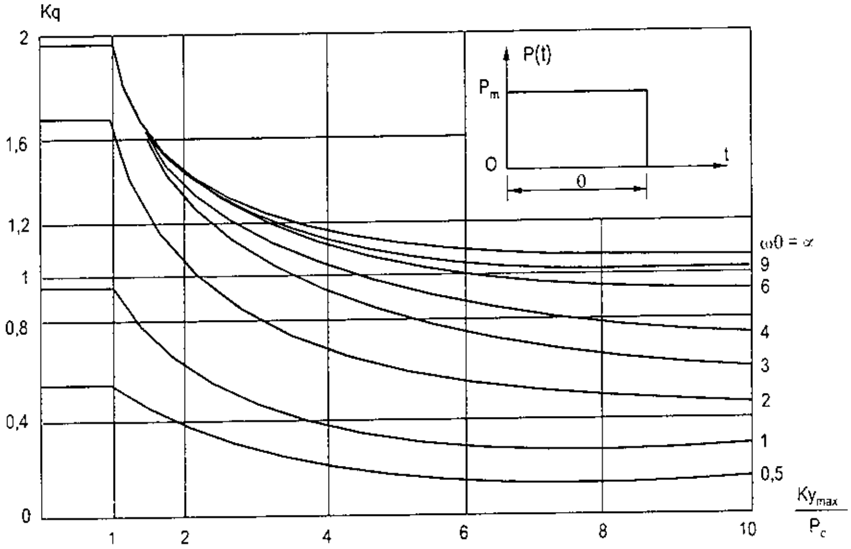
Trong đó: y_{gh} là chuyển vị giới hạn.

Khi tính kết cấu chịu tải trọng động đã cho P_m, ta thiết lập quan hệ giới hạn:

$$\frac{y_{max}}{y_o} = \frac{K}{P_o} y_{max}$$

và sẽ xác định hệ số động tải trọng theo biểu thức (4-30), sau đó sẽ tính tải trọng tính tương đương theo (4-2); $P_{td} = K_q \cdot P_m$. Trên cơ sở đó ta sẽ xác định nội lực và thiết kế tiết diện.

Trên hình (4.5) mô tả quan hệ giữa hệ số động tải trọng K_q với tỉ số $\left(\frac{Ky_{max}}{P_o}\right)$ khi hệ chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột. Đường đồ thị trên cùng phù hợp với tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, sau đó giữ nguyên giá trị trên hệ.

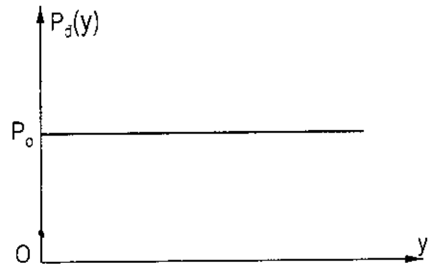


Hình 4.5

§4. DAO ĐỘNG CỦA HỆ CỨNG DẺO

Trong tính toán các kết cấu phát sinh biến dạng dẻo vượt qua giai đoạn đàn hồi, đôi khi ta bỏ qua sự làm việc của kết cấu trong giai đoạn đàn hồi, và chỉ xét dao động của hệ trong giai đoạn dẻo.

Lúc này quan hệ của lực đàn hồi với chuyển vị là đường thẳng song song với trục y, khi tính dao động của hệ cứng dẻo ta giả thiết rằng, kết cấu được giữ nguyên trạng thái khi tải trọng động bên ngoài chưa đạt đến giá trị bằng giá trị giới hạn đàn hồi P_o.



Hình 4.6

Trong trường hợp này phương trình vi phân chuyển động của hệ có dạng:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = P(t) - P_o \qquad (4\text{-}34)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (4-34) được tìm bằng cách lấy tích phân phương trình đó và xem điều kiện ban đầu bằng không, tức là, tại t = 0 ta có: $y_{(o)} = 0$; $\dot{y}_{(o)} = 0$, ta nhận được:

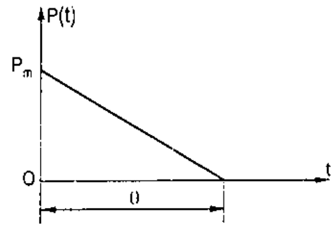
$$M\frac{dy}{dt} = \int_o^t P(t)dt - P_o.t \tag{4-35}$$

$$My = \int_o^t \int_o^t P(t)dt^2 - \frac{P_o.t^2}{2} \tag{4-36}$$

Từ phương trình (4-34) ta thấy rằng: tải trọng ngoài tác dụng P(t) cần phải được bắt đầu từ một thời điểm nào đó nhỏ hoặc lớn hơn P_o. Vì vậy, nếu hệ cứng dẻo dao động do tải trọng tác dụng không đổi theo thời gian thì chuyển vị của hệ sẽ có giá trị vô hạn.

Ta sẽ khảo sát trường hợp tải trọng động thay đổi theo quy luật tuyến tính với biên độ giảm dần (hình 4.7).

$$P(t) = P_m\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$$



Hình 4.7

Trong đó: $P_m > P_o$. Từ (4-35) và (4-36), ta có:

$$M\frac{dy}{dt} = P_m\left(t - \frac{t^2}{2\theta}\right) - P_o t \tag{4-37}$$

$$My = P_m\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\theta}\right) - P_o \cdot \frac{t^2}{2} \tag{4-38}$$

Chuyển lực của hệ đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm khi $\frac{dy}{dt} = 0$ là:

$$t_m = 2\theta\left(1 - \frac{P_o}{P_m}\right) \tag{4-39}$$

Thế biểu thức (4-39) vào (4-38), ta sẽ nhận được:

$$y_{max} = \frac{2P_m\theta^2}{3M}\left(1 - \frac{P_o}{P_m}\right)^3 \tag{4-40}$$

Hệ số động tải trọng phù hợp với biểu thức (4-2) sẽ là:

$$K_q = \frac{P_o}{P_m} \tag{4-41}$$

Từ hai biểu thức (4-40) và (4-41) ta sẽ xác định được hệ số động tải trọng:

