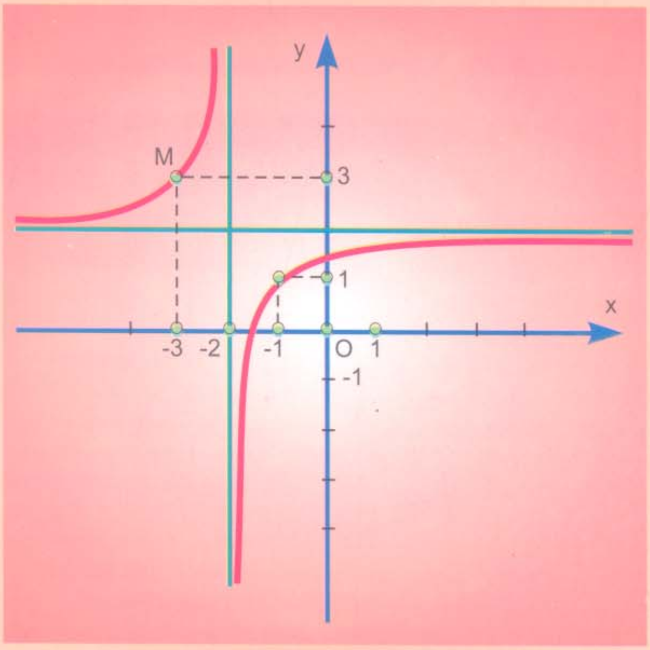
BỘ Y TẾ

TOÁN CAO CẤP

(DÙNG CHO ĐÀO TẠO BÁC SĨ ĐA KHOA)

Chủ biên : TS. HOÀNG MINH HẰNG



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ Y TẾ

TOÁN CAO CẤP

(DÙNG CHO ĐÀO TẠO BÁC SĨ ĐA KHOA)

Mã số: Đ.01.X.01

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI – 2008

Chỉ đạo biên soạn:

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Chủ biên:

TS. HOÀNG MINH HẰNG

Những người biên soạn:

TS. HOÀNG MINH HẰNG
ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT
CN. CAO CHU TOÀN

Thư ký biên soạn:

ThS. NGÔ BÍCH NGUYỆT

Tham gia tổ chức bản thảo:

ThS. PHÍ VĂN THÂM
TS. NGUYỄN MẠNH PHA

412–2008/CXB/11–869/GD Mã số: 7K783Y8–DAI

Lời giới thiệu

*Thực hiện một số điều của Luật Giáo dục, Bộ Giáo dục & Đào tạo và Bộ Y tế đã ban hành chương trình khung đào tạo **Bác sĩ đa khoa**. Bộ Y tế tổ chức biên soạn tài liệu dạy – học các môn cơ sở và chuyên môn theo chương trình trên nhằm từng bước xây dựng bộ sách đạt chuẩn chuyên môn trong công tác đào tạo nhân lực y tế.*

Sách TOÁM CAO CẤP được biên soạn dựa vào chương trình giáo dục của Trường Đại học Y Hà Nội trên cơ sở chương trình khung đã được phê duyệt. Sách được các tác giả TS. Hoàng Minh Hằng, ThS. Ngô Bích Nguyệt, CN. Cao Chu Toàn biên soạn theo phương châm: kiến thức cơ bản, hệ thống; nội dung chính xác, khoa học, cập nhật các tiến bộ khoa học, kỹ thuật hiện đại và thực tiễn Việt Nam.

Sách TOÁN CAO CẤP đã được Hội đồng chuyên môn thẩm định sách và tài liệu dạy – học chuyên ngành Bác sĩ đa khoa của Bộ Y tế thẩm định năm 2007. Bộ Y tế quyết định ban hành là tài liệu dạy – học đạt chuẩn chuyên môn của ngành trong giai đoạn hiện nay. Trong thời gian từ 3 đến 5 năm, sách phải được chỉnh lý, bổ sung và cập nhật.

Bộ Y tế xin chân thành cảm ơn các tác giả và Hội đồng chuyên môn thẩm định đã giúp hoàn thành cuốn sách; Cảm ơn ThS. Nguyễn Phan Dũng, TS. Chu Văn Thọ đã đọc và phản biện để cuốn sách sớm hoàn thành kịp thời phục vụ cho công tác đào tạo nhân lực y tế.

Lần đầu xuất bản sách khó tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của đồng nghiệp, các bạn sinh viên và các độc giả để lần xuất bản sau sách được hoàn thiện hơn.

VỤ KHOA HỌC VÀ ĐÀO TẠO – BỘ Y TẾ

Lời nói đầu

Toán học là môn khoa học tự nhiên có mặt trong rất nhiều lĩnh vực khoa học, bao gồm cả trong lĩnh vực nghiên cứu sinh, y học.

Trong khuôn khổ chuyên ngành y, bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội đã giảng dạy Toán cao cấp trong nhiều năm cho sinh viên với mong muốn cung cấp các kiến thức cơ bản, cơ sở Toán thống kê cho các nghiên cứu ứng dụng sau này.

Cuốn sách bao gồm các kiến thức về đại số, giải tích và một số bài toán ứng dụng trong sinh, y học với thời lượng 45 tiết.

Cuốn sách là tài liệu dành cho sinh viên trường y và sinh viên các chuyên ngành ứng dụng sinh, y học khác và có thể làm tài liệu tham khảo cho các cán bộ giảng dạy và nghiên cứu trong lĩnh vực sinh, y học.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của CN. Đỗ Như Cương, TS. Đặng Đức Hậu nguyên Trưởng bộ môn Toán – Trường Đại học Y Hà Nội. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhận được sự đóng góp ý kiến và giúp đỡ về kỹ thuật vi tính của các đồng nghiệp trong bộ môn. *Tuy nhiên cuốn sách khó tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc và đồng nghiệp.*

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

BÀI TẬP

Chương I
MA TRẬN – ĐỊNH THỨC HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1
MA TRẬN

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa ma trận và khái niệm các dạng ma trận.

2. Thực hiện được các phép toán trên ma trận.

1. KHÁI NIỆM MA TRẬN

Khi có m × n số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật gồm m hàng và n cột.

1.1. Định nghĩa

Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột biểu diễn dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là *ma trận* cỡ m × n, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở hàng i, cột j.

Ký hiệu là $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$.

Ví dụ:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2 × 3;

2) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ là ma trận cột cỡ 3×1;

3) $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận hàng cỡ 1×3.

Khi m = n thì A được gọi là *ma trận vuông* cấp n.

1.2. Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng không.

Ký hiệu là $O = [0]_{m \times n}$.

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cỡ 2×4.

Các ma trận không chỉ khác nhau về kích thước.

1.3. Ma trận bằng nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *bằng nhau* nếu chúng có cùng cỡ và có các phần tử ở cùng vị trí bằng nhau. Tức là:

$$\begin{cases} 1)\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2)\ a_{ij} = b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A = B khi và chỉ khi a = 1; b = –3; c = 2; d = 3.

1.4. Ma trận đối nhau

Ma trận A và B được gọi là hai ma trận *đối nhau* nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí có giá trị đối nhau.

Ma trận đối của A được ký hiệu là –A. Ta có:

$$\begin{cases} 1)\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}; \\ 2)\ a_{ij} = -b_{ij} \text{ với } \forall i, j \end{cases} \Leftrightarrow B = -A \text{ hay } A = -B.$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. B = –A khi và chỉ khi a = –1; b = –3; c = 2; d = 4.

1.5. Ma trận tam giác

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đường thẳng đi qua các phần tử a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} gọi là *đường chéo chính* của ma trận A.

Các phần tử a_{ij} với $i = j$ gọi là *phần tử chéo*.

Ma trận tam giác là ma trận mà tất cả các phần tử ở phía trên hoặc phía dưới của đường chéo chính đều bằng không. Có hai loại ma trận tam giác là ma trận *tam giác trên* và ma trận *tam giác dưới*.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác trên.}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác dưới.}$$

1.6. Ma trận đường chéo

Cho ma trận vuông cấp n có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$ thì A là *ma trận đường chéo*.

Vậy A có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ hay viết gọn } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

1.7. Ma trận đơn vị

Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo có các phần tử chéo đều bằng 1.

Ký hiệu là $I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$.

2. PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

2.1. Phép cộng ma trận

2.1.1. Định nghĩa

Cho hai ma trận A và B cùng cỡ $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ và } B = [b_{ij}]_{m \times n}.$$

Tổng của hai ma trận A và B là ma trận cỡ $m \times n$ được xác định bởi:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Ví dụ:

Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 & 1+2 \\ -1+2 & 4-3 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Tính chất

1) $A + B = B + A$;

2) $A + O = O + A = A$;

3) $A + (-A) = O$;

4) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Ví dụ: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Khi đó:

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Vậy ta có: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2.2. Phép nhân ma trận với một số

2.2.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $k \in \mathbb{R}$. Tích ma trận A với k là ma trận kA cỡ $m \times n$ và được xác định bởi: $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$.

Ví dụ 1:

Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ và $k = 2$.

$$\Rightarrow kA = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times(-1) & 2\times 4 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Cho

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ . & . & . & . & . \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

2.2.2. Tính chất

1) $k(A + B) = kA + kB$;

2) (k + h)A = kA + hA;

3) k(hA) = (kh)A;

4) 1.A = A;

5) 0.A = O.

Ví dụ: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } k = 2$$

$$\Rightarrow kA = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \ kB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow kA + kB = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 10 & 8 & 4 \end{bmatrix};$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow k(A + B) = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 10 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3. Phép nhân hai ma trận

2.3.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ và ma trận $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ (số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B).

Tích của ma trận A và B là ma trận C, ký hiệu C = A.B (hay AB); $C = [c_{ij}]_{m\times n}$,

trong đó: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

$$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}_{m\times p} \times \begin{bmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & b_{pj} & \ldots \end{bmatrix}_{p\times n} = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

Chú ý:

– Ta có tích A.B nhưng chưa chắc có tích B.A. Tức là muốn nhân A với B (A bên trái, B bên phải) thì số cột của A bằng số hàng của B, còn muốn nhân B với A (B bên trái, A bên phải) thì số cột của B bằng số hàng của A.

– Nếu A, B đều là ma trận vuông cùng cấp thì bao giờ cũng có tích A.B hoặc B.A nhưng chưa chắc A.B bằng B.A.

Ví dụ 1: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Khi đó:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1\times1 + 2\times3 + 3\times1 & 1\times2+2\times2+3\times4 \\ 4\times1 + 1\times3 + 2\times1 & 4\times2+1\times2+2\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$D = B.A = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times1 & 1\times3+2\times2 \\ 3\times1+2\times4 & 3\times2+2\times1 & 3\times3+2\times2 \\ 1\times1+4\times4 & 1\times2+4\times1 & 1\times3+4\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 11 & 8 & 13 \\ 17 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có: $A.B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, nhưng không tồn tại B.A.

Ví dụ 3: Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}; B.A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhận thấy $A.B \neq B.A$.

Ví dụ 4: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhận thấy $A \neq O$ và $B \neq O$ nhưng $A.B = O$.

2.3.2. Tính chất

1) A(B + C) = A.B + A.C;

2) (B + C)A = B.A + C.A;

3) k(B.C) = (kB)C;

4) (A.B)C = A(B.C);

5) A.I = I.A = A;

6) A.O = O.A = O.

Ví dụ 1: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 12 \\ 13 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A.B + A.C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 12 \\ 13 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A.O = O.$$

2.4. Phép chuyển vị

2.4.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, khi ta đổi hàng thành cột hoặc cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là *ma trận chuyển vị* của A. Ký hiệu là A^t, ma trận A^t có cỡ n×m.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

2.4.2. Tính chất

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

2) $I^t = I$;

3) $(A.B)^t = B^t.A^t$.

Ví dụ 1: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t + B^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow (A.B)^t = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \; A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow B^t.A^t = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tính A.B.

Kết quả:

A. $A.B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

B. $A.B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

C. $A.B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

D. Kết quả khác.

2. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tính $C = A.B^t$.

Kết quả:

A. $C = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -1 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

B. $C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

C. $C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$

D. Kết quả khác.

3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Kết quả:

A. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nếu $n = 2k$, hoặc $A^n = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ nếu $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{Z}^+$

B. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nếu $n = 2k + 1$, hoặc $A^n = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ nếu $n = 2k$; $k \in \mathbb{Z}^+$

D. Kết quả khác.

4. Tìm ma trận X thoả mãn: AX = B, với $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Kết quả:

A. $X = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

B. $X = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & -23 \end{bmatrix}$

C. $X = \begin{bmatrix} 2 & 23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

D. Kết quả khác.

5. Tìm ma trận X thoả mãn: X.A = B, với $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 12 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Kết quả

A. $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

B. $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

C. $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

D. Kết quả khác.

Bài 2
ĐỊNH THỨC

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được khái niệm về định thức và các tính chất của định thức.

2. Thực hiện được các phương pháp tính định thức.

3. Trình bày được mối liên hệ giữa định thức và ma trận.

1. ĐỊNH THỨC

1.1. Ma trận con

Cho ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta chú ý đến phần tử a_{ij}, nếu bỏ hàng i, cột j ta thu được ma trận (n – 1) hàng và (n – 1) cột, tức là ta được ma trận cấp n – 1; ma trận này được gọi là *ma trận con* ứng với phần tử a_{ij}, ký hiệu là M_{ij}.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ta có 9 ma trận con cấp 2 ứng với 9 phần tử a_{ij} của A là:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}; \quad M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1.2. Định thức của ma trận vuông cấp n

1.2.1. Định nghĩa

Định thức của ma trận vuông A cấp n, ký hiệu là det(A) được định nghĩa dần dần như sau:

1) A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$;

2) A là ma trận cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

3) A là ma trận cấp n: $A = \left[a_{ij}\right]_{(n)}$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}) + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n}) \tag{1.2.1}$$

Chú ý: a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{1n}$ là các phần tử nằm ở hàng 1 của ma trận A.

Ta còn dùng | | (hai gạch đứng đặt ở hai bên) để ký hiệu một định thức.

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là *định thức* cấp n.

Từ bây giờ quy ước thay vì dùng det(A) ta dùng ký hiệu D_n cho định thức cấp n.

1.2.2. Một số ví dụ

Áp dụng định nghĩa tính:

1) $$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times 2 = -2.$$

2) $$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta).$$

3) $$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 240.$$

4) $$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

1.3. Định thức của tích hai ma trận

Định lý: *Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì:*

$$det(A.B) = det(A).det(B).$$

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$.

Nhận thấy: det(A) = 1; det(B) = –23; det(A.B) = –23.

Vậy: det(A.B) = det(A).det(B).

2. TÍNH CHẤT

Cho A là ma trận vuông cấp n.

2.1. Tính chất 1

$$det(A^t) = det(A).$$

Ta cần chứng minh công thức

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{21}\det(M_{21}) + a_{31}\det(M_{31}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}\det(M_{n1}) \tag{1.2.2}$$

trong đó a_{11}, a_{21}, a_{31}, . . . , a_{n1} là các phần tử nằm ở cột 1 của ma trận A.

Nhận thấy:

– Nếu n = 2 thì (1.2.2) là đúng.

– Giả sử (1.2.2) đúng với ma trận cấp n – 1, ta cần chứng minh nó đúng với ma trận cấp n.

Thật vậy, tiếp tục biểu diễn các định thức của các ma trận M_{21}, M_{31},... M_{n1} theo công thức định nghĩa (1.2.1) ta sẽ có công thức (1.2.1) trùng với công thức (1.2.2), tức là ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ: Tính $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Ta có: $D = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -9$,

hoặc $D = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -9$.

Hệ quả 2.1. Mọi tính chất khi phát biểu về hàng của định thức thì luôn đúng khi phát biểu về cột và ngược lại.

2.2. Tính chất 2

Khi đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức thì định thức đổi dấu.

Ví dụ 1: Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ (đổi chỗ cột 2 và cột 1)}$$

và
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Ví dụ 2: Cho định thức D_n, định thức thay đổi như thế nào nếu ta viết các hàng theo thứ tự ngược lại?

Giải: Ta thực hiện đổi chỗ hàng 1 với hàng 2, rồi hàng 2 mới với hàng 3,... với hàng n. Như vậy có (n – 1) lần đổi chỗ.

Ta thực hiện đổi chỗ hàng 1 (tức hàng 2 cũ) với hàng 2 (tức hàng 3 cũ),... với hàng n – 1. Ta có (n – 2) lần đổi chỗ.

Khi viết được tất cả các hàng theo thứ tự ngược lại thì ta đã thực hiện $\frac{n(n-1)}{2}$ lần đổi chỗ và khi đó ta được định thức mới D_n'.

$$D_n' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times D_n$$

Ví dụ 3: Tính $D_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ta có: $D_6 = (-1)^{\frac{6\times 5}{2}} \times D_6' = -1$, trong đó

$$D_6' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3. Tính chất 3

Khi có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì định thức bằng không.

Thật vậy, giả sử định thức D có hai hàng như nhau, khi đổi chỗ hai hàng như nhau đó ta có: $D = -D \Leftrightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$.

Ví dụ 1: Cho

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 0 - 16 = 0.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

– Nếu $x = 0$ ta có hàng 1 = hàng 2 $\Rightarrow$ định thức = 0.

– Nếu $x = 1$ ta có hàng 1 = hàng 3 $\Rightarrow$ định thức = 0.

...

– Nếu $x = n - 2$ ta có hàng 1 = hàng n $\Rightarrow$ định thức = 0.

Vậy $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$;...; $x = n - 2$ là nghiệm của phương trình.

Bạn đọc tự chứng minh ngoài tất cả các nghiệm trên thì phương trình không có nghiệm nào khác.

2.4. Tính chất 4

1) $$\det(A) = (-1)^{i+1}\left[a_{i1}\det(M_{i1}) - a_{i2}\det(M_{i2}) + \ldots \pm a_{in}\det(M_{in})\right] \quad (1.2.3)$$

hay: $$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(M_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(M_{in})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij})\,;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(công thức khai triển định thức theo hàng thứ i).

2) $$\det(A) = (-1)^{1+j}\left[a_{1j}\det(M_{1j}) - a_{2j}\det(M_{2j}) + \ldots \pm a_{nj}\det(M_{nj})\right] \quad (1.2.4)$$

hay: $$\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}\det(M_{1j}) + (-1)^{2+j}a_{2j}\det(M_{2j}) + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det(M_{nj})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij})\,;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

(công thức khai triển định thức theo cột thứ j).

Ví dụ 1:

$$3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-9) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -27 \text{ (nhân 3 với hàng 2).}$$

Ví dụ 2:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8.0 = 0\,.$$

Ví dụ 3: Không khai triển định thức chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Giải: Xét vế trái, nhân cột 2 với yz, nhân cột 3 với xz, nhân cột 4 với xy, ta được:

$$VT = \frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

Đưa thừa số chung của hàng 1, hàng 2, hàng 3, hàng 4 ra ngoài dấu định thức, ta được

$$VT = \frac{xyz}{x^2y^2z^2}\,xyz\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = VP.$$

2.7. Tính chất 7

Khi có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ thì định thức bằng không.

Thật vậy, áp dụng hệ quả 2.6 và tính chất 3 ta có tính chất 7.

Ví dụ:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ x^2 & x^2 & 3x^2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^2.0 = 0.$$

2.8. Tính chất 8

Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức.

Chẳng hạn như:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12}+a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22}+a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Giải: Xét vế trái ta có:

$$VT = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+a & b \\ b_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = VP$$

2.9. Tính chất 9

Khi định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay các cột khác) thì định thức bằng không.

Đó là hệ quả của tính chất 7 và tính chất 8.

Ví dụ: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\times1+2\times2 \\ 2 & 1 & 1\times2+2\times1 \\ 4 & 2 & 1\times4+2\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2\times0 = 0.$$

2.10. Tính chất 10

Khi ta cộng bội k của một hàng vào một hàng khác (hay cộng bội k của một cột vào một cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Ví dụ 1: Biến đổi định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+(-2)\times 2 & 5+(-2)\times 1 & 7+(-2)\times 3 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6+(-3)\times 2 & 1+(-3)\times 1 & 5+(-3)\times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ta nhận được một định thức có dạng đơn giản hơn.

Ví dụ 2: Tính định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

Giải: Nhân cột 1 với (–1) cộng vào cột 2; nhân cột 1 với (–1) cộng vào cột 3; nhân cột 1 với (–1) cộng vào cột 4, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

Tách mỗi định thức thành tổng hai định thức (áp dụng đối với cột 3) ta có định thức có hai cột tỷ lệ với nhau nên định thức bằng 0.

Tiếp tục tách mỗi định thức thành tổng hai định thức (áp dụng đối với cột 4) ta có định thức có hai cột tỷ lệ với nhau nên định thức bằng 0.

Vậy D = 0.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng định thức sau chia hết cho 17.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải: Nhận thấy, các số 204, 527, 255 chia hết cho 17 nên ta nhân cột 1 với 100, nhân cột 2 với 10 và cộng vào cột 3, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

Ví dụ 4: Không khai triển, tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Giải: Cộng cột 2 và 3 vào cột đầu, ta được

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 1 \\ a+b+c & c & a & 1 \\ a+b+c & a & b & 1 \\ a+b+c & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.11. Tính chất 11 (Về các định thức có dạng tam giác)

Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \ldots \times a_{nn}$$

hay
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \ldots \times a_{nn}$$

Thật vậy, dựa vào khai triển hàng 1 (hay cột 1) ta tiếp tục khai triển theo hàng 1 (hay cột 1) của định thức cấp con nhỏ dần.

3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận vuông B cấp n sao cho AB = BA = I thì ta nói A *khả đảo* (A có *ma trận nghịch đảo*) và B gọi là *ma trận nghịch đảo* của A.

Ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}, ta có:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ thì $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Vì: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

và $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Từ định nghĩa suy ra, nếu A khả đảo thì A^{-1} khả đảo và ma trận nghịch đảo của A^{-1} là A.

3.2. Các định lý

3.2.1. Định lý 1

Nếu A là ma trận vuông có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh: Thật vậy, vì $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ và } \det(A^{-1}) \neq 0.$$

3.2.2. Định lý 2

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A nếu có thì chỉ có một mà thôi.

Chứng minh: Thật vậy, giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của A, tức là ta có:

$$AB = BA = I \text{ và } AC = CA = I.$$

Khi đó $\quad C(AB) = CI$ và $(CA)B = IB$.

Suy ra: $\quad CI = IB \Rightarrow C = B$.

3.2.3. Định lý 3

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu det(A) ≠ 0 thì ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Ma trận A^{-1} được tính bởi công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^t = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

trong đó: $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$, *$\det(M_{ij})$ là định thức con ứng với phần tử a_{ij}.*

Ta thừa nhận định lý.

Khi det(A) ≠ 0, tức là ma trận A có nghịch đảo, ta nói A là ma trận *không suy biến*.

3.3. Cách tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải: Cách thứ nhất: Dựa vào định lý 3:

Ta có: $\det(A) = -1 \neq 0$,

và $C_{11} = 40$ $\quad C_{12} = -13$ $\quad C_{13} = -5$

$C_{21} = -16$ $\quad C_{22} = 5$ $\quad C_{23} = 2$

$C_{31} = -9$ $\quad C_{32} = 3$ $\quad C_{33} = 1$

Suy ra

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad C^t = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}C^t = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

4.1. Tính định thức theo công thức định nghĩa

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Giải: Ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & x \\ c & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} x & x^2 \\ c & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (1 - cx) - a(x - cx^2) + 0$$

$$= (1 - cx)(1 - ax) = 0$$

– Nếu a = c = 0 thì phương trình vô nghiệm.

– Nếu a = 0; c ≠ 0 thì phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{c}$.

– Nếu a ≠ 0; c = 0 thì phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{a}$.

– Nếu a ≠ 0; c ≠ 0 thì phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{c}$ và $x = \frac{1}{a}$.

Ví dụ 2: Dùng định nghĩa chứng minh:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Giải: Thật vậy:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{15}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}.D_{11} - a_{12}.D_{12} + a_{13}.D_{13} - a_{14}.D_{14} + a_{15}.D_{15}$$

Xét tiếp : $D_{11} = a_{22}.0 - a_{23}.0 + a_{24}.0 - a_{25}.0 = 0;$

$D_{12} = 0;$

$D_{13} = 0;$

$D_{14} = 0;$

$D_{15} = 0$

$\Rightarrow D = 0.$

4.2. Phương pháp biến đổi định thức

Sử dụng các phép biến đổi:

– Nhân các phần tử của một hàng (hay cột) với một số k ($k \neq 0$).

– Cộng tổ hợp tuyến tính vào hàng khác (hay cột khác).

– Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột).

Ví dụ 1: Tính định thức:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & x \\ 1 & x & x^2 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & x \\ 1-ax & 0 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-ax)\begin{vmatrix} 1 & x \\ c & 1 \end{vmatrix} = (1-ax)(1-cx).$$

Ví dụ 2: Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

Giải: Nhân cột 1 với (–1) rồi cộng vào cột 3 ta có:

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma - \sin^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Ví dụ 3: Tính định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải: Nhân hàng 1 với (–1) sau đó cộng vào hàng 2, 3,..., n, ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}$$

Rút $(a_1 - x)$ ở cột 1 làm thừa số chung:

$$D_n = (a_1-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & x & x & \dots & x \\ -1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}$$

Tương tự rút thừa số chung của cột 2, 3,..., n:

$$D_n = (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \dots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Cộng tổ hợp tuyến tính các cột vào cột 1, sau đó áp dụng tính chất 11:

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x}+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\dfrac{x}{a_i-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \dots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(\frac{a_1}{a_1-x}+\sum_{i=2}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right).$$

Ví dụ 4: Tính định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ 2 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ 2 & 2 & 3 & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & 2 & . & . & n \end{vmatrix}$$

Giải: Nhân hàng 2 với (−1), sau đó cộng vào các hàng còn lại, ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 2 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & n-2 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo hàng 1 và áp dụng tính chất 11:

$$D_n = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & n-2 \end{vmatrix} = (-1).2.(n-2)! = -2(n-2)!.$$

4.3. Phương pháp truy hồi

Ví dụ 1: Tính định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x+0 \\ x & a_2 & x & \dots & x+0 \\ x & x & a_3 & \dots & x+0 \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & x+(a_n-x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & 0 \\ x & a_2 & x & \dots & 0 \\ x & x & a_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n-x \end{vmatrix}$$

Nhân cột cuối của định thức thứ nhất với (–1), sau đó cộng vào các cột trước nó; khai triển theo cột cuối của định thức thứ hai, ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \ldots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \ldots & x \\ 0 & 0 & a_3 - x & \ldots & x \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+n}(a_n - x)\, D_{n-1}$$

Áp dụng tính chất 11:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-1} - x) + (-1)^{n+n}(a_n - x)D_{n-1}.$$

Truy hồi, ta có:

$$D_{n-1} = x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-2} - x) + (-1)^{2n-2}(a_{n-1} - x)D_{n-2}$$

Tiếp tục truy hồi ta có:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)\ldots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + \ldots$$
$$+ x(a_2 - x)(a_3 - x)\ldots(a_n - x) + (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x).$$

Ví dụ 2: Tính định thức Vanđecmon:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Giải: Lấy hàng phía trên nhân với $(-x_1)$ cộng ngay xuống hàng phía dưới, làm từ hàng (n – 1) dần lên, ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & \ldots & x_n^2 - x_nx_1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & x_4^{n-2}(x_4 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Đưa thừa số chung của từng cột ra ngoài dấu định thức:

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \ldots & x_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & x_4^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)D_{n-1}.$$

Tương tự như trên:

$$D_{n-1} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - x_2)D_{n-2}.$$

Tiếp tục truy hồi ta có:

$$D_n = \left[(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\right]\left[(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - x_2)\right]\times$$
$$\times\left[(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)\ldots(x_n - x_3)\right]\ldots\ (x_n - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow D_n = \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j).$$

Ví dụ 3: Tính định thức:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & . & . & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & . & . & x^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & . & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

Giải: Nhân (–1) với các hàng (từ hàng 1 đến hàng n). Sau đó cộng hàng dưới với hàng trên.

Áp dụng công thức:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \Leftrightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$$

Ta có:

$$D_{n+1} = (-1)^n\begin{vmatrix} 0 & C_1^1 & 0 & \ldots & 0 & x-1 \\ 0 & C_2^1 - C_1^1 & C_2^2 & \ldots & 0 & x^2 - x \\ 0 & C_3^1 - C_2^1 & C_3^2 - C_2^2 & \ldots & 0 & x^3 - x^2 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & C_n^1 - C_{n-1}^1 & C_n^2 - C_{n-1}^2 & \ldots & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & x^n - x^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

Khai triển theo cột 1 và rút (x – 1) ở cột cuối ra làm thừa số chung, ta được:

$$D_{n+1} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ 1 & C_2^2 & 0 & . & . & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & . & . & x^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & . & . & x^{n-1} \end{vmatrix} = (x-1)D_n.$$

Tiếp tục truy hồi ta có: $D_{n+1} = (x-1)D_n = (x-1)^2D_{n-1} = \ldots = (x-1)^n$.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Tính định thức: $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 24 \end{vmatrix}$

Kết quả:

A. 3 B. –3

C. 18 D. Kết quả khác.

2. Tính định thức: $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Kết quả:

A. $D_4 = -3$ B. $D_4 = 3$

C. $D_4 = -1$ D. Kết quả khác.

3. Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 0$

Kết quả:

A. – Nếu $a \neq 0$; $c \neq 0$; b tùy ý thì phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{a}$ hoặc $x = \frac{1}{c}$;

– Nếu $a \neq 0$; $c = 0$; b tùy ý thì phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{a}$;

– Nếu $a = 0$; $c \neq 0$; b tùy ý thì phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{c}$;

– Nếu $a = 0$; $c = 0$; b tùy ý thì phương trình vô nghiệm.

B. Nếu $a = 0$ thì phương trình có một nghiệm

C. Nếu $c = 0$ thì phương trình có một nghiệm

D. Kết quả khác.

4. Tính định thức cấp n: $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$

Kết quả:

A. $D_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

B. $D_n = a_1 + a_1a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n$

C. $D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

D. Kết quả khác.

5. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kết quả:

A. $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

B. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

C. $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

D. Kết quả khác.

Bài 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. *Tìm được hạng của ma trận bằng các phương pháp.*
2. *Trình bày được các dạng hệ phương trình thường gặp như hệ phương trình tuyến tính tổng quát, hệ phương trình Cramer, hệ phương trình thuần nhất.*
3. *Trình bày được điều kiện để hệ phương trình đã cho có nghiệm, vô số nghiệm hay vô nghiệm.*
4. *Giải được các hệ phương trình nêu trên.*

1. KHÁI NIỆM HẠNG CỦA MA TRẬN

1.1. Định nghĩa 1

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Ma trận vuông cấp p (p là số nguyên dương; $p \le \min(m, n)$) suy từ ma trận A bằng cách bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột gọi là ma *trận con cấp p* của A.

Định thức của ma trận con vuông cấp p của A gọi là *định thức con* cấp p của A.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ta có ma trận con cấp 3, ma trận con cấp 2, ma trận con cấp 1.

Các ma trận con cấp 3 là:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Các ma trận con cấp 2 là:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

1.2. Định nghĩa 2

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. *Hạng* của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của A. Ký hiệu là $\rho(A)$.

Ta có: $0 \le \rho(A) \le \min(m,n)$.

Để tìm hạng của ma trận A ta có thể làm như sau:

– Tính các định thức con từ cấp 2 trở đi.

– Giả sử tìm được một định thức $D \neq 0$ cấp r của A, khi đó tính tiếp định thức cấp r + 1 khác bao quanh D, nếu nó bằng 0 thì tính các định thức r + 1 khác, nếu tất cả các định thức cấp r + 1 đều bằng 0 thì hạng của A bằng r.

Tuy nhiên người ta thường tìm cách khác.

Chú ý: Ta luôn có $\rho(A^t) = \rho(A)$.

1.3. Phương pháp tìm hạng của ma trận

1.3.1. Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận

Định nghĩa: Các phép biến đổi sau đây về ma trận được gọi là các *phép biến đổi sơ cấp* về hàng (hay cột) của ma trận:

– Nhân tất cả các phần tử của một hàng (một cột) với một số khác không;

– Đổi chỗ hai hàng (hai cột) cho nhau;

– Cộng vào một hàng (một cột) các phần tử tương ứng của hàng khác (cột khác).

Định lý: *Các phép biến đổi sơ cấp về hàng (về cột) không làm thay đổi hạng của ma trận.*

1.3.2. Ma trận bậc thang

Định nghĩa: *Ma trận bậc thang* là ma trận có tính chất sau:

– Các hàng khác không (hàng khác không là hàng có phần tử khác không) luôn ở trên các hàng không (hàng không là hàng có tất cả các phần tử bằng không).

– Với hai hàng khác không liền kề thì phần tử khác không ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Khi thực hiện một số phép biến đổi sơ cấp có thể đưa ma trận bất kỳ về ma trận bậc thang.

Định lý: *Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.*

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, ta biến đổi ma trận đã cho về ma trận dạng bậc thang để tìm hạng của ma trận đó:

Ví dụ 1: Các ma trận sau là ma trận dạng bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

và $\rho(A) = 3$; $\rho(B) = 2$; $\rho(C) = 3$.

Ví dụ 2: Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy: $\rho(A) = 2$.

Ví dụ 3: Tìm hạng của ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 14 & 12 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 34 & 24 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 17 & 12 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 26 & 50 \\ 0 & 0 & -39 & -75 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy: $\rho(B) = 3$.

Ví dụ 4: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải: Ta có: $\det(A) = -1 \neq 0$, có thể tìm ma trận nghịch đảo theo cách 2 (bằng phương pháp biến đổi sơ cấp của ma trận) hay còn gọi là phương pháp Gauss–Jordan:

A			I			
1	2	3	1	0	0	L_1
2	5	3	0	1	0	L_2
1	0	8	0	0	1	L_3
1	2	3	1	0	0	
0	1	−3	−2	1	0	$-2L_1 + L_2 \to L_2$
0	−2	5	−1	0	1	$-1L_1 + L_3 \to L_3$
1	2	3	1	0	0	
0	1	−3	−2	1	0	
0	0	−1	−5	2	1	$2L_2 + L_3 \to L_3$
1	2	3	1	0	0	
0	1	−3	−2	1	0	
0	0	1	5	−2	−1	$-1L_3 \to L_3$
1	2	0	−14	6	3	$-3L_3 + L_1 \to L_1$
0	1	0	13	−5	−3	$3L_3 + L_2 \to L_2$
0	0	1	5	−2	−1	
1	0	0	−40	16	9	$-2L_2 + L_1 \to L_1$
0	1	0	13	−5	−3	
0	0	1	5	−2	−1	
I			A^{-1}			

Vậy: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình bậc nhất, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.3.1)$$

được gọi là hệ phương trình *tuyến tính*.

Trong hệ phương trình trên:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn số;

a_{ij} là hệ số ở phương trình i của ẩn x_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$;

b_i là hệ số vế phải của phương trình thứ i, $i = \overline{1,m}$.

Dạng ma trận của hệ phương trình là: AX = B, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} ; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} ; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

ở đây: A là ma trận hệ số;

X là ma trận ẩn;

B là ma trận vế phải.

Đặc biệt khi m = n (hay A là ma trận vuông) thì hệ n phương trình, n ẩn sẽ gọi là *hệ phương trình vuông*.

2.2. Định nghĩa hệ Cramer

Hệ n phương trình bậc nhất, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.3.2)$$

được gọi là hệ *Cramer* nếu $\det(A) \neq 0$.

Dạng ma trận của hệ phương trình là: AX = B, trong đó:

$$A = [a_{ij}]_{(n)}; X = [x_j]_{n\times 1}; B = [b_i]_{n\times 1}.$$

2.3. Định nghĩa hệ phương trình thuần nhất

Hệ m phương trình bậc nhất, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

được gọi là hệ phương trình *thuần nhất*.