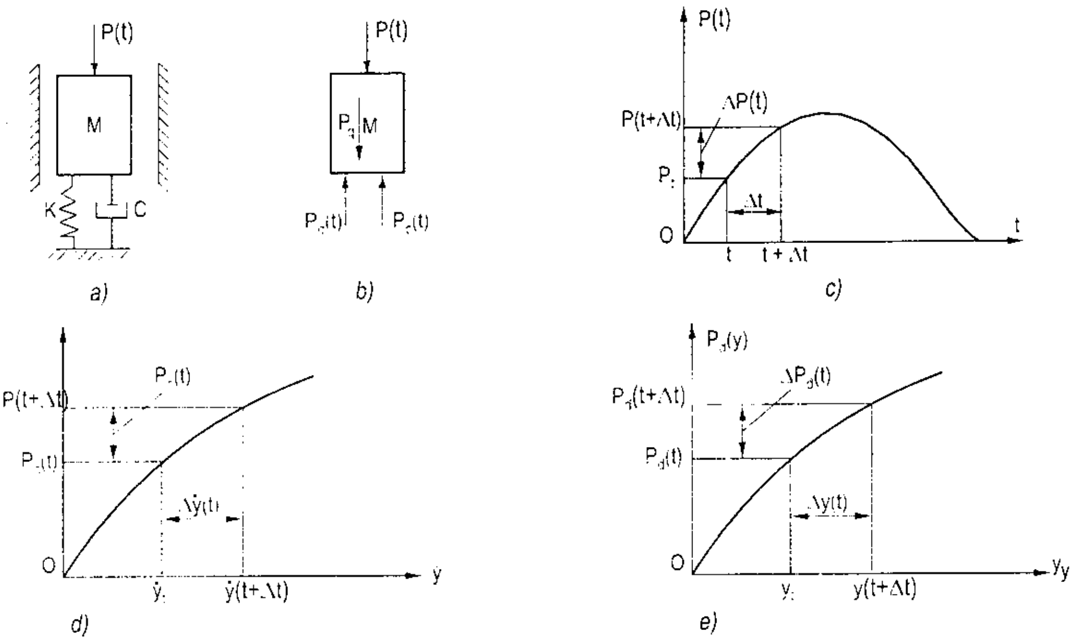
$$K_q = 1 - \sqrt{\frac{3My_{max}}{2\theta^2.P_m}} \tag{4-42}$$

§5. TÍNH DAO ĐỘNG PHI TUYẾN THEO PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TRỰC TIẾP

Các phương pháp tích phân trực tiếp đã được xét ở chương II (dao động của hệ hữu hạn bậc tự do) ở đây khi xét hệ một bậc tự do có đặc trưng đàn hồi phi tuyến bất kỳ ta cũng có thể áp dụng phương pháp tích phân số đối với phương trình vi phân dao động (4-4). Việc áp dụng phương pháp tích phân số trực tiếp đối với các hệ phi đàn hồi rất thích hợp và có hiệu quả. Như đã biết phương pháp tích phân trực tiếp được tính với một chuỗi các khoảng thời gian Δt liên tiếp từ khi hệ bắt đầu chịu tác dụng của tải trọng động bên ngoài đến thời điểm mong muốn bất kì. Ở mỗi bước thời gian, điều kiện cân bằng lực đều được thoả mãn. Phương trình cân bằng lực có thể viết được trong các gia số tương ứng với các bước thời gian, và việc tích phân số cũng sẽ được tiến hành đối với các phương trình cân bằng lực trong các gia số.

1. Phương trình cân bằng lực trong các gia số

Xét dao động của hệ một bậc tự do có mô hình tổng quát cho trên hình 4.8a. Các lực tác dụng vào khối lượng cho trên hình 4.8b, tải trọng động tác dụng bất kì cho trên hình 4.8c; các đặc trưng phi tuyến của lực đàn hồi và lực cản cho trên hình 4.8d và 4.8e.



Hình 4.8

Tại thời điểm t, từ điều kiện cân bằng của các lực tác dụng vào khối lượng, ta có:

$$P_q(t) + P_c(t) + P_d(t) = P(t) \qquad (4\text{-}43)$$

Qua một khoảng thời gian ngắn Δt, tương ứng ta cũng có:

$$-P_q(t + \Delta t) + P_c(t + \Delta t) + P_d(t + \Delta t) + = P(t + \Delta t) \qquad (4\text{-}44)$$

Sau khi thế (4-43) vào (4-44), ta nhận được phương trình cân bằng lực trong các gia số:

$$-\Delta P_q(t) + \Delta P_c(t) + \Delta P_d(t) = \Delta P(t) \tag{4-45}$$

Các gia số của các lực các phương trình (4-45) có thể biểu thị như sau:

$$\left.\begin{aligned} P_q(t) &= P_q(t+\Delta t) - P_q(t) = -M\Delta\ddot{y}(t) \\ \Delta P_c(t) &= P_c(t+\Delta t) - P_c(t) = C(t)\Delta\dot{y}(t) \\ \Delta P_d(t) &= P_d(t+\Delta t) - P_d(t) = K(t)\Delta y(t) \\ \Delta P(t) &= P_q(t+\Delta t) - P(t) \end{aligned}\right\} \tag{4-46}$$

Các tham số tải trọng P(t), tham số tắt dần C(t), tham số độ cứng K(t) tương ứng trong khoảng thời gian Δt được cho trên hình 4.8c, d, e. Khi biểu thị các gia số của các lực (4-46) ta giả thiết rằng: Khối lượng của hệ không thay đổi với mọi khoảng thời gian. Các góc lệch tiếp tuyến được xác định tại đầu mỗi khoảng thời gian như sau:

$$c(t) \approx \left(\frac{dP_c}{d\dot{y}}\right); \quad K(t) \approx \left(\frac{dP_d}{dy}\right) \tag{4-47}$$

Thế các biểu thức (4-46) vào (4-45), ta nhận được phương trình cân bằng lực trong các gia số tại thời điểm t:

$$M\Delta\ddot{y}(t) + C(t)\Delta\dot{y}(t) + K(t)\Delta y(t) = \Delta P(t) \tag{4-48}$$

2. Áp dụng phương pháp gia tốc tuyến tính

Có nhiều phương pháp để tính tích phân số trực tiếp phương trình (4-48), ở đây sử dụng phương pháp gia tốc tuyến tính. Như đã trình bày ở chương hai, giả thiết của phương pháp này là: trong giới hạn của mỗi tích phân thời gian, gia tốc chuyển động thay đổi theo quy luật tuyến tính, khi đó hệ số tắt dần và độ cứng của hệ được xem là không thay đổi.