Dạng ma trận của hệ phương trình là: AX = O, trong đó:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,;\ X = [x_j]_{n\times 1};\ B = [0]_{\,m\times 1}.$$

3. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT CÓ NGHIỆM

3.1. Định lý Kronecker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

hay biểu diễn dưới dạng ma trận: AX = B, trong đó

$$A = [a_{ij}]_{m\times n};\ X = [x_j]_{n\times 1};\ B = [b_i]_{\,m\times 1}.$$

Gọi $\overline{A}$ là ma trận:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

$\overline{A}$ được gọi là *ma trận đầy đủ* hay *ma trận bổ sung*.

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình AX = B có nghiệm là: $\rho(A) = \rho(\overline{A})$.

– Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = n$ hệ xác định (có nghiệm duy nhất).

– Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = k < n$ hệ vô định (có vô số nghiệm).

– Nếu $\rho(A) \neq \rho(\overline{A})$ hệ vô nghiệm.

Chứng minh:

Xét hạng của ma trận $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

– Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu $a_{11} \neq 0$ ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận $\overline{A}$ hoặc phép đổi chỗ hai cột của ma trận A kèm theo đổi thứ tự ẩn thì được một hệ mới tương đương hệ đã cho).

Lấy hàng 1 nhân với $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$, sau đó cộng vào hàng 2, ta được hàng 2 mới.

Lấy hàng 1 nhân với $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$, sau đó cộng vào hàng 3, ta được hàng 3 mới.

Tiếp tục như trên đến hàng thứ m, ta có:

$$\overline{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

– Tiếp tục, coi $a'_{22} \neq 0$ và biến đổi như trên ta được ma trận $\overline{A_2}$:

$$\overline{A_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

– Tiếp tục quá trình trên ta thu được:

$$\overline{A_{n^*}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n^*}_{nn} & b^{n^*}_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

• Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = \rho(\overline{A_{n^*}}) = n$, khi đó (1.3.4) sẽ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{n^*}x_k + \dots + a_{kn}^{n^*}x_n = b_k^{n^*} \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{n^*}x_n = b_n^{n^*} \end{cases}$$

Giải từ dưới lên ta được đúng một nghiệm: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Vậy hệ xác định hay có nghiệm duy nhất.

• Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A_{k^*}}) = \rho(\overline{A}) = k < n$ thì:

$$\overline{A_{k^*}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ . & . & . & \dots & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{k^*} & \dots & a_{kn}^{k^*} & b_k^{k^*} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & \dots & . & . \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

Khi đó hệ (1.3.4) sẽ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2k}x_k + a'_{2(k+1)}x_{k+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{k^*}x_k + a_{k(k+1)}^{k^*}x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{k^*}x_n = b_k^{k^*} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_k + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = 0 \\ \qquad \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ta xem: $x_{k+1}, \dots, x_n$ là các ẩn tự do (tức là nhận giá trị tùy ý), đưa các ẩn tự do sang vế phải, giải từ dưới lên. Suy ra hệ (1.3.4) có vô số nghiệm.

• Nếu $\rho(A) < \rho(\overline{A})$, giả sử $\rho(A) < k$ và $\rho(\overline{A}) = k$ thì:

$$\overline{A_{k^*}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3k} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ . & . & . & \dots & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_k^{k^*} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & \dots & . & . \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

Khi đó hệ (1.3.4) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2k}x_k + \quad \ldots \quad + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_k + \ldots + 0x_n = b_k^{k^*} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Phương trình thứ k ở hệ phương trình trên sẽ vô nghiệm. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Áp dụng định lý này, người ta thường biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$ về dạng ma trận bậc thang để giải và biện luận hệ phương trình.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2, \forall a, b \in \mathbb{R}. \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

1) Tìm a, b để hệ có nghiệm duy nhất;

2) Tìm a, b để hệ có vô số nghiệm;

3) Tìm a, b để hệ vô nghiệm.

Giải:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7}a & 1 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7}a & 1 \\ 0 & 0 & \frac{21-2a}{7} & b-3 \end{bmatrix}$$

– Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 3$ hay là $a \neq \frac{21}{2}$, b tuỳ ý.

– Với $a = \frac{21}{2}$ ta có: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$

Nhận thấy $\rho(A) = 2$.

Khi $b = 3$ thì $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$, hệ vô số nghiệm.

Khi $b \neq 3$ thì $\rho(A) = 2$ và $\rho(\overline{A}) = 3$, hệ vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + az = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

Giải: Ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & a & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 10 & -5 & -6 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a+6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & a+6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7}(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– Nếu $a \neq 1$ thì $\rho(A) = 2 \neq \rho(\overline{A}) = 3$, hệ vô nghiệm.

Hệ vô nghiệm còn được nhận thấy dễ hơn khi biểu diễn hệ phương trình đã cho dưới dạng sau:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 7z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = -\frac{5}{7}(a-1) \neq 0 \end{cases}$$

– Nếu $a = 1$ thì $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ \qquad\quad 7z = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + \dfrac{8}{7} \\ z = \dfrac{5}{7} \end{cases}$$

3.2. Định lý Cramer

Cho hệ Cramer dạng (1.3.2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất tính bằng công thức:

$$X = A^{-1}B,$$

tức là:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

trong đó: $A = [a_{ij}]_n$; A^{-1} *là ma trận nghịch đảo của A;*

$B = [b_i]_{n\times 1}$ *là ma trận vế phải;*

A_j *là ma trận được suy ra từ ma trận A bằng cách thay cột j bởi cột hệ số vế phải.*

Chứng minh:

Theo định nghĩa hệ Cramer có $\det A \neq 0$, vậy A có nghịch đảo A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}C^t = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & . & . & C_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

Thay $X = A^{-1}B$ vào dạng tổng quát của hệ phương trình ta có:

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B.$$

Vậy: $X = A^{-1}B$ là nghiệm của hệ.

Mặt khác, ta có:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & . & . & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & . & . & C_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ C_{1n} & C_{2n} & . & . & C_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là: $x_j = \dfrac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \ldots + C_{nj}b_n}{\det A} = \dfrac{\det A_j}{\det A}$.

Chứng minh nghiệm đó là duy nhất:

Giả sử có hai nghiệm X và Y ta có: $AX = B$; $AY = B$.

Suy ra: $AX - AY = 0$

$\Leftrightarrow A(X - Y) = 0$

$\Leftrightarrow A^{-1}A(X - Y) = A^{-1}.0 = 0$

$\Leftrightarrow I(X - Y) = 0 \Leftrightarrow X - Y = 0 \Rightarrow X = Y$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ: Giải hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Giải:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \Rightarrow \text{ hệ đã cho là hệ Cramer.}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11},\ x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},\ x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

3.3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ta luôn có $\rho(A) = \rho(\overline{A})$ vì ma trận đầy đủ $\overline{A}$ và ma trận A chỉ khác nhau một cột toàn số 0. Như vậy, hệ luôn có một nghiệm $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, gọi là *nghiệm không*, hay *nghiệm tầm thường*.

– Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = n$ hệ có nghiệm duy nhất, đó là nghiệm tầm thường.

– Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) < n$ thì hệ có vô số nghiệm, ngoài nghiệm không còn có nghiệm khác không gọi là *nghiệm không tầm thường*.

Chú ý rằng: Nếu $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất thì $(\lambda x_1, \lambda x_2,\ldots, \lambda x_n)$ cũng là nghiệm của phương trình, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ví dụ: Giải hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} 2x & -y & +2z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 0 \end{cases}$$

Xét: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & +2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ta có: $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$.

Hệ có vô số nghiệm (kể cả nghiệm tầm thường $x = y = z = 0$) đó là:

$x = -3\lambda$; $y = 4\lambda$; $z = 5\lambda$, ở đây λ là hằng số bất kỳ.

4. PHƯƠNG PHÁP TRỤ XOAY GAUSS (hệ tam giác trên)

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ta lập được ma trận bổ sung $\overline{A}$ của nó, ngược lại cho $\overline{A}$ thì ta dựng lại được hệ phương trình tương ứng.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

Phương pháp trụ xoay của Gauss:

Khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận $\overline{A}$ hoặc phép đổi chỗ hai cột của ma trận A kèm theo đổi thứ tự ẩn thì được một hệ mới tương đương hệ đã cho.

• Giả sử $a_{11} \neq 0$ (hệ số a_{11} gọi là trụ xoay).

– Lấy hàng 1 nhân với $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$, sau đó cộng vào hàng 2, được hàng 2 mới.

– Lấy hàng 1 nhân với $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$, sau đó cộng vào hàng 3, được hàng 3 mới.

– Tiếp tục với các hàng còn lại, ta được:

$$\overline{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdot\cdot & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdot\cdot & a'_{3n} & b'_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdot\cdot & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

• Hệ số a'_{22} là trụ xoay, thực hiện quá trình trên ta được:

$$\overline{A_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdot\cdot & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdot\cdot & a''_{3n} & b''_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdot\cdot & a''_{mn} & b''_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

• Tiếp tục quá trình đó một số (hữu hạn) bước ta sẽ tới một ma trận bậc thang

$$\overline{A_{n^*}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a^{n^*}_{n3} & \dots & a^{n^*}_{nn} & b^{n^*}_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

và tương ứng với ma trận này là một hệ tương đương với phương trình đã cho.

Giải hệ mới từ dưới lên ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (nếu có).

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \quad (*) \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải: Áp dụng phương pháp biến đổi sơ cấp (Gauss) như sau:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6,5 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6,5 & -8 \\ 0 & 0 & -2,9 & -5,8 \end{bmatrix}$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ \qquad 5x_2 + 6,5x_3 = 8 \\ \qquad\qquad 2,9x_3 = 5,8 \end{cases}$$

Giải hệ tam giác từ dưới lên ta được: $x_3 = 2$; $x_2 = -1$; $x_1 = 1$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Giải: Áp dụng phương pháp Gauss ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nhận thấy $\rho(A) = 2 \neq \rho(\overline{A}) = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bạn đọc có thể nhận thấy hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & =1 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =2 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & =3 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x & +3y & -z & +t & =2 \\ 2x & +3y & +z & & =4 \\ 2x & +3y & +2z & & =3 \\ 2x & +3y & & & =5 \end{cases}$$

Giải:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có: $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 3$.

Hệ có vô số nghiệm: $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda;\ y = \lambda;\ z = -1;\ t = -4, \lambda \in \mathbb{R}$.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Tìm hạng ma trận: $A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Kết quả:

A. $\rho(A) = 2$ nếu $\lambda = 0$; $\rho(A) = 3$ nếu $\lambda \neq 0$

B. $\rho(A) = 3$ nếu $\lambda = 0$

C. $\rho(A) = 2$ nếu $\lambda \neq 0$

D. Kết quả khác.

2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(1-a)x + 2y = 0\\ 2x + (4-a)y = 0\end{cases}$

Tìm a để hệ có nghiệm không tầm thường.

Kết quả:

A. $a = 0$ hoặc $a = 5$ B. $a = 0$

C. $a = 5$ D. Kết quả khác.

3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}ax + y + z = 1\\ x + ay + z = a\\ x + y + az = a^2\end{cases}$

Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất?

Kết quả:

A. $a \neq -2$ B. $a = -2$

C. $\forall a$ D. Kết quả khác.

4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x + y - 4z = 0\\ 3x + 5y - 7z = 0\\ 4x - 5y - 6z = 0\end{cases}$

Kết quả:

A. Phương trình có vô số nghiệm: $x = 13\lambda$; $y = 2\lambda$; $z = 7\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

B. Phương trình có vô số nghiệm

C. Phương trình chỉ có nghiệm tầm thường

D. Kết quả khác.

5. Tìm a, b, c để phương trình sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases}x + ay + a^2z = a^3\\ x + by + b^2z = b^3\\ x + cy + c^2z = c^3\end{cases}$$

Kết quả:

A. $b = c$; a tuỳ ý B. $b = -c$

C. $b \neq c$ D. Kết quả khác.

Chương II
HÀM SỐ, ĐẠO HÀM, VI PHÂN – ỨNG DỤNG

Bài 1
HÀM SỐ

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. *Trình bày được định nghĩa hàm số, hàm ngược và hàm hypecbol; điều kiện đủ để tồn tại hàm ngược, đồ thị của hàm ngược.*
2. *Tìm được hàm ngược (nếu có) của hàm số sơ cấp.*

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho $X \neq \varnothing$, $X \subset \mathbb{R}$. Một hàm số f xác định trên X là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc X với một và chỉ một số thực y.

X gọi là *tập xác định* (hay miền xác định) của hàm số f, ký hiệu là D_f.

x bất kỳ thuộc X gọi là *biến độc lập* (hay biến số, hay đối số).

Số thực y tương ứng với biến độc lập x gọi là *biến phụ thuộc*, y còn được gọi là *giá trị* của hàm số f tại x, ký hiệu là f(x); ta viết y = f(x).

Tập $Y = \{ y : y = f(x);\ \forall x \in X\}$ gọi là *tập giá trị* của hàm số, ký hiệu là R_f.

Hàm số vừa định nghĩa được ký hiệu như sau:

$$\begin{aligned} f:\ & X \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Có thể viết gọn hơn là: $y = f(x); x \in X$

hay: $y = f(x)$; $D_f = X$

hay: $y = f(x)$; D_f: X.

Như vậy, một hàm số được xác định nếu ta biết tập xác định X của nó và quy tắc tìm giá trị $y = f(x)$ của hàm số.

Để chỉ các hàm số khác nhau ta dùng các chữ khác nhau như:

$y = f(x), x \in X$; $y = g(x)$; $x = \varphi(t)$; $t \geq 0$,...

Trong cuốn sách này không nói về phương pháp cho hàm số, đồ thị hàm số, hàm hợp, hàm đơn điệu, hàm chẵn – lẻ, hàm tuần hoàn, hàm bị chặn, giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, tính liên tục của hàm số (vì ít nhiều đã biết ở phổ thông).

2. HÀM NGƯỢC, ĐỒ THỊ CỦA HÀM NGƯỢC

2.1. Định nghĩa

Cho hàm số : $f : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x)$, với tập xác định X và tập giá trị Y.

Nếu với mọi giá trị $y \in Y$ có một và chỉ một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$; tức là phương trình $f(x) = y$ với ẩn là x có nghiệm duy nhất. Khi đó theo định nghĩa hàm số ta có một hàm số mới

$$g : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto x = g(y) \text{ (x thoả mãn } f(x) = y)$$

Hàm số g được gọi là *hàm số ngược* của hàm f, hàm ngược của f ký hiệu là f^{-1}.

Thông thường, người ta dùng chữ x để chỉ biến độc lập, chữ y chỉ biến phụ thuộc. Khi đó hàm ngược của hàm $y = f(x)$ (nếu có) sẽ được ký hiệu là $y = g(x)$.

Từ định nghĩa hàm ngược ta suy ra:

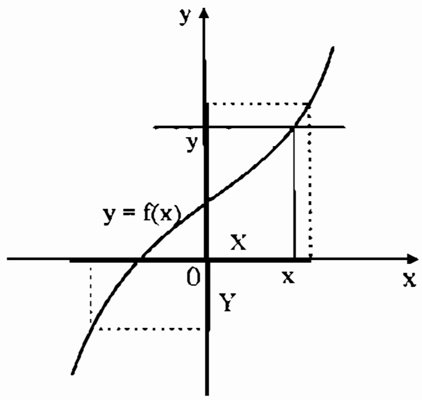
– Nếu hàm $y = f(x)$ có hàm ngược $y = g(x)$ thì hàm $y = g(x)$ có hàm ngược và hàm số ngược của hàm $y = g(x)$ lại là hàm số $y = f(x)$. Ta nói: $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau.

– Tập xác định của hàm ngược $y = g(x)$ là tập giá trị Y của hàm số $y = f(x)$, tập giá trị của hàm số ngược là tập xác định X của hàm số $y = f(x)$.

2.2. Điều kiện đủ để có hàm số ngược

Định lý: *Mọi hàm số đơn điệu tăng (tức đồng biến) hay đơn điệu giảm (tức nghịch biến) trên tập xác định của nó đều có hàm ngược.*

Minh hoạ: Xét hàm $y = f(x)$ có $D_f = X$ và $R_f = Y$, là hàm đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên $D_f = X$. Khi đó, mọi đường thẳng song song với Ox và qua $(0, y)$; $y \in Y$ chỉ cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất (hình 2.1).



Hình 2.1

2.3. Đồ thị của hàm số ngược

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau, và giả sử $D_f = X$; $R_f = Y$ thì $D_g = Y$; $R_f = X$.

Ứng với một điểm $M(a, b)$ bất kỳ thuộc đường cong $f(x)$ là một điểm duy nhất $M'(b, a)$ thuộc đường cong $g(x)$ $(a \in X, b \in Y) \Rightarrow M$ và M' đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất (có phương trình $x - y = 0$).

Vậy, đồ thị của hai hàm số ngược nhau đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

2.4. Ví dụ về hàm ngược

1) – Hai hàm số $y = x^2$, $x \geq 0$ và $y = \sqrt{x}$ là hai hàm ngược nhau.

– Với $a > 0$, $a \neq 1$ hai hàm $y = a^x$ và $y = \log_a x$ là hai hàm số ngược nhau.

2) Một số ví dụ về hàm ngược của hàm số lượng giác:

Ví dụ 1: Hàm số $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ có tập xác định là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; tập giá trị là $[-1, 1]$ là hàm đơn điệu tăng trên tập xác định.

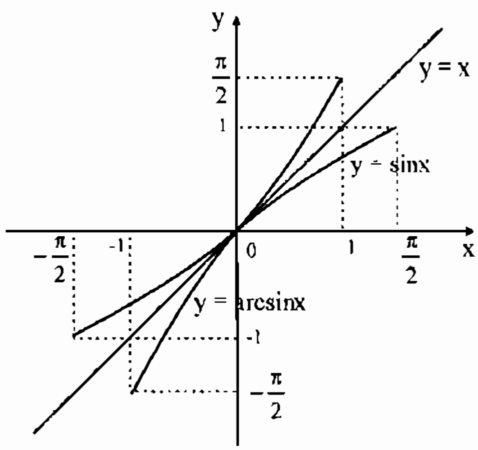
Vậy, tồn tại hàm ngược, ta gọi là $y = \arcsin x$ với $x \in [-1, 1]$ và tập giá trị là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có:

– $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$;

– $\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x$.

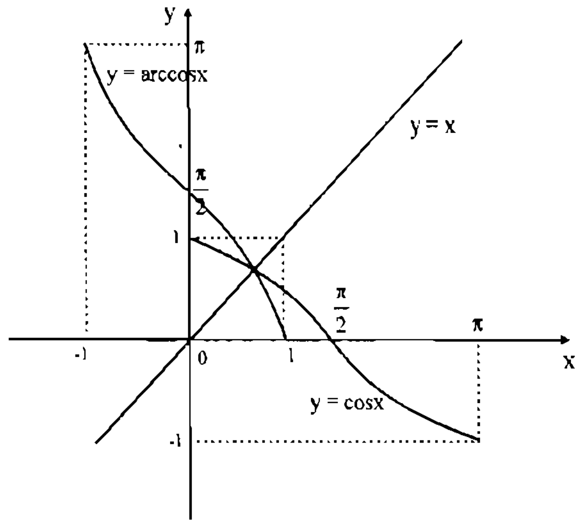
Ví dụ 2: Hàm số $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ là hàm đơn điệu giảm trên tập xác định; có tập giá trị là $[-1, 1]$.



Hình 2.2

Vậy, tồn tại hàm ngược, ta gọi hàm ngược này là hàm y = arccosx, với $x \in [-1, 1]$; tập giá trị là $[0, \pi]$.

Ta có: $\forall x \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x$; $\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow \cos(\arccos x) = x$.

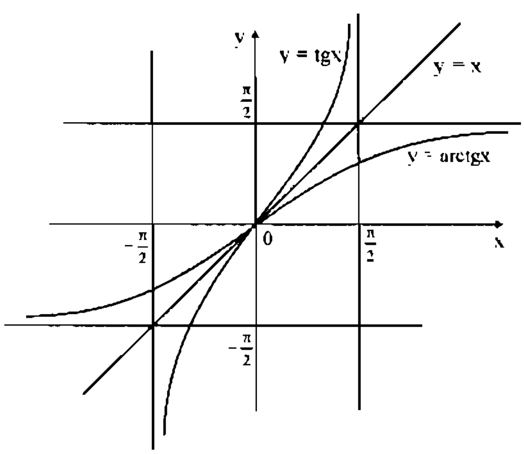


Hình 2.3

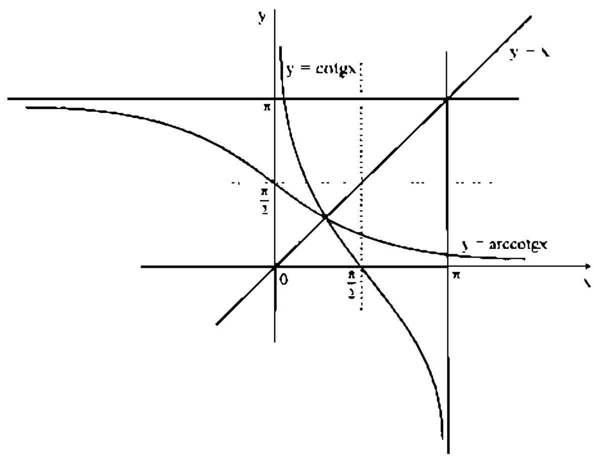
Ví dụ 3: Hàm số y = tgx, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm đơn điệu tăng trên tập xác định và có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Vậy, tồn tại hàm ngược, ta gọi là y = arctgx, với $\forall x \in \mathbb{R}$; tập giá trị là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Với $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{arctg}(\text{tg}x) = x$; với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{tg}(\text{arctg}x) = x$.



Hình 2.4



Hình 2.5

Ví dụ 4: Hàm số $y = \text{cotg}x$, $x \in (0, \pi)$ là hàm đơn điệu giảm trên tập xác định và có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Vậy, tồn tại hàm ngược, ta gọi là $y = \text{arccotg}x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$; tập giá trị là $(0, \pi)$.

Ta có: $\forall x \in (0, \pi) \Rightarrow \text{arccotg}(\text{cotg}x) = x$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{cotg}(\text{arccotg}x) = x$.

2.5. Một số tính chất của hàm lượng giác ngược

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; $\quad \forall x \in [-1, 1]$.

2) $\text{arctg}x + \text{arccotg}x = \dfrac{\pi}{2}$; $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) $\sin(\arcsin x) = x$, $\quad \forall x \in [-1, 1]$.

4) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\quad \forall x \in [-1, 1]$.

5) $\sin(\text{arctg}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

6) $\sin(\text{arccotg}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

7) $\arcsin(\sin x) = x$; $\quad \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8) $\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi}{2} - x$; $\quad \forall x \in [0, \pi]$.

Bạn đọc có thể chứng minh các đẳng thức trên.

3. HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN, HÀM SỐ SƠ CẤP

3.1. Hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sau được gọi là hàm số *sơ cấp cơ bản*:

1) Hàm hằng: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) Hàm luỹ thừa: $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(Nếu α vô tỷ và dương thì xét với $x \geq 0$, nếu α vô tỷ và âm thì chỉ xét với $x > 0$).

3) Hàm mũ: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4) Hàm logarit: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5) Hàm lượng giác: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}x$, $y = \text{cotg}x$.

6) Hàm lượng giác ngược: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}x$, $y = \text{arccotg}x$.

3.2. Hàm số sơ cấp

Cho hai hàm f(x) và g(x) theo thứ tự có tập xác định là D_f và D_g. Các hàm tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm đã cho là hàm được xác định tương ứng theo các quy tắc sau:

$$x \mapsto f(x) + g(x); \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$x \mapsto f(x) - g(x); \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$x \mapsto f(x) \times g(x); \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}; \quad \forall x \in D_f \cap D_g \text{ và } g(x) \neq 0.$$

Hàm số *sơ cấp* là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép: tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản.

Ví dụ: $y = x - 3$; $y = \sin 2x$;

$$y = \ln\frac{x}{3}; \; y = -2x^2 + \sqrt{x};$$

$$y = 2^{3x} + e^{\frac{x^2}{2}}; \; y = \frac{2 - 2^{3x}\cdot\sin x}{\operatorname{arccotg} x - x^2 + x}, \ldots$$

Trong số các hàm sơ cấp ta quan tâm đến ba dạng đơn giản sau:

• *Hàm đa thức bậc n*

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

trong đó: $a_n \neq 0$; $a_i \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$.

• *Hàm phân thức hữu tỷ*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

trong đó: $a_n, b_m \neq 0$; $a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N}$.

• *Hàm hypecbol*

– Hàm sinhypecbol của x: $\quad \operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

– Hàm coshypecbol của x: $\quad \operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

– Hàm tanghypecbol của x: $\text{thx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\text{shx}}{\text{chx}}$

– Hàm cotanghypecbol của x: $\text{cothx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\text{chx}}{\text{shx}} = \dfrac{1}{\text{thx}}$.

Một số tính chất:

1) $\text{ch}^2x + \text{sh}^2x = \text{ch}2x$

2) $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$

3) $\text{sh}(a \pm b) = \text{sha.chb} \pm \text{cha.shb}$

4) $\text{ch}(a \pm b) = \text{cha.chb} \pm \text{sha.shb}$.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Với $x \in [-1, 1]$ tìm tg(arcsinx).

Kết quả:

A. $\text{tg(arcsinx)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $\text{tg(arcsinx)} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $\text{tg(arcsinx)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D. Kết quả khác.

2. Hàm ngược của hàm số y = shx được ký hiệu là y = arcshx. Tìm arcshx.

Kết quả:

A. $\text{arcshx} = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$

C. $\text{arcshx} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

B. $\text{arcshx} = \ln\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)$

D. Kết quả khác.

3. Ký hiệu hàm ngược của hàm số y = chx, $x \geq 0$ là y = arcchx. Tìm arcchx.

Kết quả:

A. $\text{arcchx} = \ln\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right)$

C. $\text{arcchx} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

B. $\text{arcchx} = \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|$

D. Kết quả khác.

4. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số: $y = \ln(1 - 2|\cos x|)$.

Kết quả:

A. $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $-\infty < y \leq \ln 3$

B. $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $-\infty < y \leq 0$

C. $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $-\infty < y \leq 0$

D. Kết quả khác.

5. Cho hàm $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$. Tìm $f[\varphi(x)]$, $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$.

Kết quả:

A. $f[\varphi(x)] = \sin 2(x^3 - x)$; $f[f(x)] = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$;

$\varphi[\varphi(x)] = \sin(2\sin 2x)$

B. $f[\varphi(x)] = \sin 2x^3 - \sin 2x$; $f[f(x)] = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3 + x$;

$\varphi[\varphi(x)] = 2\sin(\sin 2x)\cos(\sin 2x)$

C. $f[\varphi(x)] = -\sin 2x \cos^2 2x$; $f[f(x)] = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$;

$\varphi[\varphi(x)] = \sin(2\sin 2x)$

D. Kết quả khác.

Bài 2
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa, ý nghĩa, điều kiện tồn tại của đạo hàm, các phép toán về đạo hàm của hàm số. Tìm được đạo hàm của các hàm số sơ cấp.

2. Trình bày được định nghĩa, ý nghĩa hình học của vi phân, tính chất của vi phân.

3. Trình bày được định nghĩa đạo hàm và vi phân cấp cao. Tìm được đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm số.

4. Vận dụng đạo hàm để khảo sát được một số hàm số ứng dụng trong y học.

1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

1.1. Định nghĩa

Xét hàm số f(x) xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Cho x_0 số gia Δx có $|\Delta x|$ đủ nhỏ.

Nếu tỷ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn (hữu hạn) khi $\Delta x \to 0$ thì ta nói f(x) *khả vi* tại x_0, hay có đạo hàm tại x_0. Giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của f(x) theo x tại x_0 và được ký hiệu là $f_x'(x_0)$ hay $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 2$.

Giải: Cho x_0 số gia Δx, tính số gia tương ứng của hàm:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = 4\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Lập tỷ số $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x .$$

Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 4$

$\Rightarrow$ $f(x) = x^2$ khả vi tại $x = 2$ và $f'(2) = 4$ hay $(x^2)'\big|_{x=2} = 4$.

Vậy hàm f(x) xác định trên (a, b), khả vi tại $x_0 \in (a, b)$ khi và chỉ khi:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x),$$

trong đó: $O(\Delta x)$ là vô cùng bé (VCB) bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ (tức là $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0$).

Nếu f(x) có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói f(x) khả vi trên khoảng (a, b), $f'(x)$ là hàm số xác định trên (a, b).

1.2. Ý nghĩa của đạo hàm hàm số

1.2.1. Ý nghĩa chung (ý nghĩa toán học)

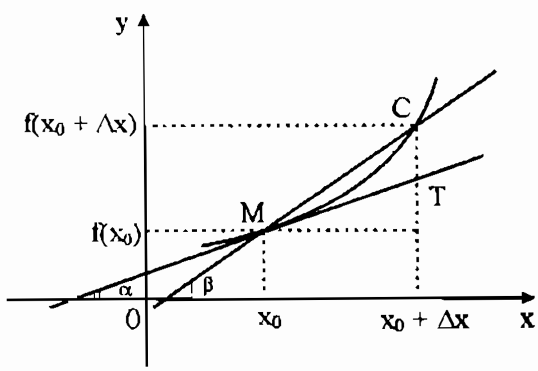
Xét hàm số y = f(x), tỷ số $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ là vận tốc biến thiên trung bình của f(x) khi biến độc lập x biến thiên từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$. Do đó, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ là vận tốc biến thiên tức thời của f(x) tại x_0. Trên (a, b), $f'(x)$ phản ánh tốc độ biến thiên của f(x) khi x biến đổi trên khoảng đó (bạn đọc sẽ thấy rõ hơn điều này khi nghiên cứu các định lý về tính chất của hàm khả vi và khảo sát hàm số).

1.2.2. Ý nghĩa hình học

Xét hàm f(x) xác định tại x_0 và lân cận của x_0, điểm $M(x_0, y_0)$ với $y_0 = f(x_0)$. Giả sử tồn tại $f'(x_0)$.

Tỷ số $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của cát tuyến MC = tgβ (β là góc hợp bởi $\overrightarrow{MC}$ với trục Ox) (xem hình 2.6).

Khi $\Delta x \to 0$ cũng là khi $C \to M$, cát tuyến MC → tiếp tuyến MT khi $\beta \to \alpha$, như vậy $f'(x_0)$ = hệ số góc của tiếp tuyến MT = tgα.



Hình 2.6

Tóm lại: f(x) khả vi tại x_0 thì tại $M(x_0, y_0)$ có tiếp tuyến duy nhất với đường cong không vuông góc với trục Ox và hệ số góc của tiếp tuyến đó là $k = f'(x_0)$, phương trình tiếp tuyến này là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Dựa vào ý nghĩa chung của đạo hàm, có thể suy ra đạo hàm còn có nhiều ý nghĩa khoa học thực tiễn khác, chẳng hạn:

– Vận tốc tức thời của một chất điểm tại thời điểm t_0: $v(t_0)$ là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0; $v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)$; $s = f(t)$ là phương trình chuyển động của chất điểm.

– Phương trình $Q = f(t)$ là phương trình của điện lượng Q truyền trong dây dẫn, f(t) là hàm số có đạo hàm thì $Q'(t) = f'(t) = I(t)$ là cường độ dòng điện tại thời điểm t.

1.3. Đạo hàm bên phải, bên trái và đạo hàm vô hạn

Khi định nghĩa đạo hàm của hàm f(x) tại x_0, ta đã xét $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, giới hạn này có thể không tồn tại, nhưng có thể tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ hay $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Từ đây ta có định nghĩa sau:

Xét f(x) xác định tại x_0 và lân cận phải của x_0. *Đạo hàm bên phải* của f(x) tại x_0 được ký hiệu là $f'(x_0 + 0)$ hay $f'(x_0^+)$ và

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (hữu hạn).}$$

Xét f(x) xác định tại x_0 và lân cận trái của x_0. *Đạo hàm bên trái* của f(x) tại x_0 được ký hiệu là $f'(x_0 - 0)$ hay $f'(x_0^-)$ và

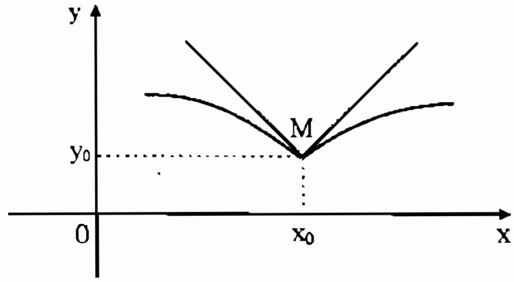
$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (hữu hạn).}$$

Về mặt hình học, $f'(x_0 + 0)$ và $f'(x_0 - 0)$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến phải và trái tại $M(x_0, y_0)$ của đường cong $y = f(x)$.

Hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại cả $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ và bằng nhau, khi đó:

$$f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0).$$

Nếu tồn tại cả $f'(x_0 + 0)$ và $f'(x_0 - 0)$ nhưng không bằng nhau thì không tồn tại $f'(x_0)$ hay f(x) không khả vi tại x_0. Khi đó điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là ***điểm góc*** của đồ thị (hình 2.7).



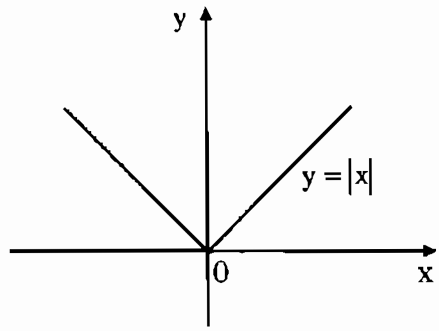
Hình 2.7

Ví dụ: Xét hàm $y = |x|$, tại x = 0.

Ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{nếu } \Delta x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y'(0 + 0) = 1$, $y'(0 - 0) = -1 \Rightarrow$ hàm $y = |x|$ không có đạo hàm tại x = 0, điểm (0, 0) là điểm góc của đồ thị hàm số $y = |x|$ (hình 2.8).



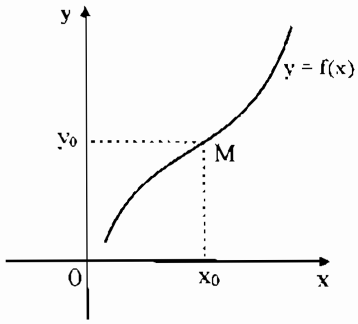
Hình 2.8

Nếu f(x) khả vi trên (a, b) và tồn tại $f'(b - 0)$, $f'(a + 0)$ ta nói f(x) khả vi trên đoạn [a, b].

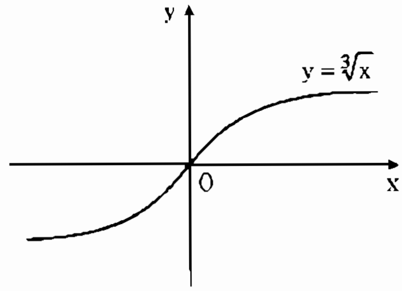
Khi định nghĩa đạo hàm của f(x) tại x_0 ta cần xét $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Nếu $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to (+\infty)$ hay $(-\infty)$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói f(x) có ***đạo hàm vô hạn*** tại x_0.

Đây là một trường hợp đặc biệt, về mặt hình học, khi đó đường cong $y = f(x)$ có tiếp tuyến vuông góc với 0x tại $M(x_0, y_0)$ (hình 2.9).



Hình 2.9



Hình 2.10

Ví dụ: Xét hàm: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Tại $x_0 = 0$, có $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$.

Ta nói $f(x) = \sqrt[3]{x}$ có đạo hàm vô hạn tại điểm $x = 0$.

Tại điểm (0, 0) của đường cong $y = \sqrt[3]{x}$ có tiếp tuyến thẳng đứng, trùng với trục Oy (hình 2.10).