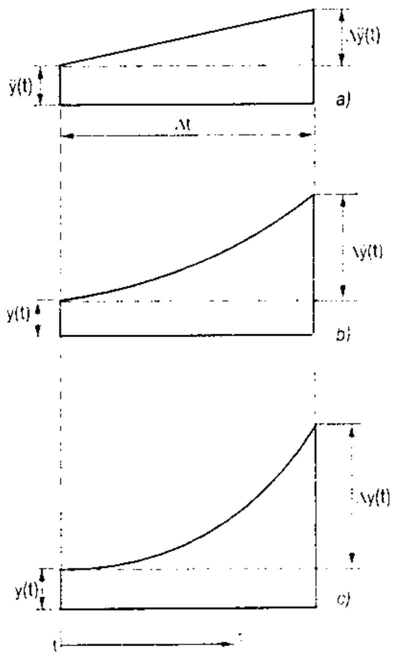
Khi gia tốc thay đổi theo quy luật tuyến tính ta có: Hình 4.9a.

$$\ddot{y}(\tau) = \ddot{y}_t + \frac{\Delta\ddot{y}}{\Delta t}\cdot\tau$$

Với: $0 \le \tau \le \Delta$

Khi đó, tốc độ và chuyển vị của hệ sẽ thay đổi theo quy luật parabol bậc hai và parabol bậc ba, hình 4.9b, c.

$$\dot{y}(\tau) = \dot{y}_t + \ddot{y}_t.\tau + \frac{\Delta\ddot{y}}{\Delta t}\cdot\frac{\tau^2}{2}$$



Hình 4.9

$$y(\tau) = y_t + \dot{y}_t\ \tau + .\ddot{y}_t \cdot \frac{\tau^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{y}}{\Delta t} \cdot \frac{\tau^3}{6}$$

Từ các biểu thức xác định chuyển vị và tốc độ tại cuối khoảng thời gian $\tau = \Delta t$, ta sẽ có các gia số tốc độ và chuyển vị như sau:

$$\Delta\dot{y}(t) = \ddot{y}(t)\Delta t + \Delta\ddot{y}(t) \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{4-49}$$

$$\Delta y(t) = \dot{y}(t)\Delta t + \ddot{y}(t)\frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{y}(t)\frac{\Delta t^2}{6} \tag{4-50}$$

Từ (4-50), ta suy ra:

$$\Delta\ddot{y}(t) = \frac{6}{\Delta t^2}\Delta y(t) - \frac{6}{\Delta t}\dot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) \tag{4-51}$$

Thế biểu thức (4-51) vào (4-49), ta được:

$$\Delta\dot{y}(t)\frac{3}{\Delta t}\Delta y(t) - 3\dot{y}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t) \tag{4-52}$$

Thế các biểu thức (4.51) và (4.52) vào (4.48) ta sẽ nhận được phương trình chuyển động:

$$M\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta y(t) - \frac{6}{\Delta t}y(t) - 3\ddot{y}(t)\right] +$$

$$+C(t)\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta y(t) - 3\dot{y}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t)\right] + K(t)\Delta y(t) = \Delta P(t)$$

Chuyển sang vế phải tất cả các thành phần xác định bởi các điều kiện ban đầu, ta sẽ có:

$$K^*(t)\Delta y(t) = \Delta P^*(t) \tag{4-53}$$

Trong đó:

$$K^*(t) = K(t) + \frac{6}{\Delta t^2} \cdot M + \frac{3}{\Delta t} \cdot C(t) \tag{4-54}$$

$$\Delta P^*(t) = \Delta P(\tau) + M\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{y}(t) + 3\ddot{y}(t)\right] + C(t)\left[3\dot{y}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t)\right] \tag{4-55}$$

Ta thấy rằng: phương trình (4-53) tương đương với điều kiện cân bằng tĩnh trong các gia số. Sau khi giải phương trình (4-53), ta sẽ xác định được gia số chuyển vị $\Delta y(t)$. Thế $\Delta y(t)$ vào (4-52) ta sẽ nhận được gia số tốc độ $\Delta\dot{y}(t)$. Chuyển vị và tốc độ ở cuối gia số thời gian Δt được tính bằng việc bổ sung các gia số chuyển vị và gia số tốc độ:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t+\Delta t) &= \dot{y}(t) + \Delta\dot{y}(t) \\ y(t+\Delta t) &= y(t) + \Delta y(t) \end{aligned}\right\} \tag{4-56}$$

Tóm lại, trình tự của phương pháp trên được tiến hành như sau:

1. Xác định các đặc trưng phi đàn hồi của hệ gồm:

Độ cứng K(t), hệ số tắt dần C(t), và xác định các đại lượng biến đổi của lực cản $P_c(t)$ và lực đàn hồi P(t).

2. Xác định các điều kiện ban đầu: chuyển vị ban đầu và tốc độ ban đầu được xem là đã biết từ điều kiện ban đầu của bài toán, hoặc ở cuối gia số thời gian của bước trước. Gia tốc ban đầu được xác định từ điều kiện cân bằng lực:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{M}[P(t) - P_c(t) - P_{d(1)}] \tag{4-57}$$

3. Chọn bước thời gian Δt: Để đảm bảo độ chính xác cần thiết của kết quả tính toán cần chọn bước thời gian:

$$\Delta t \leq \frac{T}{10}$$

Trong đó: T là chu kì dao động riêng của hệ.

4. Xác định độ cứng $K^*(t)$ theo (4.54).

5. Xác định gia số tải trọng $\Delta P^*(t)$ theo (4-55).

6. Xác định gia số chuyển vị tại thời điểm t từ việc giải phương trình (4-53).

7. Xác định chuyển vị và tốc độ tại thời điểm (t + Δt) theo (4-56), trong đó gia số tốc độ tại thời điểm t được xác định theo (4-52).

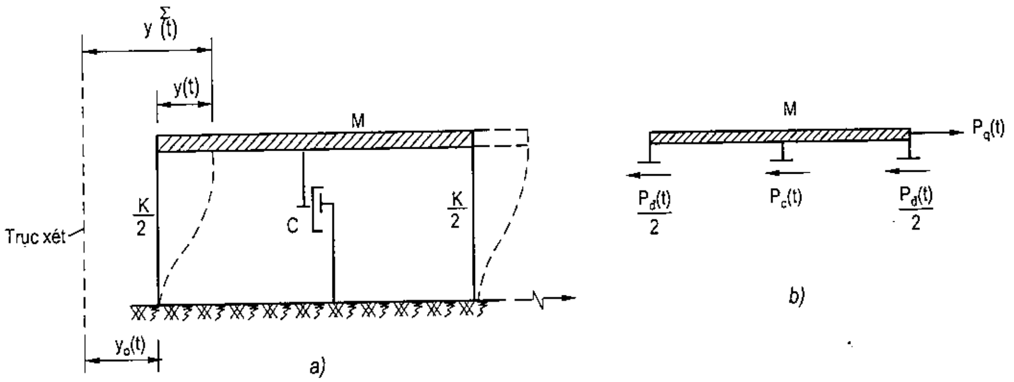
Chương 5
TÍNH CÔNG TRÌNH CHỊU TÁC DỤNG ĐỘNG ĐẤT

Động đất là một thảm họa vô cùng to lớn và khủng khiếp. Vì vậy, tính công trình chịu tác dụng động đất là một nhu cầu hết sức cần thiết trong xây dựng nhất là với các công trình quan trọng, các tháp nước, các công trình nhà cao tầng v.v..

Ở chương này sẽ trình bày bài toán dao động hệ một bậc tự do, hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất chủ yếu do gia tốc ngang của nền đất $\ddot{y}_o(t)$.

§1. DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG ĐỘNG ĐẤT

1. Xây dựng phương trình vi phân dao động hệ 1 bậc tự do chịu tác dụng động đất



Hình 5.1

Xét mô hình hệ 1 bậc tự do chịu tác dụng động đất được đặc trưng bởi chuyển động ngang của nền đất $y_o(t)$ hình 5.1. Phương trình cân bằng được xây dựng từ hình 5.1b. Như đã trình bày ở chương 1, §1: Phương trình vi phân chuyển động do sự kích động của nền được viết ở dạng 1.21 là:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = -M.\ddot{y}_o(t) \quad (5\text{-}1)$$

Thành phần ở vế phải của (5-1) đóng vai trò như tải trọng động thay đổi theo thời gian tác dụng lên hệ.

2. Phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng động đất

Phương trình vi phân (5-1) được viết ở dạng sau: (chia 2 vế của (5-1) cho M).

$$\ddot{y}(t) + 2\omega\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{y}_o(t) \quad (5\text{-}2)$$

Với ε là tham số tắt dần, ω là tần số dao động riêng.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5-2) bằng tổng của nghiệm thuần nhất ứng với vế phải của phương trình bằng không và nghiệm riêng. Nghiệm thuần nhất biểu thị dao động tự do tắt dần và sẽ mất đi sau một thời gian ngắn. Vì vậy ở đây chỉ xét tới nghiệm riêng; nghiệm riêng của phương trình vi phân (5-2) được viết theo (1.196):

$y(t) = \frac{1}{M\omega_c} \cdot \int_0^t P(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)d\tau$; Ở bài toán động đất, ta có:

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_c} \cdot \int_0^t \ddot{y}_{(o)}(\tau)e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)d\tau \qquad (5\text{-}3)$$

Trong đó: $\omega_c = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Với đại đa số các công trình xây dựng trong thực tế: $\varepsilon < 0{,}2$, do đó $\omega_c \approx \omega$, ta lấy $\omega_c = \omega$.

Viết lại phương trình nghiệm (5-3):

$$y(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (5\text{-}4)$$

(5-4) là phương trình dao động của hệ 1 bậc tự do chịu tác dụng động đất được đặc trưng bởi gia tốc kích động của nền $\ddot{y}_o(t)$.

Giá trị tuyệt đối lớn nhất của biểu thức tích phân ở vế phải của (5-4) gọi là phổ vận tốc và kí hiệu là $S_V(\varepsilon, T)$:

$$S_V(\varepsilon,T) = \left|\int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right| = |V_{(t)}|_{max} \qquad (5\text{-}5)$$

Trong đó:

$$V(t) = \int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega(t-\tau)\,d\tau \qquad (5\text{-}6)$$

Phù hợp với (5-5), giá trị tuyệt đối lớn nhất của chuyển vị (5-4) sẽ là

$$|y(t)|_{max} = \frac{1}{\omega}.S_V(\varepsilon,T) = S_d(\varepsilon,T) \qquad (5\text{-}7)$$

$S_d(\varepsilon, T)$: gọi là phổ chuyển vị.

Dấu trừ (-) ở vế phải của phương trình vi phân dao động (5-1) chỉ lực kích động thay đổi theo thời gian tác dụng vào hệ có chiều ngược với chiều gia tốc chuyển động của nền đất $\ddot{y}_o(t)$. Vì chuyển động của nền đất có đặc trưng đối chiếu tác dụng, nên chuyển vị lớn nhất của khối lượng (5-7), và các đại lượng nghiên cứu sau này cũng không xét đến dấu (-) đó nữa.

3. Xác định tải trọng động đất tác dụng lên hệ

Biểu thức tổng quát của lực tương ứng với trạng thái động của hệ 1 bậc tự do được xác định theo (1.191):

$$P_d(t) = P_m \,.\, K(t)$$

Trong đó: Hệ số động học thay đổi theo thời gian được xác định theo (1.197) và trong trường hợp này:

$$K(t) = \frac{\omega^2}{\omega_c}\int_0^t f(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega_c(t-\tau)\,d\tau = \omega\int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega\varepsilon(t-\tau)}.\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \omega.V(t)$$

Do đó: $$P_d(t) = M.\omega V(t) \tag{5-8}$$

Tải trọng động đất tác dụng lên hệ là giá trị lớn nhất của biểu thức $P_d(t)$ ở trên:

$$P_{dd} = M.\omega V_{(t)}^{max} = M.\omega S_v(\varepsilon, t) = M.S_a(\varepsilon, T) \tag{5-9}$$

Trong đó: $$S_a(\varepsilon, T) = \omega.S_v(\varepsilon, T) \tag{5-10}$$

$S_a(\varepsilon, T)$ gọi là phổ gia tốc.

§2. DAO ĐỘNG CỦA HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG ĐỘNG ĐẤT

1. Xây dựng phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất

Xét hệ n bậc tự do chịu tác dụng động đất đặc trưng bởi chuyển động ngang của nền $y_o(t)$, hình 5.2.

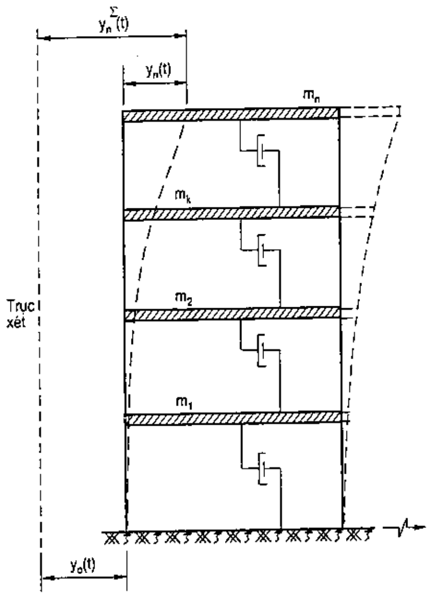
Chuyển vị toàn phần của các khối lượng trên hệ sẽ là:

$\left\{y^{\Sigma}(t)\right\} = \{y(t)\} + \{1\}y_o(t)$ với $\{1\}$ là véc tơ có n phần tử bằng đơn vị

Do đó: $$\left\{\ddot{y}^{\Sigma}(t)\right\} = \{\ddot{y}(t)\} + \{1\}\ddot{y}_o(t)$$

Tương ứng ta có phương trình vi phân dao động tổng quát của hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_o(t) \tag{5-11}$$



Hình 5.2

Trong đó: [K], [M], [c] là ma trận cứng, ma trận khối lượng, ma trận tắt dần của hệ. Thành phần bên vế phải của phương trình (5-11) đóng vai trò như véc tơ tải trọng động thay đổi theo thời gian tác dụng lên hệ.