1.4. Liên hệ giữa tính khả vi và tính liên tục của hàm số

Nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Thật vậy, vì f(x) có đạo hàm tại x_0 nên $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ khi $\Delta x \to 0$.

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)\ ;\ \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

$$\Rightarrow \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x).\Delta x \Rightarrow \Delta f \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

nghĩa là f(x) liên tục tại x_0.

Điều ngược lại không đúng, tức là hàm f(x) liên tục tại x_0 thì chưa chắc nó có đạo hàm tại x_0.

Ví dụ: Hàm $y = |x|$ liên tục tại $x = 0$, nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Hàm $y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại $x = 0$, nhưng không có đạo hàm theo định nghĩa (hữu hạn).

Tương tự ta có, nếu f(x) có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thì nó liên tục phải (trái) tại x_0.

1.5. Phương pháp tìm đạo hàm

Ngoài việc dùng định nghĩa còn áp dụng các định lý sau để tìm đạo hàm.

1.5.1. Định lý 1 (về đạo hàm của hàm hợp)

Xét hàm hợp $y = f[u(x)]$ xác định trên (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nếu $u = u(x)$ khả vi tại x_0 và $f(u)$ khả vi tại u_0 ($u_0 = u(x_0)$) thì: $y = f[u(x)]$ khả vi tại x_0 và

$$y'_x(x_0) = f'_u(u_0).u'_x(x_0).$$

1.5.2. Định lý 2

Cho $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số xác định trên (a, b) và khả vi tại $x \in (a, b)$. Khi đó: $u(x) + v(x)$, $u(x)v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng khả vi tại x và:

1) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

2) $[u(x).v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, *nói riêng:* $[c.u(x)]' = c.u'(x)$, *c là hằng số;*

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$; $v(x) \neq 0$.

1.5.3. Định lý 3 (về đạo hàm của hàm ngược)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0, $f'(x_0) \neq 0$ và có hàm ngược $x = g(y)$. Khi đó hàm $x = g(y)$ khả vi tại $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Chứng minh: Vì hàm f(x) khả vi tại x_0 và có $f'(x_0) \neq 0$ nên khi $\Delta x \neq 0$ thì:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \neq 0 \text{ và } \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ khi } \Delta x \to 0;$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta f} = \frac{1}{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}}.$$

Vì hàm $y = f(x)$ khả vi tại x_0 nên nó liên tục tại x_0, suy ra khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$.

Như vậy, khi $\Delta y \to 0$ thì $\dfrac{\Delta g}{\Delta y} \to$ số xác định $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Vậy $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Ví dụ 1: Tìm (lnx)'.

Hàm y = lnx có hàm ngược $x = e^y$. Có $x'_y = e^y$ (bạn đọc có thể chứng minh được nhờ định nghĩa đạo hàm).

Theo định lý 3, ta có $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

Vậy: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Nhờ định nghĩa đạo hàm, bạn đọc cũng chứng minh được $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Ví dụ 2: Tìm $(\ln|x|)'$.

Nếu $x > 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Nếu $x < 0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Vậy: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Ví dụ 3: Tìm (arcsinx)', (arccosx)', (arctgx)', (arccotgx)'.

Hàm y = arcsinx là hàm ngược của hàm x = siny, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Từ định nghĩa, ta chứng minh được:

$$x'_y = \cos y \Rightarrow (\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Vì $\sin(\arcsin x) = x \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Vậy: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tương tự ta có:

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\text{arccotg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ví dụ 4: (shx)' = chx; (chx)' = shx.

Bạn đọc tự kiểm tra được các kết quả này.

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm của hàm có dạng:

$$y = [u(x)]^{v(x)}, \ u(x) > 0.$$

Lấy logarit tự nhiên hai vế ta được:

$$\ln y = v\ln u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = v\frac{1}{u}u' + v'\ln u$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left[\frac{u'v}{u} + v'\ln u\right] = u^v\left[\frac{u'v}{u} + v'\ln u\right]$$

Chẳng hạn, cho $y = x^x$, $x > 0$, tìm y'_x.

Ta có: $\ln y = x\ln x$;

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln x + x\frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1).$$

Ví dụ 6: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$.

$$y' = \left(\frac{x\ln x - x - 1}{e^x}\right)' x^x + \frac{x\ln x - x - 1}{e^x}(x^x)'$$

$$= \frac{(\ln x + 1 - 1)e^x - (x\ln x - x - 1)e^x}{e^{2x}}x^x + \frac{x\ln x - x - 1}{e^x}x^x(\ln x + 1)$$

$$= \frac{x^x}{e^x}\left[\ln x - x\ln x + x + 1 + (x\ln x - x - 1)(\ln x + 1)\right]$$

$$= \frac{x^{x+1}}{e^x}\left[\ln x(\ln x - 1)\right].$$

Ví dụ 7: Tìm đạo hàm của hàm $y = |x| + |x - 2|$.

$$y = \begin{cases} -2x + 2 & \text{nếu } x < 0 \\ 2 & \text{nếu } 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & \text{nếu } x > 2 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 2 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

– Xét tại x = 0:

$$\lim_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{-2(0 + \Delta x) + 2 - 2}{\Delta x} = -2\,;$$

$$\lim_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{2 - 2}{\Delta x} = 0$$

Suy ra tại x = 0 hàm số không có đạo hàm.

– Xét tại x = 2:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Suy ra tại x = 2 hàm số không có đạo hàm.

Nhờ định nghĩa đạo hàm và các định lý đã trình bày ở trên ta có bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và công thức cần nhớ sau:

1) $(c)' = 0$, c là hằng số
2) $(x)' = 1$
3) $(kx)' = k$, k là hằng số
4) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$
5) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7) $(a^x)' = a^x \ln a$
8) $(e^x)' = e^x$
9) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
12) $(shx)' = chx$, $(chx)' = shx$
13) $(u + v)' = u' + v'$
14) $(u.v)' = u'v + uv'$
15) $(\sin x)' = \cos x$
16) $(\cos x)' = -\sin x$
17) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
18) $(\cot gx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$
19) $(shx)' = chx$
20) $(chx)' = shx$
21) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
22) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
23) $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$
24) $(arc\cot gx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$
25) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
26) $y = y(u)$; $u = u(x)$ thì $y'_x = y'_u u'_x$

2. ĐẠO HÀM CẤP CAO

2.1. Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a, b), f(x) được gọi là *khả vi n lần* trên (a, b) nếu f(x) khả vi (n – 1) lần trên (a, b) và đạo hàm cấp (n – 1) của f(x) cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của f(x) được ký hiệu là $f^{(n)}(x)$ và được định nghĩa bởi hệ thức:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Các $f^{(n)}(x)$ với $n \geq 2$ là đạo hàm cấp cao của f(x).

Ký hiệu: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$,...

Ví dụ 1: Hàm $f(x) = x^k$ (k nguyên dương) có đạo hàm mọi cấp:

$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2) \ldots (k-n+1)x^{k-n}$ nếu $n < k$;

$f^{(k)}(x) = k!$ nếu $n = k$;

$f^{(n)}(x) = 0$ nếu $n > k$.

Ví dụ 2: Hàm $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ có đạo hàm mọi cấp:

$$y^{(n)}(x) = (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$$

Nói riêng: $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Ví dụ 3: Hàm y = sinx có:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right);$$

...

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right).$$

Ví dụ 4: Hàm y = cosx có:

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = (\cos x)'' = \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right);$$

...

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right).$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các ví dụ trên nhờ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 5: Cho $y = \frac{1}{x}$, tìm $y^{(n)}$.

$$y' = -\frac{1}{x^2},\ y'' = \frac{1.2}{x^3},\ y^{(3)} = \frac{-1.2.3}{x^4}, \ldots,\ y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Chứng minh:

Giả sử $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ thì có $y^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Thật vậy, $y^{(n+1)} = \left[\dfrac{(-1)^n (n)!}{x^{n+1}}\right]' = \dfrac{-(-1)^n (n)!(n+1)x^n}{x^{2(n+1)}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$

Vậy: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Từ ví dụ trên ta suy ra

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{x^n}.$$

Ví dụ 6:

1) $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$, trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; f và g là những hàm của x khả vi n lần.

2) $y(x) = f(ax + b) \Rightarrow y^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax + b)$, f khả vi n lần; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Áp dụng:

a) Cho $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, tìm $y^{(n)}$.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{bc-ad}{c}.\frac{(-1)^n n! c^n}{(cx+d)^{n+1}} = \frac{(bc-ad)(-1)^n n! c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}} = \frac{(ad-bc)n!(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

b) Cho $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, tìm $y^{(n)}$.

$$y = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right] \Rightarrow y^{(n)} = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

2.2. Định lý Lepnit (Leibnitz)

Nếu f(x) và g(x) là hai hàm khả vi trên D tới cấp n, thì tích f(x)g(x) cũng khả vi trên D cấp n và:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp 10 của $\dfrac{e^x}{x}$.

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)^{(10)} = \left(e^x\frac{1}{x}\right)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}(e^x)^{(10-k)}$$

$$= e^x\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = 10!\, e^x\sum_{k=0}^{10}\frac{(-1)^k}{(10-k)!\, x^{k+1}}.$$

3. VI PHÂN

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b) có đạo hàm (hay khả vi) tại $x \in (a, b)$.

Như đã biết:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + O(\Delta x)$$

trong đó Δx là số gia của biến độc lập x tại x, $O(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

Ta gọi $f'(x)\Delta x$ là *vi phân cấp 1* của hàm f(x) tại x. Ký hiệu là dy, hay df(x), hay df.

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Nghĩa là, vi phân của f(x) tại x bằng tích của đạo hàm $f'(x)$ với số gia đối số Δx.

3.2. Ý nghĩa hình học của vi phân, ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Từ định nghĩa ta thấy, tại điểm x mà hàm số có đạo hàm $f'(x)$, ở đó ta tính được vi phân $df = f'(x)\Delta x$ và nếu $f'(x) \neq 0$ thì Δf, df là hai vô cùng bé tương đương khi $\Delta x \to 0$ (bạn đọc kiểm tra).

Như vậy, f(x) khả vi tại x thì $\Delta f = df + O(\Delta x)$. Khi $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $\Delta f \approx df$.

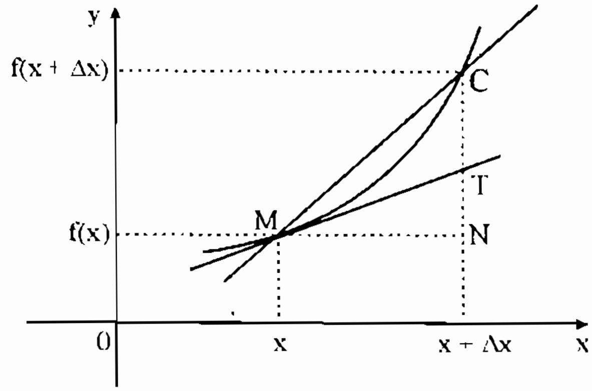
$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \text{ hay } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Đây là công thức tính giá trị gần đúng của hàm số nhờ vi phân.

Vẽ tiếp tuyến MT với đường cong f(x) tại M(x, f(x)). Gọi C là một điểm thuộc đường cong ($C \neq M$) với toạ độ $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Ta có: $NC = \Delta f$; $NT = df$; $TC = O(\Delta x)$; $NC = NT + TC$.

Khi $\Delta x \to 0$, $TC \to 0$ nhanh hơn $\Delta x \to 0$, hay khi $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $NC \approx NT$.



Hình 2.11

Ví dụ: Tính giá trị gần đúng của $\sin 46^0$.

$$\sin 46^0 = \sin(45^0 + 1^0) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0,7194.$$

3.3. Công thức tính vi phân, biểu thức vi phân, tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1

Trở lại định nghĩa vi phân: Hàm $y = f(x)$ khả vi tại x thì vi phân của f(x) tại x là

$$df = f'(x)\Delta x \tag{2.2.1}$$

Xét hàm đồng nhất $y = x$, theo định nghĩa thì $dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$, tức là vi phân dx của biến độc lập x bằng số gia Δx của nó. Như vậy (2.2.1) trở thành

$$df = f'(x)dx \tag{2.2.2}$$

Công thức (2.2.1) và (2.2.2) gọi là công thức tính vi phân, vế phải của nó là biểu thức vi phân của hàm khả vi f(x).

Từ (2.2.2) ta có:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{2.2.3}$$

Nghĩa là, đạo hàm của hàm số là thương của vi phân hàm số với vi phân đối số. Biểu thức $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ là công thức tính và cũng là ký hiệu của đạo hàm.

Bây giờ ta xét hàm $y = f(x)$, với x là biến phụ thuộc: $x = x(t)$; $x(t)$ là hàm khả vi đối với biến độc lập t, tức là xét hàm hợp $y = f[x(t)]$.

Theo công thức (2.2.2) thì vi phân của hàm f[x(t)] đối với t, tại t là:

$$df[x(t)] = \{f[x(t)]\}'_t dt = f'_x x'_t dt.$$

Vì x(t) là hàm khả vi đối với t nên $x'_t dt = dx$.

Do đó: $$df[x(t)] = f'_x dx.$$

Như vậy, f là một hàm số phụ thuộc vào biến x; cho dù x là biến độc lập hay x là biến phụ thuộc vào một biến độc lập t nào đó (x là một hàm khả vi của biến độc lập t) thì luôn có: $df = f'_x dx$. Tức là dạng của biểu thức vi phân hàm f không đổi. Đó là tính bất biến của dạng biểu thức vi phân (cấp 1).

Ví dụ 1: Cho y = sinx thì $d(\sin x) = \cos x\Delta x$ hay $d(\sin x) = \cos x dx$.

Nếu y = sinu, u là hàm khả vi của một biến độc lập khác thì vẫn có:

$$dy = \cos u du.$$

Ví dụ 2: Cho $f(x) = 3x^3$ thì $df(x) = f'(x)dx = 9x^2dx$.

Nếu xét hàm $f(x) = 3x^3$ với $x = t^2$ thì $df[x(t)] = 18t^5dt = 9x^2dx = f'(x)dx$. Tức là ta luôn có: $df = f'(x)dx$.

Ví dụ 3: Cho hàm số phụ thuộc tham số y = y(t), x = x(t). Tìm y'(x).

Giải: y phụ thuộc vào x, do tính bất biến của biểu thức vi phân nên có:

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx};$$

$$y = y(t) \text{ nên } dy = y'(t)dt;$$

$$x = x(t) \text{ nên } dx = x'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Vậy: $$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Công thức tính vi phân của một số hàm sơ cấp cơ bản và một số công thức khác:

1) $dc = 0$, c là hằng số

2) $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx$

3) $da^x = a^x \ln a dx$

4) $de^x = e^x dx$

5) $d\ln|x| = \frac{1}{x}dx$

6) $d\sin x = \cos x dx$

7) $d\cos x = -\sin x dx$

8) Với $u = u(x)$, $v = v(x)$ thì:

$d(u + v) = du + dv$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$d(uv) = udv + vdu$

$df(u(x)) = f'_u u'_x dx = f'_u du$

9) $d\,tgx = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1 + tg^2x)dx$

10) $d\cot gx = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$

11) $d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12) $d\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

13) $d\,arctgx = \frac{1}{1+x^2}dx$

14) $d\,arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}dx$

3.4. Vi phân cấp cao

Cho f(x) khả vi tại mọi $x \in (a, b)$. Vi phân $df = f'(x)dx$ là vi phân cấp 1 (gọi tắt là vi phân) của f(x) tại x, nó là một hàm của x, trong đó dx không đổi.

Vi phân của vi phân cấp 1 là vi phân cấp 2 được ký hiệu là d^2f:

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx.dx, \text{ ta viết là } d^2f = f''(x)dx^2.$$

Tương tự, vi phân cấp 3 ký hiệu là d^3f và $d^3f = d(d^2f)$; $d^3f = f^{(3)}(x)dx^3$.

Cứ như thế, vi phân cấp n ký hiệu là d^nf và $d^nf = d(d^{n-1}f)$; $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$.

Các vi phân cấp 2 trở đi được gọi là *vi phân cấp cao*.

Suy ra: $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$; $f^{(3)}(x) = \frac{d^3f}{dx^3}$;... ; $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}$.

Ví dụ: Xét $f(x) = 3x^3$.

$$df = 9x^2dx;\ d^2f = 18xdx^2;\ d^3f = 18dx^3;\ d^4f = 0.$$

Lưu ý: Các công thức vi phân cấp cao d^2f, d^3f,... $d^{(n)}f$ viết ở trên chỉ đúng cho hàm f(x) với x là biến độc lập.

Nếu $y = f(x)$; $x = \varphi(t)$, t là biến độc lập thì dx không phải là hằng số, khi đó, chẳng hạn:

$$d^2f = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Rõ ràng khi x là biến độc lập thì $d^2x = 0$, khi đó d^2f mới bằng $f''(x)dx^2$.

Ví dụ: Xét $f(x) = 3x^3$; $x = t^2$.

Nếu cho là dạng của biểu thức vi phân cấp 2 có tính bất biến (như ở dạng biểu thức vi phân cấp 1) thì ta có:

$$d^2f[x(t)] = f''(x)dx^2 = 18xdx^2\ (= 18t^2(2tdt)^2 = 72t^4dt^2).$$

Nhưng thực ra thì: $d^2f[x(t)] = (3t^6)''dt^2 = 90t^4dt^2 \neq 72t^4dt^2$.

(Thấy ngay $90t^4dt^2 - 72t^4dt^2 = 18t^4dt^2 = f'(x)d^2x$)

Vậy, khi tìm vi phân cấp cao ta chú ý vi phân cấp cao tính theo biến nào.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Xét tính khả vi của f(x) tại x = 0.