2. Phương trình dao động hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất.

Để tìm phương trình dao động, ta có thể áp dụng phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng (cũng có thể áp dụng phương pháp tọa độ tổng quát, v.v...). Tải trọng khai triển theo các dạng riêng được xác định theo công thức (2.130) và trong trường này sẽ là:

$$\{P_i\} = \frac{\{\varphi_i\}^T\{P\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\} = \frac{\{\varphi_i\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}[M]\{\varphi_i\} = \mu_i[M]\{\varphi_i\} \qquad (5\text{-}12)$$

Trong đó: $\mu_i = \dfrac{\{\varphi_i\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}} = \dfrac{L_i}{M_i}$; μ_i gọi là hệ số dạng (5-13)

Véc tơ chuyển vị của hệ ứng với dạng dao động riêng thứ i được tính theo (2.135):

$$\{y_i(t)\} = [M]^{-1}\{P_i\}K_{ai}(t)$$

Khi chịu tác dụng động đất:

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_{i,c}}\int_0^t f(\tau)e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_{i,c}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

$$K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i}V_i(t) \qquad (5\text{-}14)$$

Do đó: $\{y_i(t)\} = [M]^{-1}.\{P_i\}\cdot\dfrac{V_i(t)}{\omega_i}$

Đưa (5-12) vào biểu thức trên, ta được:

$$\{y_i(t)\} = \mu_i.\{\varphi_i\}\cdot\frac{V_i(t)}{\omega_i} \qquad (5\text{-}15)$$

Giá trị lớn nhất của véc tơ chuyển vị ứng với dạng chính thứ i sẽ là:

$$\{y_i(t)\}_{max} = \mu_i\cdot\frac{S_{Vi}(\varepsilon_i,T_i)}{\omega_i}\{\varphi_i\} = \mu_i.S_{di}(\varepsilon_i,T_i)\ \{\varphi_i\} \qquad (5\text{-}16)$$

Trong đó:

$S_{di}(\varepsilon_i,T_i) = \dfrac{1}{\omega_i}S_{Vi}(\varepsilon_i,T_i)$ là phổ chuyển vị dạng i, còn S_{Vi} là phổ vận tốc dạng i:

$$S_{Vi}(\varepsilon_i,T_i) = \left|\int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau\right|_{max} = |V_i(t)|_{max} \qquad (5\text{-}17)$$

Véc tơ chuyển vị của hệ được viết từ (5-15):

$$\{y(t)\} = [\Phi]\left\{\frac{\mu_i}{\omega_i}V_i(t)\right\} \qquad (5\text{-}18)$$

Trong đó $\left\{\dfrac{\mu_i}{\omega_i}V_i(t)\right\}$ là véc tơ có các phần tử bằng $\dfrac{\mu_i}{\omega_i}V_i(t)$ với i = 1, 2, ... n.

3. Xác định tải trọng động đất tác dụng lên hệ

Véc tơ lực tương ứng với trạng thái động của hệ hữu hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i được xác định theo (2.139):

$$\{P_{d,i}(t)\} = \{P_i\}.K_i(t)$$

Trong đó: $K_i(t)$ được tính tương tự như (1.197) và với tác dụng động đất sẽ là:

$$K_i(t) = \frac{\omega_i^2}{\omega_{i,c}} \int_0^t f(\tau)e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_{i,c}(t-\tau)\,d\tau = \omega_i \int_0^t \ddot{y}_o(\tau).e^{-\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)}.\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \omega_i V_i(t) \quad (5\text{-}19)$$

Đưa $\{P_i\}$ theo (5-12) và $K_i(t)$ vào biểu thức trên, ta được:

$$\{P_{d,i}(t)\} = \mu_i [M]\{\varphi_i\}.\omega_i V_i(t) \quad (5\text{-}20)$$

Véctơ tải trọng động đất tác dụng lên hệ ứng với dạng chính thứ i là giá trị lớn nhất của (5-20):

$$\{P_i^{dd}\} = \mu_i [M]\{\varphi_i\}\omega_i.S_{Vi}(\varepsilon_i, T_i) = \mu_i [M]\{\varphi_i\}.S_{ai}(\varepsilon_i, T_i) \quad (5\text{-}21)$$

Trong đó: $S_{ai}(\varepsilon_i, T_i) = \omega_i S_{Vi}(\varepsilon_i, T_i)$ là phổ gia tốc dạng i.

Tải trọng động đất tác dụng vào khối lượng K (tầng thứ K) của tất cả các dạng dao động riêng được tổ hợp bằng cách tính gần đúng trên cơ sở lí thuyết xác suất:

$$P_K^{dd} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{Ki}^{dd}\right)^2} = \sqrt{\left(P_{K_1}^{dd}\right)^2 + \left(P_{K_2}^{dd}\right)^2 + \ldots + \left(P_{K_n}^{dd}\right)^2} \quad (5\text{-}22)$$

Cuối cùng ta có véctơ tải trọng động đất tác dụng lên hệ hữu hạn bậc tự do:

$$\{P_{dd}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1i}^{dd}\right)} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{2i}^{dd}\right)^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{ni}^{dd}\right)^2} \end{Bmatrix} \quad (5\text{-}23)$$

4. Một số phương pháp tính hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất

a) Phương pháp phổ

Véc tơ tải trọng động đất ứng với dạng chính thứ i được xác định trên cơ sở các đường cong phổ gia tốc, hoặc các đường cong phổ vận tốc theo công thức (5-21). Trên hình 5.3 cho thí dụ mô tả các đường cong phổ vận tốc. Phổ vận tốc này được tính toán theo biểu thức (5-17).

b) Phương pháp tĩnh học tương đương

Véc tơ tải trọng động đất ứng với dạng chính thứ i:

$$\{P_i^{dd}\} = [Q]\,\{\varphi_i\}\,\mu_i.K_{dd}^i \quad (5\text{-}24)$$

Trong đó: [Q] - ma trận trọng lượng của hệ;

K_{dd}^i - hệ số động đất ứng với dạng i.

Theo quy phạm СНИП II-8-71 (Liên Xô) thì:

$$K_{dd}^{i} = \beta_i K_c . K_1 . K_2 . K_\psi \qquad (5\text{-}25)$$

Với: β_i - hệ số phụ thuộc chu kì dao động riêng, và loại nền đất;

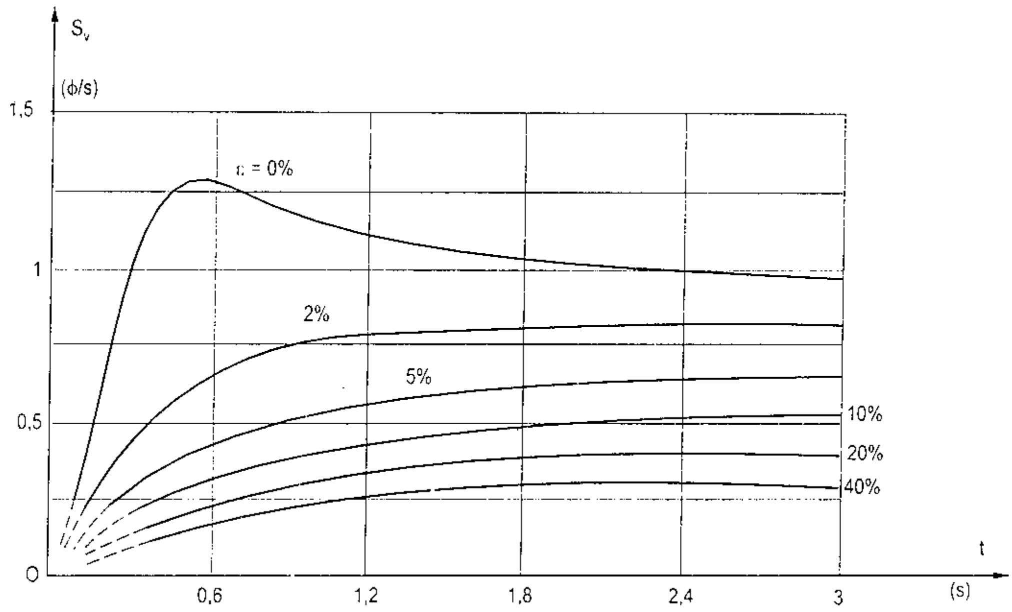
K_c - hệ số tra theo cấp động đất (hệ số vùng);

K_1 - hệ số tính đến sự hư hỏng cho phép của công trình;

K_2 - hệ số các giải pháp kết cấu;

K_ψ - hệ số kể đến đặc điểm kết cấu.

Tất cả các hệ số trên đều có bảng tra và chỉ dẫn cụ thể trong quy phạm.



Hình 5.3

c) Phương pháp tính theo giản đồ gia tốc

Phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất (5-11):

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_o(t)$$

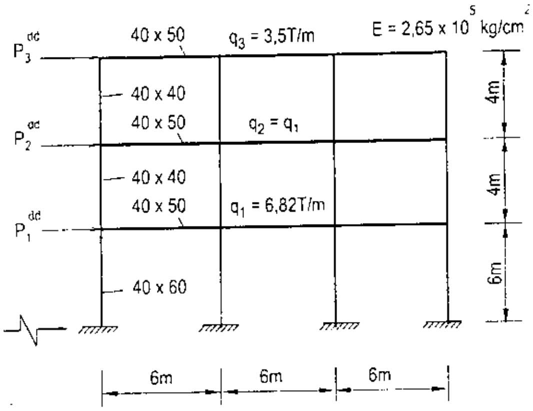
Phương pháp tính theo giản đồ gia tốc là phương pháp giải trực tiếp phương trình vi phân dao động trên khi có giản đồ gia tốc của nền $\ddot{y}_o(t)$ ở vế phải.

Giản đồ gia tốc nền có thể là giản đồ gia tốc thực, nó được ghi bằng máy, hoặc có thể là giản đồ gia tốc mô phỏng do ngành Vật lí địa cầu đưa ra. Phương pháp thích hợp để giải phương trình vi phân như vậy là các phương pháp tích phân trực tiếp theo các bước thời gian đã nêu ở chương 2.§16 như phương pháp Niumax, phương pháp Vinsonθ, phương pháp sai phân hữu hạn...

Ngoài ra, có thể tham khảo các quy phạm của các nước như quy phạm của Mỹ: UBC 97, quy phạm của Trung Quốc GBJ 89, v.v... và các phương pháp khác để tính toán và xác định tải trọng động đất.

5. Thí dụ:

Xác định tải trọng động đất tác dụng khung 3 tầng hình 5.4. Kích thước, tiết diện, trọng lượng phân bố các tầng cho trên hình vẽ "Công trình xây dựng trong vùng động đất cấp 8 có $K_c = 0{,}2$; Các hệ số $K_1 = 0{,}25$; $K_2 = K_\psi = 1$. Nền đất loại I.



Hình 5.4

- Xác định tần số và dạng dao động riêng:

Khối lượng các tầng: $m_1 = m_2 = \dfrac{1}{g} q_i l = \dfrac{6{,}82.18}{9{,}81} = 12{,}55$; $m_3 = \dfrac{3{,}5.18}{9{,}81} = 6{,}43$

Do đó: $$[M] = \begin{bmatrix} 12{,}55 & 0 & 0 \\ 0 & 12{,}55 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}43 \end{bmatrix} . \frac{TS^2}{m}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} 123 & 0 & 0 \\ 0 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{bmatrix} .T$$

Ma trận mền:

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}48 & 4{,}242 & 4{,}242 \\ 4{,}242 & 8{,}54 & 9{,}147 \\ 4{,}242 & 9{,}147 & 13{,}35 \end{bmatrix} .10^{-4} m/T$$

Trong đó các hệ số độ mềm được tính gần đúng theo công thức của Sigalov. Phương trình tần số:

$\left| [F][M] - \dfrac{1}{\omega^2}[E] \right| = 0$, Dạng dao động riêng: $\{\varphi_i^*\} = -[B_{11}]^{-1}\{B_i\}$

Kết quả: $$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6{,}98 \\ 21{,}3 \\ 31{,}1 \end{Bmatrix} .s^{-1}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}885 & 0{,}222 & -1{,}197 \\ 2{,}256 & -1{,}248 & 1{,}096 \end{bmatrix}$$

Các dạng dao động riêng đều thoả mãn điều kiện trực giao (2-58).