Kết quả:

A. $f'(0^+) = 0$; $f'(0^-) = 0$. Tại x = 0 hàm số đã cho khả vi và $f'(0) = 0$

B. $f'(0^+) = 1$; $f'(0^-) = 1$. Vậy tồn tại $f'(0)$ và $f'(0) = 1$

C. Không tồn tại $f'(0)$

D. Kết quả khác.

2. Cho $f(x) = x^{\arcsin x}$, tìm $f'(x)$.

Kết quả:

A. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{x}\arcsin x$ B. $x^{\arcsin x}\ln x$

C. $x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ D. Kết quả khác.

3. Tính $A_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Kết quả:

A. Nếu $x = 1$: $A_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Nếu $x \neq 1$: $A_n = \dfrac{nx^{n+1} + (n+1)x^n - 1}{(x-1)^2}$

B. Nếu $x = 1$: $A_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Nếu $x \neq 1$: $A_n = \dfrac{1}{(1-x)^2}\left[1-(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\right]$

C. Nếu $x = 1$: $A_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Nếu $x \neq 1$: $A_n = \dfrac{1-(1+n)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

D. Kết quả khác.

4. Cho $y = x^2\sin x$, tìm $y^{(100)}$.

Kết quả:

A. $y^{(100)} = x^2\sin x - 200x\cos x - 9900\sin x$

B. $y^{(100)} = x^2\sin x - 200x\cos x$

C. $y^{(100)} = 100x^2\sin x - 9900\sin x + 323400\sin x$

D. Kết quả khác.

5. Cho $y = \sin 2x$, tính dy.

Kết quả:

A. $dy = 2\cos 2x\,d(2x)$

B. $dy = \cos 2x\,d(2x)$

C. $dy = \cos 2x\,dx$

D. Kết quả khác.

6. Cho hàm số $y = \sin 2x$, $x = t^3$. Tìm d^2y theo t.

Kết quả:

A. $d^2y = -36t^4 \sin 2t^3 dt^2$

B. $d^2y = (36t^2 \sin 2t^3 + 12t\cos 2t^3)dt^2$

C. $d^2y = -36t^4 \sin 2t^3 dt^2 + 12t\cos 2t^3 dt^2$

D. Kết quả khác.

Bài 3
MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM KHẢ VI

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1) Trình bày được các định lý, công thức Ferma, Rolle, Lagrange, Cauchy, Taylor, L'Hospital.

2) Tìm được giới hạn hàm số bằng cách dùng định lý L'Hospital.

3) Khai triển Taylor, Maclaurin được một số hàm số sơ cấp.

Nhắc lại khái niệm cực trị của hàm số:

Cho f(x) xác định trong khoảng (a, b) và $c \in (a, b)$.

– Hàm f(x) đạt cực đại tại c nếu $f(c) \geq f(c + \Delta x)$ với $\forall \Delta x$ có $|\Delta x|$ đủ bé.

– Hàm f(x) đạt cực tiểu tại c nếu $f(c) \leq f(c + \Delta x)$ với $\forall \Delta x$ có $|\Delta x|$ đủ bé.

Các giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số có được trong một khoảng được gọi chung là *cực trị* của hàm trong khoảng đó.

1. ĐỊNH LÝ FERMA

Cho hàm f(x) xác định trong (a, b), f(x) đạt cực trị tại $c \in (a, b)$. Nếu tồn tại $f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Giả sử f(x) đạt cực đại tại $c \in (a, b)$ thì với $\forall \Delta x$ có $|\Delta x|$ đủ bé ta có:

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0.$$

– Nếu $\Delta x > 0$ thì $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$.

Vì $\exists f'(c)$ nên $\exists f'(c + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$.

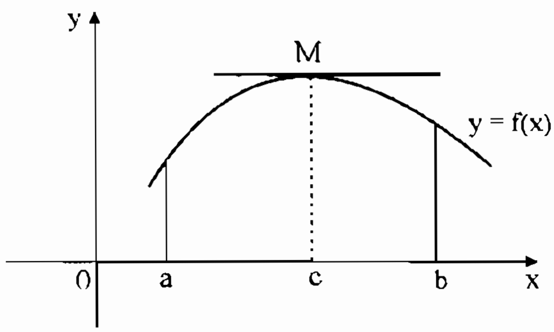
– Nếu $\Delta x < 0$ thì $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$.

Vì $\exists f'(c)$ nên $\exists f'(c-0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$.

Vậy: $f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0) = 0$.

Trường hợp f(x) đạt cực tiểu tại $c \in (a, b)$ được chứng minh tương tự.

Minh hoạ hình học: Tại điểm M(c, f(c)) hàm f(x) đạt cực đại (hay cực tiểu), có tiếp tuyến duy nhất với đường cong thì tiếp tuyến song song với trục Ox.



Hình 2.12

Suy ra, để tìm những điểm cực trị của f(x) trên (a, b) ta chỉ cần hướng về những điểm thuộc (a, b) mà tại đó f(x) không tồn tại đạo hàm hoặc có đạo hàm bằng 0.

2. ĐỊNH LÝ ROLLE

Cho hàm f(x) xác định, liên tục trên [a, b]; có đạo hàm trên (a, b) và có f(a) = f(b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Vì f(x) liên tục trên [a, b] nên ít nhất một lần nó đạt giá trị lớn nhất, ít nhất một lần nó đạt giá trị nhỏ nhất trên [a, b].

Gọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ theo thứ tự là điểm mà tại đó hàm f(x) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

– Nếu x_1, x_2 đều trùng với hai đầu mút a và b thì $f(x_1) = f(x_2) = f(a) = f(b)$, suy ra f(x) là hằng số trên [a, b], tức là có vô số điểm c cần tìm.

– Nếu có ít nhất một điểm trong số hai điểm x_1, x_2 thuộc vào (a, b), chẳng hạn $x_1 \in (a, b)$, f(x) đạt cực đại tại x_1. Theo định lý Ferma $f'(x_1) = 0$. Điểm c cần tìm chính là x_1.

3. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Cho f(x) xác định và liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm c ∈(a, b) sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (2.3.1)$$

Chứng minh: Xét hàm $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. F(x) thoả mãn các giả thiết của định lý Rolle, nên ∃c ∈ (a, b) để F'(c) = 0, tức là ∃c ∈ (a, b) để

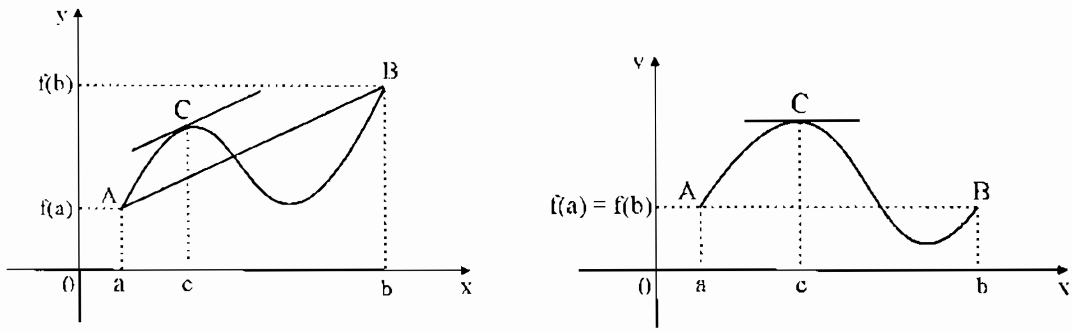
$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Nhận xét: Định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.

Minh hoạ hình học:



a) b)

Hình 2.13

Theo Lagrange, trên cung $\overset{\frown}{AB}$ (đường cong f(x) trên [a, b]) có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến với cung $\overset{\frown}{AB}$ song song với dây AB (hình 2.13a).

Nếu f(b) = f(a) thì tiếp tuyến đó song song cả với Ox (hình 2.13b). Hình 2.13b minh hoạ cho định lý Rolle.

4. ĐỊNH LÝ CAUCHY

Cho hai hàm số f(x) và g(x) cùng xác định, liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b); g'(x)≠0 với ∀x ∈ (a, b). Khi đó tồn tại c ∈ (a, b) sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2.3.2)$$

Chứng minh:

Xét hàm: $H(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$.

Ta có: $H(b) = H(a)$, $H(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b).

Theo định lý Rolle $\exists c \in (a, b)$ để $H'(c) = 0$, hay $\exists c \in (a, b)$ để:

$$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0 \tag{2.3.3}$$

Do $g'(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a, b)$ nên $g'(c) \neq 0$ và có $g(b) - g(a) \neq 0$. Vì nếu $g(a) = g(b)$ thì theo định lý Rolle, tồn tại ít nhất một giá trị $d \in (a, b)$ để $g'(d) = 0$, điều này trái với giả thiết $g'(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a, b)$.

Vậy từ (2.3.3) ta có:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ta thấy định lý Rolle là một trường hợp riêng của định lý Lagrange, định lý Lagrange lại là trường hợp riêng của định lý Cauchy.

Theo (2.3.1) ta có công thức:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Đặt $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, $b - a = \Delta x$. Vì $c \in (a, b)$ hay $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ nên có thể viết: $c = x_0 + \theta\Delta x$, trong đó θ là số, $0 < \theta < 1$. Suy ra công thức (2.3.1) được viết thành:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x \tag{*}$$

Công thức Lagrange ở dạng (*) được gọi là công thức số gia hữu hạn và có nhiều ứng dụng. Ở công thức (*) vế trái có dạng tổng, vế phải có dạng tích, nó thuận lợi cho việc giải bài toán xét dấu biểu thức $f(b) - f(a)$ hay ước lượng $|f(b) - f(a)|$,.... Bản thân (*) là công thức tính đúng với mọi $\Delta x > 0$ (dĩ nhiên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[x_0, x_0 + \Delta x]$ và khả vi trên khoảng $(x_0, x_0 + \Delta x)$). Điều này khác với công thức tính gần đúng bằng vi phân ở Bài 2: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ với $|\Delta x|$ đủ bé.

Tuy (*) là công thức tính đúng, nhưng không dùng nó để tính đúng $f(x_0 + \Delta x)$ được vì không biết cụ thể θ.

Nếu cho θ một giá trị nào đó nằm giữa 0 và 1, chẳng hạn $\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \ldots$ thì (*) trở thành công thức gần đúng được áp dụng với Δx đủ bé.

Một dạng khác của (*) là:

$$f'(x_0 + \theta\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};\ 0 < \theta < 1 \tag{**}$$

Công thức số gia hữu hạn Lagrange (*) hay (**) cho biết: Nếu f(x) liên tục trên đoạn $[x_0, x_0 + \Delta x]$ và khả vi trên $(x_0, x_0 + \Delta x)$ thì tồn tại ít nhất một điểm trong khoảng $(x_0, x_0 + \Delta x)$ để đạo hàm của f(x) tại đó bằng tốc độ biến thiên trung bình của f(x) trong quãng biến đổi của đối số từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$. Người ta gọi nhóm các định lý Lagrange, Cauchy, Rolle là các định lý về giá trị trung bình. Nội dung cụm từ "giá trị trung bình" ở đây là giá trị trung bình của đạo hàm của hàm f(x). Trong chương 3 chúng ta có khái niệm giá trị trung bình của hàm f(x) trên đoạn [a, b] là

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

5. ĐỊNH LÝ TAYLOR (công thức Taylor)

5.1. Định lý

Nếu hàm f(x) xác định, liên tục trên [a, b], có đạo hàm tới cấp (n + 1) trên (a, b) thì f(x) viết được dưới dạng:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots \ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.3.4)$$

trong đó: $x_0 \in (a, b)$; $x \in [a, b]$; c là một điểm nằm giữa x_0 và x.

Công thức (2.3.4) được gọi là *khai triển Taylor* bậc n của hàm f(x) tại x_0.

Chứng minh:

Sử dụng giả thiết về f(x) và lấy x_0 bất kỳ thuộc (a, b) ta tìm được đa thức $P_n(x)$ có bậc không lớn hơn n thoả mãn:

$$P_n(x_0) = f(x_0);\ P'_n(x_0) = f'(x_0); \ldots;\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Thật vậy, đặt đa thức cần tìm $P_n(x)$ có dạng:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n$$

với $A_0, A_1, \ldots, A_n$ là các hệ số cần tìm.

Đạo hàm các cấp (từ cấp 1 đến cấp n) ta được:

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 3.2.A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

...

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \ldots 1.A_n = n!A_n.$$

Thay $x = x_0$ vào các đẳng thức trên ta có:

$$P_n(x_0) = A_0$$

$$P'_n(x_0) = 1!A_1$$

$$P''_n(x_0) = 2!A_2$$

...

$$P_n^{(n)}(x_0) = n!A_n.$$

Rõ ràng đa thức cần tìm $P_n(x)$ là đa thức có dạng như đã nêu với:

$$A_0 = f(x_0);\ A_1 = \frac{f'(x_0)}{1!};\ A_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ \dots;\ A_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Đa thức $P_n(x)$ cần tìm là:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \dots\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Đặt $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, ta sẽ tìm được dạng của $R_n(x)$.

Vì $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ nên có:

$$R_n(x_0) = 0,\ R'_n(x_0) = 0,\ R''_n(x_0) = 0,\ \dots,\ R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Đặt $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$, ta có:

$$G(x_0) = 0,\ G'(x_0) = 0,\ G''(x_0) = 0,\ \dots,\ G^{(n)}(x_0) = 0.$$

Với x bất kỳ thuộc $[a, b]$ và với $x_0 \in (a, b)$ ta thấy hàm $R_n(x)$ và $G(x)$ thoả mãn các giả thiết của định lý Cauchy trên $[x_0, x]$ hay $[x, x_0]$. Cụ thể là chúng cũng liên tục trên $[x_0, x]$ hay $[x, x_0]$ và cũng khả vi trên (x_0, x) hay (x, x_0).

$G'(t) \neq 0$ với $\forall t \in (x_0, x)$ hay (x, x_0). Như vậy, theo định lý Cauchy $\exists \xi_1 \in (x_0, x)$ hay (x, x_0) để:

$$\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \Leftrightarrow \frac{R_n(x)}{G(x)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

Hàm $R'_n(x)$, $G'(x)$ cũng thoả mãn giả thiết của định lý Cauchy trên $[x_0, \xi_1]$ hay $[\xi_1, x_0]$. Suy ra $\exists \xi_2$ nằm giữa x_0 và ξ_1 để:

$$\frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{G'(\xi_1) - G'(x_0)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \Leftrightarrow \frac{R'_n(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{G''(\xi_2)}$$

...

Đến lần thứ (n + 1), áp dụng định lý Cauchy, suy ra ∃c nằm giữa x_0 và ξ_n để:

$$\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{R_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$$

Như vậy, $\exists c \in (x_0, x)$ hay $c \in (x, x_0)$ để:

$$\frac{R_n(x)}{G(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$$

$$R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}G(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

trong đó c là một số nào đó nằm giữa x_0 và x.

Cuối cùng: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, tức là:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

trong đó: $x \in [a, b]$; $x_0 \in (a, b)$; c là điểm nằm giữa x_0 và x.

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; $R_n(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $(x-x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

$R_n(x)$ được gọi là *phần dư* bậc n của f(x).

Có thể viết:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Định lý được chứng minh.

Lưu ý và nhận xét:

– Áp dụng công thức khai triển Taylor bậc n của f(x) tại $x_0 = 0$ ta được:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

trong đó c là số nằm giữa 0 và x.

Hay:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad ; 0 < \theta < 1 \ (2.3.5)$$

Gọi $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ là phần dư bậc n của f(x), khi $x \to 0$ thì $R_n(x)$ là vô cùng bé cấp cao hơn x^n, tức là: $R_n(x) = O(x^n)$.

Khai triển này được gọi là *khai triển Maclaurin* bậc n của f(x).

– Định lý Taylor là sự mở rộng của định lý Lagrange. Với n = 0 thì khai triển Taylor chính là công thức số gia hữu hạn:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),\ c \text{ là điểm trong của } (x_0, x).$$

– Nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$; $x_0 \in (a, b)$; $|\Delta x|$ đủ nhỏ để $(x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ thì khai triển Taylor bậc n của f(x) tại x_0 có dạng:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1};\ 0 < \theta < 1.$$

Từ đây ta có thể tính gần đúng giá trị của f tại lân cận của x_0 khi biết các đạo hàm tới cấp n của f tại x_0 như sau:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n$$

Khi đó sai số mắc phải là:

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1}\left|f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)\right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1} M_{n+1}$$

trong đó: $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$, $\forall x \in (a, b)$.

Cũng có thể nói, từ khai triển Taylor bậc n của f(x) tại x_0 ta có thể xấp xỉ hàm f(x) bởi đa thức $P_n(x)$ như sau:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Khi này sai số mắc phải là:

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} M_{n+1},$$

ở đây M_{n+1} là số dương sao cho $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$ với $\forall x \in (a, b)$.

Các xấp xỉ trên càng chính xác nếu x khá gần x_0 và n (cấp khả vi của f(x)) càng lớn.

5.2. Một số ví dụ về khai triển Taylor

Ví dụ 1: Khai triển hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ theo (x – 1) đến số hạng bậc 5, tìm phần dư R_5.

Giải:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{10}{27}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{8}{3} x^{-\frac{11}{3}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{80}{81}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{11}{3} x^{-\frac{14}{3}} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = \frac{880}{243}$$

$$f^{(6)}(x) = -\frac{880\times 14}{3^6} x^{-\frac{17}{3}}.$$

Vậy

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9\times 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\times 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81\times 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243\times 5!}(x-1)^5 + R_5$$

và $R_5 = \dfrac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\dfrac{12320}{729\times 6!}\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6$; $x \in \mathbb{R}$, ξ nằm giữa 1 và x.

Ví dụ 2: Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = (1 + x)^m$, m nguyên dương.

Giải:

Dễ dàng thấy rằng f(x) xác định và liên tục với mọi x, khả vi mọi cấp.

$f(0) = 1$; $f'(0) = m$; $f''(0) = m(m - 1)$; ...

$f^{(k)}(0) = m(m - 1) \ldots (m - k + 1)$, với $k < m$

$f^{(m)}(0) = m!$

$f^{(m+1)}(0) = 0$.

Vậy, với mọi x thì:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots + \frac{m!}{m!}x^m + R_m(x)$$

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\theta x)}{(m+1)!}x^{m+1} = 0$$

Hay với mọi x, ta có:

$$(1+x)^m = C_m^0 x^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^k x^k + \dots + C_m^m x^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$$

(trùng với khai triển nhị thức Newton)

Suy ra:

$$(1-x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k x^k \text{ với mọi x.}$$

Ví dụ 3: Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = e^x$.