- Xác định véc tơ tải trọng động đất ứng với dạng chính thứ i theo (5-24) và (5-25):

$$\left\{P_{dd}^{i}\right\} = [Q]\left\{\varphi_i\right\}\mu_i\beta_i K_c K_1 K_2 K_\psi$$

$$K = K_c K_1 K_2 K_\psi = 0,2.0,25.1.1 = 0,05$$

Tính β_i: công trình xây dựng trên nền đất loại I, nên:

$$\beta_i = \frac{1}{T_i}: \left| \begin{array}{l} i=1 \text{ có } \beta_1 = \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{6,98}{2\pi} = 1,11 \\ i=2 \text{ có } \beta_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{21,3}{2\pi} = 3,39 > 3 \text{ lấy } \beta_2 = 3 \\ i=3 \text{ có } \beta_3 = 3 \end{array} \right.$$

Tính hệ số dạng μ_i theo (5-13) : $\mu_i = \dfrac{\{\varphi_i\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}$.

$$i=1:\ \mu_1 = \frac{\{\varphi_1\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\}} = \frac{\{1 \quad 1,885 \quad 2,256\}\begin{bmatrix}12,55 & 0 & 0\\ 0 & 12,55 & 0\\ 0 & 0 & 6,43\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}}{\{1 \quad 1,885 \quad 2,256\}\begin{bmatrix}12,55 & 0 & 0\\ 0 & 12,55 & 0\\ 0 & 0 & 6,43\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1,885\\2,256\end{Bmatrix}} = 0,565$$

$$i=2: \qquad \mu_2 = \frac{\{\varphi_2\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_2\}^T[M]\{\varphi_2\}} = \cdots = 0,319$$

$$i=3: \qquad \mu_3 = \frac{\{\varphi_3\}^T[M]\{1\}}{\{\varphi_3\}^T[M]\{\varphi_3\}} = \cdots = 0,119$$

Vậy:

$$\left\{P_1^{dd}\right\} = \begin{bmatrix}123 & 0 & 0\\ 0 & 123 & 0\\ 0 & 0 & 63\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1,885\\2,256\end{Bmatrix}0,565.1,11.0,05 = \begin{Bmatrix}3,85\\7,28\\4,44\end{Bmatrix}.T = \begin{Bmatrix}P_{11}^{dd}\\P_{21}^{dd}\\P_{31}^{dd}\end{Bmatrix}$$

$$\left\{P_2^{dd}\right\} = \begin{bmatrix}123 & 0 & 0\\ 0 & 123 & 0\\ 0 & 0 & 63\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0,222\\-1,248\end{Bmatrix}.0,319.3.0,05 = \begin{Bmatrix}5,88\\1,31\\-3,74\end{Bmatrix}.T$$

$$\left\{P_3^{dd}\right\} = \begin{bmatrix}123 & 0 & 0\\ 0 & 123 & 0\\ 0 & 0 & 63\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1,197\\1,069\end{Bmatrix}.0,119.3.0,05 = \begin{Bmatrix}2,2\\-2,62\\1,23\end{Bmatrix}.T$$

Xác định tải trọng động đất tác dụng lên hệ: theo công thức (5-22)

$$P_1^{đđ} = \sqrt{\left(P_{11}^{đđ}\right)^2 + \left(P_{12}^{đđ}\right)^2 + \left(P_{13}^{đđ}\right)^2} = \sqrt{3,85^2 + 5,88^2 + 2,2^2} = 7,36.T$$

$P_2^{đđ} = \sqrt{7,28^2 + 1,31^2 + (-2,62)^2} = 7,85.T$, tương tự được $P_3^{đđ} = 5,94.T$

Véc tơ tải trọng động đất tác dụng lên hệ.

$$\{P_{đđ}\} = \begin{Bmatrix} 7,36 \\ 7,85 \\ 5,94 \end{Bmatrix}.T$$

§3. DAO ĐỘNG CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO CHỊU TÁC DỤNG ĐỘNG ĐẤT

1. Xây dựng phương trình vi phân dao động hệ vô hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất

Các hệ có khối lượng phân bố liên tục như các cột cao, các ống khói... là hệ vô hạn bậc tự do. Với hệ vô hạn bậc tự do, chuyển vị toàn phần của khối lượng do kích động của nền hình (5-5) là:

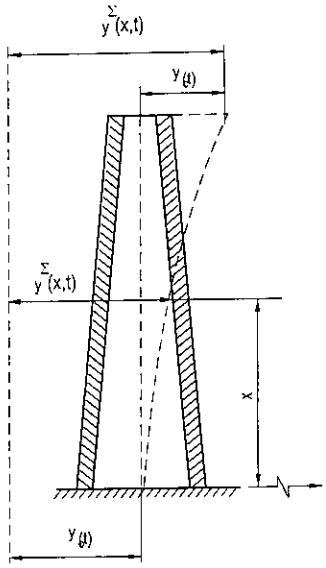
$$y^{\Sigma}(x,t) = (y(x,t) + f(x).y_o(t))$$

Trong đó: f(x) là chuyển vị của hệ do chuyển vị của nền bằng đơn vị gây ra.

Lực quán tính của khối lượng:

$$q_q(x,t) = -m(x)\left[\ddot{y}(x,t) + f(x)\ddot{y}_o(t)\right]$$

Tương ứng ta có phương trình vi phân dao động của hệ vô hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất được viết ở dạng tương tự như phương trình (3-2) và (5-11):



Hình 5.5

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + m_x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -m(x)f(x).\ddot{y}_o(t) \qquad (5\text{-}26)$$

Thành phần ở vế phải của (5-26) đóng vai trò như tải trọng động phân bố tác dụng lên hệ.

2. Phương trình dao động hệ vô hạn bậc tự do chịu tác dụng động đất

Áp dụng phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng để tìm nghiệm của phương trình (5-26). Tải trọng khai triển theo các dạng riêng được xác định theo công thức (3-58) và trong trường hợp này sẽ là:

$$q_i(x) = m_x.X_i(x)\frac{\int_o^l X_i(x)q_{(x,t)}dx}{\int_o^l m_x X_i^2(x)dx} = m_x X_i(x)\frac{\int_o^l X_i(x)m(x)f(x)dx}{\int_o^l m_x X_i^2(x)dx} = m_x.X_i(x).\mu_i \quad (5\text{-}27)$$

Trong đó: $\mu_i = \dfrac{\int_o^l X_i(x)m(x)f(x)dx}{\int_o^l m_x X_i^2(x)dx}$ - Hệ số dạng (với hệ vô hạn bậc tự do) (5-28)

Phương trình dao động ứng với dạng chính thứ i được viết phù hợp với (3.60):

$$y_i(x,t) = \frac{q_i(x)}{m_x}.K_{ai}(t)$$

Trong đó: $K_{ai}(t)$ được tính theo (5-14): $K_{ai}(t) = \dfrac{V_i(t)}{\omega_i}$