Giải:

Hàm e^x thoả mãn điều kiện định lý Taylor trên mọi đoạn [a, b]; $(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = 1$ với mọi n.

Vậy, với mọi x thì:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};\ 0 < \theta < 1$$

$$\text{hay} \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x);\ R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};\ 0 < \theta < 1$$

Áp dụng tìm giá trị của e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \approx 2,71827$$

Sai số mắc phải $|R_8| = \left|\frac{e^0}{9!}\right| \le \frac{e}{9!} = 0,000008267.$

Ví dụ 4: Khai triển Maclaurin hàm f(x) = sinx.

Giải:

f(x) = sinx xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm mọi cấp, suy ra có khai triển Taylor của sinx tại mọi x. Nói riêng là khai triển Maclaurin:

$$f(x) \quad = \sin x \qquad\qquad \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) \quad = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) \quad = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = \sin\left(x + 3\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin\left(x + 4\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

Vậy: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ \dots\ + (-1)^{n-1}\,\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{\dfrac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!}\,x^{2n}}_{O(x^{2n})}$

với $\forall x \in \mathbb{R}$; $0 < \theta < 1$.

Áp dụng tính gần đúng $\sin\dfrac{\pi}{9}$:

$$\sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^3}{3!} \approx 0{,}343.$$

Sai số mắc phải trong tính gần đúng nói trên là:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin(\theta x + 2\pi)}{4!}\,x^4\right| \le \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \approx 0{,}0006.$$

Ví dụ 5: Khai triển Maclaurin hàm f(x) = cosx.

Giải: Tương tự như ví dụ 4 ta có:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots\ + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{\frac{\cos\left(\theta x + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}}_{O(x^{2n+1})}$$

với: $x \in \mathbb{R}$; $0 < \theta < 1$.

Ví dụ 6: Khai triển Maclaurin hàm f(x) = ln(1 + x).

Giải: $D_f = \{x : x > -1\}$

Có $\qquad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = -1;\ f^{(3)}(0) = 2!;\ \dots$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Vậy:

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_n(x),$$

hay: $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n(x),$$

trong đó: $R_n(x) = \underbrace{\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}}_{O(x^n)}$ với $x > -1$, $0 < \theta < 1$.

Nhờ khai triển này, dễ dàng thấy lại $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Thật vậy, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x + O(x)}{x} = 1$.

Áp dụng tính gần đúng:

$$\ln(1{,}5) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0{,}40104.$$

Sai số của phép tính là:

$$\delta = \left|\frac{1}{5}\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{(1+\theta\times 0{,}5)^5}\right| \le \frac{1}{160} \approx 0{,}0063.$$

Suy ra:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}$$

với $x < 1$; $0 < \theta < 1$.

6. ĐỊNH LÝ L'HOSPITAL

Các định lý L'Hospital (còn gọi là quy tắc L'Hospital) sau đây rất thuận lợi cho việc khử dạng vô định trong việc xét giới hạn của hàm số.

6.1. Định lý L'Hospital 1

Nếu trong lân cận của điểm x_0 hai hàm $f(x)$, $g(x)$ khả vi và $g'(x) \neq 0$; khi $x \to x_0$ thì $f(x) \to 0$ và $g(x) \to 0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ *(a hữu hạn) thì*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Chứng minh:

Vì f(x), g(x) khả vi trong lân cận của x_0 nên chúng cũng liên tục trong lân cận của x_0.

Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ nên x_0 hoặc là điểm liên tục của f(x) và g(x); hoặc x_0 nếu là điểm gián đoạn của f(x), g(x) thì cũng là điểm gián đoạn bỏ được, nghĩa là tính liên tục được khắc phục ở x_0.

Với x thuộc lân cận của x_0 thì f(x), g(x) thoả mãn định lý Cauchy trên $[x, x_0]$ hay trên $[x_0, x]$, tức là tồn tại c nằm giữa x_0 và x để:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Khi $x \to x_0$ thì cũng có $c \to x_0$. Vậy:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$$

Nhận xét:

– Trường hợp $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ định lý L'Hospital 1 vẫn đúng.

Thật vậy, khi đó có $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ và trong lân cận của x_0 thì $f'(x) \neq 0$.

Áp dụng định lý vừa chứng minh có:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

– Trường hợp $x \to \infty$ vẫn áp dụng được định lý L'Hospital 1.

Thật vậy, đổi biến $x = \dfrac{1}{t}$ hay $t = \dfrac{1}{x}$, ta được:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) =: p(t) \quad ; \quad g(x) = g\left(\frac{1}{t}\right) =: q(t)$$

và có: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{p(t)}{q(t)}$

Ta thấy p(t) và q(t) thoả mãn định lý L'Hospital trong lân cận của điểm t = 0. Do đó:

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(t)}{q(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{p'(t)}{q'(t)}$$

Vậy : $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{p'(t)}{q'(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{p'(t)*t'_x}{q'(t)*t'_x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6.2. Định lý L'Hospital 2

Nếu trong lân cận của điểm x_0 các hàm f(x), g(x) khả vi và $g'(x) \neq 0$; khi $x \to x_0$ thì $f(x) \to \infty$ và $g(x) \to \infty$; $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ (hữu hạn) thì

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Nhận xét: Định lý này cũng áp dụng được cho trường hợp $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ và cả trường hợp $x \to \infty$.

Như vậy, định lý L'Hospital 1 và 2 cho phép ta thay việc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ bằng việc tìm giới hạn của thương các đạo hàm $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (nếu các điều kiện của định lý được thoả mãn).

6.3. Một số ví dụ áp dụng quy tắc L'Hospital

Ví dụ 1: Tìm $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$ (dạng $0.\infty$)

Giải:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \left(-\frac{1}{\alpha}\right).0 = 0$$

Vậy: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$; $\alpha > 0$.

Ví dụ 2: Tìm $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (dạng 0^0).

Giải: Gọi $A = \lim_{x\to 0^+} x^x \Rightarrow \ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} (\ln x^x) = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

$$\Rightarrow A = 1.$$

Vậy, $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

Ví dụ 3: Tìm $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$ (dạng ∞^0).

Giải:

$$A = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$$

$$\ln A = \ln\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim_{x\to0^+}\left(tgx\ \ln\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+}(-tgx\ln x) = -\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot gx}$$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = 0\times1 = 0$$

Vậy, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx} = 1.$

Ví dụ 4: Tìm $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$ (dạng 1^∞)

Giải:

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to1}\left[1+(1-x)\right]^{\frac{1}{1-x}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\cot g\frac{\pi x}{2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}} = e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

Ví dụ 5: Tìm $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$).

Giải: Áp dụng khai triển Maclaurin, ta có:

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + O(x^4),\ \ x(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)$$

nên $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^4)}{\frac{1}{2}x^3 + O(x^4)} = -\frac{1}{3}.$$

Một cách giải khác (dùng quy tắc L'Hospital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1 + x\sin x - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} + x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1 + x\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}} = \frac{-1}{1 + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}} = -\frac{1}{3}$$

Chú ý:

Định lý L'Hospital 1 và L'Hospital 2 chỉ là điều kiện đủ mà không phải là điều kiện cần để tồn tại $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$, tức là:

Nếu tồn tại $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì tồn tại $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nhưng không tồn tại $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì chưa kết luận gì về $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$.

Chẳng hạn, tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}$.

Nếu áp dụng định lý L'Hospital ta tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2}$, giới hạn này không tồn tại. Tuy vậy, không thể cho là giới hạn đang tìm không tồn tại. Xét giới hạn này bằng cách khác:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Có thể áp dụng liên tiếp quy tắc L'Hospital, chẳng hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x} - 3}{10\sin 5x\cos 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x} = \frac{9}{50}.$$

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Cho $0 < b < a$, so sánh các giá trị: $\ln\frac{a}{b}, \frac{a-b}{a}, \frac{a-b}{b}$.

   Kết quả:

A. $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{b} < \ln\frac{a}{b}$

B. $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

C. $\ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{b}$

D. Kết quả khác

2. Khai triển Maclaurin đến bậc 3 hàm số a^x; a > 0, a ≠ 1.

Kết quả:

A. $a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \frac{(a+\theta x)^4(\ln a)^4 x^4}{4!}$; $0 < \theta < 1; x \in \mathbb{R}$

B. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{\ln a^2}{2!}x^2 + \frac{\ln a^3}{3!}x^3 + R_3(x)$

trong đó: $R_3(x) = \frac{\theta x \ln a^4}{4!}x^4$; với $0 < \theta < 1; x \in \mathbb{R}$

C. $a^x = 1 + x\ln a + x^2\frac{\ln^2 a}{2} + x^3\frac{\ln^3 a}{6} + \frac{x^4 a^{\theta x}\ln^4 a}{24}$; $0 < \theta < 1; x \in \mathbb{R}$

D. Kết quả khác.

3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Bằng khai triển Taylor, hãy tìm kết luận đúng.

Kết quả:

A. $f(x) = (x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 7$

B. $f(x) = (x-2)^3 - 8(x-2)^2 + 7(x-2) + 11$

C. $f(x) = (x+1)^3 - 5(x+1)^2 + 10(x+1) - 1$

D. Kết quả khác.

4. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

Kết quả:

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. 0

D. Kết quả khác.

5. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Kết quả:

A. 1

B. 0

C. –1

D. Kết quả khác.

Bài 4

HÀM HAI BIẾN
PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được khái niệm hàm hai biến, đạo hàm riêng, tìm được cực trị của hàm hai biến.

2. Trình bày được định nghĩa, công thức, ý nghĩa của hệ số tương quan.

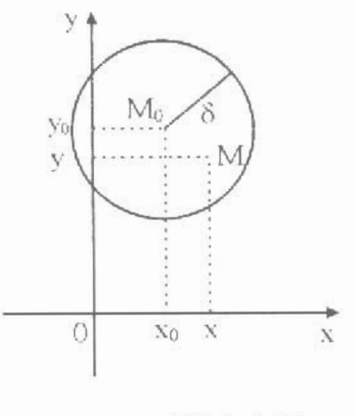
3. Tìm được hàm thực nghiệm $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$.

1. HÀM HAI BIẾN

1.1. Một số khái niệm, định nghĩa

Không gian $\mathbb{R}$ = {tập các số thực x}.

Không gian $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R}^2$ là tập hợp các cặp số thực có thứ tự. Nếu xem mỗi phần tử của $\mathbb{R}^2$ là toạ độ của một điểm M(x, y) thì $\mathbb{R}^2$ là tập các điểm trong mặt phẳng đã được ấn định một hệ toạ độ vuông góc Oxy.



Hình 2.14

Một cách tương tự:

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$;

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\}$.

Lân cận δ của $M_0(x_0, y_0)$ là tập hợp tất cả các điểm M(x, y) trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $0 < M_0M < \delta$ (hình 2.14).

Cho $G \subset \mathbb{R}^2$, $G \neq \varnothing$, một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử $(x, y) \in G$ với một số thực $z \in \mathbb{R}$ là một *hàm hai biến* với tập xác định G.

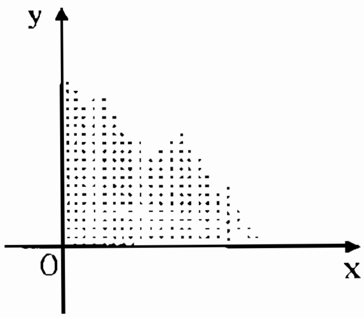
Ký hiệu: $(x, y) \in G$, $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ hay $z = f(x, y)$; $D_f = G$.

(x, y) là biến độc lập, z là biến phụ thuộc.

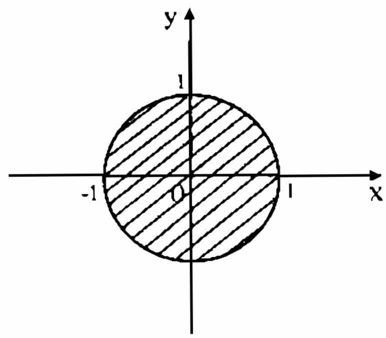
Tập $F = \{z : z = f(x, y), (x, y) \in G\}$ là tập giá trị của hàm.

Khi giới thiệu hàm $z = f(x, y)$, nếu chỉ có biểu thức giải tích mà không nói gì hơn thì ta hiểu (x, y) là biến độc lập và tập xác định của hàm số là những điểm (x, y) sao cho f(x, y) có nghĩa.

Ví dụ: Hàm $z = x^2 + y^2$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ có tập xác định là góc phần tư thứ nhất kể cả bờ trong mặt phẳng Oxy (hình 2.15).



Hình 2.15



Hình 2.16

Hàm $z = x^2 + y^2$ là hàm có tập xác định là cả mặt phẳng Oxy.

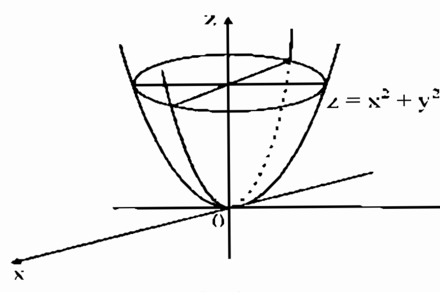
Hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có D_z là hình tròn tâm O(0, 0), bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy (hình 2.16).

Trong $\mathbb{R}^3$, đồ thị của hàm $z = f(x, y)$, $D_f = G$ là tập các điểm

$$P(x, y, z = f(x, y)) \text{ với } (x, y) \in G.$$

Nhìn chung đồ thị hàm hai biến $z = f(x, y)$ là mặt cong trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Hàm $z = x^2 + y^2$ có đồ thị là mặt parabol tròn xoay (hình 2.17).



Hình 2.17

Tương tự, ta có định nghĩa hàm n biến:

Cho $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \varnothing$, một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ với một số thực $z \in \mathbb{R}$ là một hàm n biến với tập xác định G. Ký hiệu:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ D_f = G.$$

Trong $\mathbb{R}^2$, cặp (x, y) là toạ độ của điểm M(x, y) nên hàm z = f(x, y) được gọi là hàm điểm z = f(M). Hàm u = f(x, y, z) là hàm điểm u = f(M); $M \in D_f \subset \mathbb{R}^3$,...

Tương tự như hàm một biến y = f(x), hàm hai biến z = f(x, y) cũng có khái niệm về giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân, tích phân, cực trị... Ở đây ta chỉ trình bày sơ lược về đạo hàm và cực trị.

1.2. Đạo hàm riêng của hàm hai biến

1.2.1. Định nghĩa

Cho hàm z = f(x, y) xác định tại $M_0(x_0, y_0)$ và lân cận của $M_0(x_0, y_0)$. Cố định $y = y_0$ ta được hàm $z = f(x, y_0)$ là hàm một biến (biến x).

Nếu hàm này có đạo hàm theo x tại x_0 thì ta nói đạo hàm ấy là *đạo hàm riêng* của z theo x tại (x_0, y_0) và ký hiệu là:

$$z'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \text{một số hữu hạn.}$$

Suy ra, nếu z = f(x, y) có đạo hàm riêng theo x tại mọi điểm $(x, y) \in G$ thì $z'_x(x, y)$ là một hàm hai biến (x, y) trên miền đó.

Để tìm $z'_x(x, y)$ ta xem y là một hằng số, x là biến độc lập.

Tương tự, cho z = f(x, y) thì đạo hàm riêng theo y tại (x_0, y_0) là một số xác định, ký hiệu là:

$$z'_y(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \text{một số hữu hạn}$$

và $z'_y(x, y)$ cũng là hàm hai biến (x, y). Khi tìm z'_y ta xem x là hằng số.

1.2.2. Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Cho z = f(x, y), z'_x (hay z'_y) phản ánh tốc độ biến thiên của hàm z = f(x, y) theo biến x (hay theo biến y) khi biến kia không đổi.

Ví dụ:

a) $z = \text{arctg}\,\dfrac{x}{y} \Rightarrow \quad z'_x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

$$z'_y = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

b) $z = \sin xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y\cos xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = 1.$$

1.2.3. Đạo hàm riêng cấp 2

Cho z = f(x, y); z'_x, z'_y là những đạo hàm riêng, đó là đạo hàm riêng cấp 1, chúng là những hàm của (x, y) và có thể có đạo hàm riêng. Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 là đạo hàm riêng cấp 2. Tuỳ theo thứ tự lấy đạo hàm riêng theo x hay theo y ta có 4 dạng đạo hàm riêng cấp 2 sau đây:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = f''_{xx} \quad \text{(đạo hàm vuông theo x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = f''_{yy} \quad \text{(đạo hàm vuông theo y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \quad \text{(đạo hàm chữ nhật)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \quad \text{(đạo hàm chữ nhật)}$$

Sau đây là định lý về điều kiện để đạo hàm riêng của hàm hai biến không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm riêng theo từng biến.

Định lý Svac (Schwartz): *Nếu trong một lân cận nào đó của điểm* (x_0, y_0) *hàm* $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm chữ nhật* $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ *và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại* (x_0, y_0) *thì* $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Ví dụ: Cho $z = 2x^3y^2 + y^5$.

Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y + 5y^4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 4x^3 + 20y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^2y.$$

1.3. Cực trị của hàm hai biến

1.3.1. Định nghĩa

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ và lân cận của M_0. $f(x, y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ với mọi (x, y) thuộc lân cận của M_0. Điểm $M_0(x_0, y_0)$ gọi là *điểm cực đại*, $f(x_0, y_0)$ là *giá trị cực đại* tại M_0.

$f(x, y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ với mọi (x, y) thuộc lân cận của M_0. Điểm $M_0(x_0, y_0)$ gọi là *điểm cực tiểu*, $f(x_0, y_0)$ là *giá trị cực tiểu* tại M_0.

Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu được gọi chung là *cực trị*.