Đưa $q_i(x)$ và $K_{ai}(t)$ vào phương trình dao động, ta được:

$$y_i(x,t) = X_i(x).\mu_i \cdot \frac{V_i(t)}{\omega_i} \tag{5-29}$$

Giá trị lớn nhất:

$$y_i^{max}(x) = X_i(x).\mu_i \frac{S_{Vi}(\varepsilon_i, T_i)}{\omega_i} = X_i(x).\mu_i.S_{di}(\varepsilon_i, T_i) \tag{5-30}$$

3. Xác định tải trọng động đất tác dụng lên hệ

Lực phân bố tương ứng với trạng thái động của hệ vô hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i được viết từ tích của tải trọng khai triển theo dạng i và hệ số động học thay đổi theo thời gian cũng của dạng i:

$$q_{d,i}(x,t) = q_i(x).K_i(t)$$

Trong đó: $q_i(x)$ được tính theo (5-27), $K_i(t)$ được tính theo công thức (5-19):

$$K_i(t) = \omega_i V_i(t)$$

Đưa $q_i(x)$ và $K_i(t)$ vào biểu thức trên, ta được:

$$q_{d,i}(x,t) = m_x.X_i(x).\mu_i.\omega_i.V_i(t) \tag{5-31}$$

Tải trọng động đất phân bố tác dụng lên hệ vô hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i là giá trị lớn nhất của (5-31):

$$q_i^{dd}(x) = m_x X_i(x).\mu_i\, \omega_i S_{Vi}(\varepsilon_i, T_i) = m_x X_i(x)\mu_i S_{ai}(\varepsilon_i, T_i) \tag{5-32}$$

Cũng có thể tính lực phân bố tương ứng với trạng thái động của hệ vô hạn bậc tự do ứng với dạng chính thứ i từ phương trình chuyển vị $y_i(x, t)$ nhờ quan hệ vi phân:

$$q_{d,i}(x,t) = \left[EJ_x \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial x^2}\right]'' \tag{5-33}$$

Chuyển vị và nội lực toàn phần của hệ được xác định trên cơ sở tổ hợp chuyển vị và nội lực của các dạng dao động riêng theo lí thuyết xác suất tương tự như với hệ hữu hạn bậc tự do đối với các điểm trên hệ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Đình Ba, Nguyễn Văn Hợi. *Giáo trình động học công trình*. 1994.
2. Phạm Đình Ba, Nguyễn Thanh Bình. *Động lực học công trình*. Hà Nội, 1995.
3. Phạm Đình Ba. *Bài tập Động lực học công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng. Hà Nội, 2003.
4. Phan Văn Cúc, Nguyễn Lê Ninh. *Tính toán và cấu tạo kháng chấn các công trình nhiều tầng*. Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ thuật. Hà Nội, 1994.
5. Phạm Khắc Hùng. *Động lực học công trình*. Đại học Bách Khoa. Hà Nội, 1966
6. Phạm Gia Lộc. *Cơ sở động đất và tính toán công trình chịu tải trọng động đất*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1985.
7. Nguyễn Ngọc Quỳnh, Hồ Thuần. *Ứng dụng ma trận trong kĩ thuật*. Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ thuật, 1978.
8. Lều Thọ Trình, Phạm Khắc Hùng, Lê Văn Quý, Đào Trọng Long. *Ổn định và Động lực học công trình*. Hà Nội, 1974.
9. Nguyễn Tài Trung, Nguyễn Xuân Ngọc. *Ổn định và Động lực học công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1997.
10. Nguyễn Văn Tỉnh. *Cơ sở dao động công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1987.
11. Nguyễn Viết Trung, Nguyễn Thanh Hà. *Cơ sở tính toán cầu chịu tải trọng của động đất*. Nhà xuất bản Giao thông Vận tải, 2004.
12. Rayw - Clough, Joseph Penzien. *Dynamics of structures*. MeGraw - Hill, Inc, 1993.
13. Robert L. Ketter, George C.Lee.... *Structural analysis and design*. MeGraw - Hill Book Company, 1979.
14. Rayw. Cloygh. Joseph Penzien. *Dynamics of Structures*. McGRaw - Hill Book company, 1975.
15. Бабаков И. М. *Теория колебаний*. Москва, 1968.
16. Бете К. Винсон Е. *Численные методы анализа и МКЗ*. Москва, 1982.
17. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. *Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах*. Москва, 1969.
18. Бидерман. В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, 1980.
19. Винокуров Л.П. *Строительная механика стержневых систем*. Часть 2 и 3. Х., 1961.

20. Дарков А.В. Шапошников Н.Н. *Строительная механика*. Москва, 1986.

21. Киселев. В.А. *Строителеьная механика (Специальный курс, Динамика и устойчивость сооружений)*. Москва, 1980.

22. Ланкастер П. *Теория матри*. Москва, 1978.

23. Медведев. В.Г. *Лекции по динамике сооружений*, 1974.

24. Пановко Я.И. *Введение в теорю механических колебаний*. Москва, 1980.

25. Попов Н.Н. Расторгуев Б.С. *Динамический расчет железобетонных конструкций*. Москва, 1974.

26. Прочность, устойчивость, колебания. *Том 3. Под ред. И.А. Бигера и Я.И. Поновко*. Москва, 1968.

27. Рабинович И.М. Синицын А.П. Теренин Б.М. *Расчет сооружений на действие кратковременых и мгновенных сил Ч.1. М.* 1956, Ч.2. М. 1958.

28. Рабинович И.М. Синицын А.П. Лужин О.В. *Теренин Б.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействие.* Москва, 1972.

29. Самарин В.В Орленко А.Н. *Механихка военно-инженерных сооружений в примерах и задачах*. Часть 3. Москва, 1960.

30. Снитко Н.К. *Динамика сооружений*. Москва, 1960.

31. Смирнов А. Ф, Шапошников Н. Н... *Гроительнах механика. Динамика и устойривость сооружений.* Москва, 1984.

32. *Справочник по динамике сооружений*. Под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича. Москва, 1972.

33. *Справочник по динамике сооружений.* Под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича. Москва, 1984.

34. *Динамика сооружений*. Под ред Б.Г. Коренева. Москва, 1971.

35. *Сейсмостойкое строительство зданий.* Под ред. И.Л. Коргйнский. Москва, 1971.

MỤC LỤC

ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản :

TRỊNH XUÂN SƠN

Biên tập : TẠ HẢI PHONG

Chế bản: PHẠM HỒNG LÊ

Sửa bản in : TẠ HẢI PHONG

PHẠM ĐÌNH BA

Trình bày bìa : HS. VŨ BÌNH MINH

In 300 cuốn khổ 19 x 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 21-2010/CXB/21-64/XD ngày 30-12- 2009. Quyết định xuất bản số 75/QĐ-XBXD ngày 17-3-2010. In xong nộp lưu chiểu tháng 3 -2010.