Tương tự định lý Ferma ở hàm một biến ta có:

1.3.2. Định lý

Nếu $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, tại đó tồn tại các đạo hàm riêng (hữu hạn) $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ thì các đạo hàm riêng ấy bằng 0:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \; ; \; f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Để tìm $M_0(x_0, y_0)$ mà tại đó hàm $z = f(x, y)$ đạt cực trị, ta hướng vào các điểm mà ta gọi là *điểm tới hạn* bao gồm:

– Các điểm tại đó các đạo hàm riêng đều bằng 0.

– Các điểm tại đó không tồn tại ít nhất một đạo hàm riêng.

Sau đây là một định lý (hay một quy tắc) giúp ta tìm điểm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$.

1.3.3. Định lý

Xét hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tới cấp 2 trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Tại $M_0(x_0, y_0)$ có $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Gọi: $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Bảng sau đây cho ta biết hàm $f(x, y)$ có đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ hay không.

$B^2 - AC$	A	Kết luận tại $M_0(x_0, y_0)$
–	–	Cực đại
	+	Cực tiểu
+		Không có cực trị
0		Điểm nghi ngờ, cần xét thêm

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

Ta thấy $D_z = \mathbb{R}^2$, tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ đều tồn tại z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, chúng đều là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$:

$$z'_x = 2(x-1),\ z'_y = 4y,\ z''_{xx} = 2,\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yy} = 4.$$

Tìm điểm tới hạn:

Xét hệ: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ chỉ có một điểm tới hạn $M_0(1, 0)$.

Như vậy:

$$A = z''_{xx}(1, 0) = 2,\ B = z''_{xy}(1, 0) = 0,\ C = z''_{yy}(1, 0) = 4.$$

Có: $B^2 - AC = -8$ và $A = 2 > 0$, suy ra z chỉ đạt cực trị tại một điểm $M_0(1, 0)$ và $Z_{\text{cực tiểu}} = Z(1, 0) = 0$.

Có thể thấy, $z = (x-1)^2 + 2y^2 \geq 0$ với $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow z_{\text{cực tiểu}} = 0$ đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Tập xác định là $\mathbb{R}^2$. Tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ đều có:

$$z'_x = 3x^2 - 3y,\ z'_y = 3y^2 - 3x,\ z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = -3,\ z''_{yy} = 6y.$$

Chúng là những hàm xác định, liên tục với mọi (x, y).

Điểm tới hạn:

Xét hệ: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Suy ra hai điểm $M_1(1, 1)$ và $M_2(0, 0)$ là những điểm tới hạn.

– Xét tại $M_1(1, 1)$:

$$A = z''_{xx}(1, 1) = 6,\ B = z''_{xy}(1, 1) = -3,\ C = z''_{yy}(1, 1) = 6.$$

Có: $B^2 - AC = 9 - 36 < 0$ và $A = 6 > 0$, suy ra z đạt cực tiểu tại $M_1(1, 1)$ và $Z_{\text{cực tiểu}} = Z(1,1) = -1$.

– Xét tại $M_2(0, 0)$ có: $B^2 - AC = (-3)^2 - 0.0 = 9 > 0$, suy ra z không đạt cực trị tại $M_2(0, 0)$.

2. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

2.1. Hệ số tương quan tuyến tính của hai đại lượng

Ở lý thuyết xác suất thống kê đã có định nghĩa hệ số tương quan tuyến tính của hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y, đó là một số được ký hiệu là R_{xy} và:

$$R_{xy} = \frac{M[(X - MX)(Y - MY)]}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}; \; DX > 0, \; DY > 0$$

trong đó: MX, MY là kỳ vọng toán (trung bình lý thuyết) của X, Y;

DX, DY là phương sai của X, Y;

$M[(X - MX)(Y - MY)]$ là hiệp phương sai của X và Y.

Dễ thấy $R_{xy} = R_{yx}$, vì vậy nếu không sợ lẫn với một điều gì khác, có thể viết gọn lại là R.

Ta công nhận một số kết luận sau đây về R_{xy}: $-1 \leq R_{xy} \leq 1$.

– Nếu hai đại lượng X, Y có sự phụ thuộc tuyến tính với nhau thật sự, tức là $Y = aX + b$ hay $X = a'Y + b'$, trong đó a, b hay a', b' là những hằng số thì $R_{xy} = \pm 1$. Ngược lại, nếu $|R_{xy}| = 1$ thì $P(Y = aX + b) = 1$ hay $P(X = a'Y + b') = 1$.

$|R_{xy}|$ càng gần 1 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y càng mạnh hay càng chặt, khi đó nếu $R_{xy} > 0$ thì sự phụ thuộc giữa chúng là đồng biến, nếu $R_{xy} < 0$ thì sự phụ thuộc giữa chúng là nghịch biến.

$|R_{xy}|$ càng gần 0 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y càng yếu hay càng lỏng lẻo.

$R_{xy} = 0$, ta nói X, Y không phụ thuộc tuyến tính hay X, Y không tương quan với nhau.

Có thể nói hệ số tương quan tuyến tính R_{xy} là số đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa hai đại lượng X, Y (R_{xy} còn được gọi là *hệ số tương quan*).

– Nếu X, Y là hai đại lượng độc lập với nhau thì $R_{xy} = 0$. Như vậy, hai đại lượng độc lập thì không tương quan, điều ngược lại không đúng.

Tuy hệ số tương quan R_{xy} mang lại một số thông tin về hai đại lượng X, Y. Nhưng tìm được R_{xy} là việc rất khó. Một cách gần đúng, người ta ước lượng R_{xy} bởi hệ số tương quan mẫu thực nghiệm r_{xy} (nói tắt là hệ số tương quan mẫu r_{xy}), tức là xem $R_{xy} \approx r_{xy}$.

2.2. Hệ số tương quan mẫu thực nghiệm (hệ số tương quan mẫu)

Định nghĩa: Xét hệ hai đại lượng biến thiên phụ thuộc nhau (X, Y). Gọi giá trị của X là x, giá trị của Y là y. Ta dùng chữ (x, y) vừa chỉ tên vừa chỉ giá trị của hệ (X, Y).

Nhờ quan sát đo đạc thí nghiệm, từ hệ (x, y) ta thu được n cặp giá trị tương ứng (x_i, y_i); i = 1, 2,..., n.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n

(M)

Người ta gọi đây là mẫu thực nghiệm kích thước n có được từ hệ hai đại lượng (x, y).

Hệ số tương quan mẫu của mẫu (M) được ký hiệu là r_{xy} và được xác định như sau:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \times \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \quad (2.4.1)$$

trong đó: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Hay $$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \times \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \times \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}} \quad (2.4.2)$$

trong đó: $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Hay $$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \quad (2.4.3)$$

Các công thức (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) là tương đương.

Thật vậy:

– Giả sử r_{xy} viết ở dạng (2.4.1):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-\overline{x}y_i-\overline{y}x_i+\overline{x}\,\overline{y})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i - \overline{y}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} - 2\overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\overline{x}x_i+\overline{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 > 0$$

(vì hiện tượng $x_1 = x_2 = ... = x_n$ xem như không xảy ra).

Tương tự: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$.

Vậy (2.4.1) $\Leftrightarrow$ (2.4.2).

– Giả sử r_{xy} viết ở dạng (2.4.2):

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \times \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

Suy ra:
$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

Vậy (2.4.2) $\Leftrightarrow$ (2.4.3).

Tính chất:

1) $r_{xy} = r_{yx}$, vì vậy có thể viết gọn lại là r.

2) Đổi biến:

Nếu đặt: $u_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x} \Leftrightarrow x_i = x_0 + \Delta x.u_i$;

$v_i = \frac{y_i - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow y_i = y_0 + \Delta y.v_i$

trong đó: x_0, y_0 tuỳ ý; Δx tuỳ ý khác 0, Δy tuỳ ý khác 0, thì:

$$r_{xy} = \pm\frac{\overline{uv} - \overline{u}\times\overline{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} \times \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}} = \pm r_{uv}.$$

Trường hợp Δx, Δy cùng dấu thì:

$$r_{xy} = \frac{\overline{uv} - \overline{u} \times \overline{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} \times \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}} = r_{uv}.$$

Chứng minh:

Đặt: $x_i = x_0 + \Delta x.u_i \Rightarrow \overline{x} = x_0 + \Delta x\overline{u}$;

$y_i = y_0 + \Delta y.v_i \Rightarrow \overline{y} = y_0 + \Delta y\overline{v}$.

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0 + \Delta xu_i)(y_0 + \Delta yv_i) = x_0y_0 + x_0\Delta y\overline{v} + y_0\Delta x\overline{u} + \Delta x\Delta y\overline{uv}$$

$$\overline{x} \times \overline{y} = \left(x_0 + \Delta x\overline{u}\right)\left(y_0 + \Delta y\overline{v}\right) = x_0y_0 + x_0\Delta y\overline{v} + y_0\Delta x\overline{u} + \Delta x\Delta y\overline{u}\,\overline{v}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y} = \Delta x\Delta y\left(\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}\right).$$

Tương tự có: $\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \Delta_x^2[\overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2]$; $\quad \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2 = \Delta_y^2[\overline{v^2} - \left(\overline{v}\right)^2]$

Vậy:

$$r_{xy} = \frac{\Delta x\ \Delta y}{|\Delta x\ \Delta y|}\,\frac{\overline{uv} - \overline{u} \times \overline{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} \times \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}} = \pm\frac{\overline{uv} - \overline{u} \times \overline{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} \times \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}} = \pm r_{uv}.$$

Nếu $\Delta x.\Delta y > 0$ thì

$$r_{xy} = \frac{\overline{uv} - \overline{u} \times \overline{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} \times \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}} = r_{uv}$$

Như vậy, nhờ việc đổi biến đã nêu ở trên với cách chọn x_0, y_0, Δx, Δy thích hợp sẽ đưa việc tìm r_{xy} với x_i, y_i về việc tìm r_{uv} với u_i, v_i là các số liệu có nhiều số nguyên và giá trị tuyệt đối nhỏ.

3) $|r_{xy}| \le 1$ hay $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Chứng minh:

$$|r_{xy}| \le 1 \Leftrightarrow r_{xy}^2 \le 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)\right)^2}{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2\right)} \le 1.$$

Bất đẳng thức này đúng theo Bunhiacopxki.

$r_{xy} = \pm 1$ khi và chỉ khi:

$$\frac{y_1 - \bar{y}}{x_1 - \bar{x}} = \frac{y_2 - \bar{y}}{x_2 - \bar{x}} = \ldots = \frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}} = \ldots = \frac{y_n - \bar{y}}{x_n - \bar{x}} = a \text{, a hằng số khác 0.}$$

Tức là: $$r_{xy} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}} = a, \ \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow y_i = ax_i + \bar{y} - a\bar{x}.$$

Hay $r_{xy} = \pm 1$ khi và chỉ khi hai dãy số liệu x_i, y_i có sự phụ thuộc tuyến tính.

Bây giờ ta giả sử y_i, x_i có sự phụ thuộc tuyến tính, chẳng hạn:

$y_i = ax_i + b$, khi đó $y_i - \bar{y} = a(x_i - \bar{x})$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\frac{a^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

$$= \frac{\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\frac{|a|}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{a}{|a|} = \pm 1.$$

Vậy: $r_{xy} = 1$ khi và chỉ khi x_i, y_i có sự phụ thuộc tuyến tính dạng:

$$y_i = ax_i + b, \ a > 0.$$

$r_{xy} = -1$ khi và chỉ khi x_i, y_i có sự phụ thuộc tuyến tính dạng

$$y_i = ax_i + b, \ a < 0.$$

Như vậy, có thể dùng r_{xy} để đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa hai dãy số liệu x_i, y_i của mẫu. Từ đó có thể đánh giá (hay suy ra) sự phụ thuộc tuyến tính giữa hai đại lượng x và y.

– Nếu $|r_{xy}|$ càng gần 1 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa x_i, y_i càng mạnh. Khi đó, nếu $r_{xy} > 0$ thì sự phụ thuộc giữa x_i, y_i là đồng biến (hay x_i, y_i có tương quan thuận); nếu $r_{xy} < 0$ thì sự phụ thuộc giữa x_i, y_i là nghịch biến (hay x_i, y_i có tương quan nghịch). Đặc biệt như đã biết, nếu $|r_{xy}| = 1$ thì thật sự x_i, y_i có sự phụ thuộc tuyến tính hay tương quan tuyến tính.

– Nếu $|r_{xy}|$ càng gần 0 thì mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa x_i, y_i càng yếu.

Trường hợp $r_{xy} = 0$ ta nói x_i, y_i không có sự phụ thuộc tuyến tính, hay không tương quan.

Người ta thường quy ước:

$0 \le |r| < 0,3$: Xem như x và y không có sự phụ thuộc tuyến tính;

$0,3 \le |r| < 0,6$: Xem như x và y có sự phụ thuộc tuyến tính;

$0,6 \le |r| \le 1$: Xem như x và y có sự phụ thuộc tuyến tính chặt chẽ.

2.3. Bài toán tìm đường thẳng y = ax + b hay phương trình y = ax + b

2.3.1. Đặt vấn đề

Nhờ quan sát thí nghiệm hệ hai đại lượng (x, y) ta có được mẫu thực nghiệm:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n

hay có được n cặp số liệu (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$, từ hệ hai đại lượng (x, y).

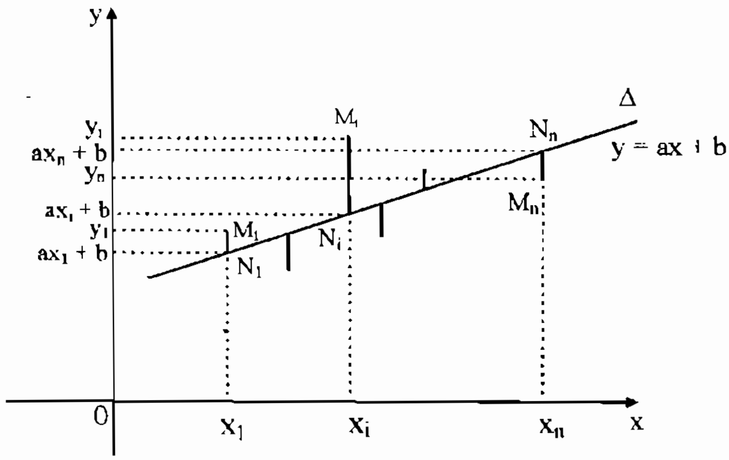
Tính hệ số tương quan mẫu r. Giả sử có $|r|$ gần 1. Khi đó ta có thể cho là có sự phụ thuộc tuyến tính khá chặt chẽ giữa hai đại lượng x, y. Và dựa vào n cặp số liệu (x_i, y_i) đã cho có thể biểu thị gần đúng một trong hai đại lượng bằng một biểu thức bậc nhất của đại lượng kia. Chẳng hạn, ở đây sẽ xấp xỉ: $y \approx ax + b$, trong đó a, b là hai số cần tìm sao cho tổng:

$$|(ax_1 + b) - y_1| + |(ax_2 + b) - y_2| + \ . \ . \ . \ + |(ax_i + b) - y_i| + \ . \ . \ . \ + |(ax_n + b) - y_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |(ax_i + b) - y_i| \text{ là bé nhất.}$$

Bài toán được minh hoạ hình học như sau:

Trên mặt phẳng Oxy, vẽ các điểm $M_i(x_i, y_i)$. Cần tìm hai số a, b hay đường Δ có phương trình y = ax + b để tổng khoảng cách $\sum_{i=1}^{n} M_iN_i$ là nhỏ nhất, trong đó $N_i(x_i, ax_i + b)$, $i = \overline{1,n}$.



Hình 2.18

Giải:

Ta cần tìm a, b để $\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, muốn vậy ta tìm a, b để $\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|^2$ nhỏ nhất, hay là tìm a, b để hàm

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Đây là bài toán tìm điểm cực tiểu (a, b) của hàm hai biến

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2,$$

trong đó: x_i, y_i là các số đã biết.

f(a, b) xác định và có đạo hàm riêng liên tục tại mọi điểm $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i).$$

Xét hệ: $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

Hệ có $\det(A) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 0$ (theo Bunhiacopski), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, nhưng điều này xem như không xảy ra trong thực tế.

Vậy $\det(A) > 0$.

Hệ phương trình (2.4.4) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} =: a_0 \\[2ex] b = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} =: b_0 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Điểm $M_0(a_0, b_0)$ là điểm tới hạn duy nhất của hàm $f(a, b)$.

Tại mọi điểm trong $\mathbb{R}^2$, hàm $f(a, b)$ còn có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Nói riêng, trong lân cận của $M_0(a_0, b_0)$, ta có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}; \dfrac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}; \dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2}$ liên tục.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2n.$$

Dễ dàng tìm được:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(M_0) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2; \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}(M_0) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(M_0) = 2n.$$

Ta có: $A > 0$ và

$$B^2 - AC = 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -4\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = -4\det(A) < 0.$$

Vậy $M_0(a_0, b_0)$ là điểm cực tiểu của hàm $f(a, b)$. Hai số a, b cần tìm chính là $a = a_0$, $b = b_0$ trong công thức (2.4.5).

Đại lượng y được biểu thị gần đúng: $y \approx a_0 x + b_0$, với (a_0, b_0) xác định bởi (2.4.5).

Phương pháp giải quyết vấn đề đặt ra vừa trình bày được gọi là *phương pháp bình phương bé nhất.*

2.3.3. *Một số lưu ý*

Trong công thức (2.4.5) ở biểu thức tính a, ta chia cả tử và mẫu cho n^2, được:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \times \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}$$

trong đó: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

Từ đây suy ra a và hệ số tương quan mẫu r cùng dấu và giải thích được nếu r > 0 thì sự phụ thuộc giữa hai dãy số liệu x_i, y_i là đồng biến. Mở rộng ra cho sự phụ thuộc giữa hai đại lượng x và y là đồng biến. Trường hợp r < 0 thì ta cũng có suy luận tương tự.

Chia cả hai vế của phương trình thứ hai ở hệ (2.4.4) cho n ta được: $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Như vậy a và b cần tìm trong bài toán tìm đường thẳng y = ax + b đã nêu ở trên được viết ở dạng gọn hơn là:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \times \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2};\ b = \overline{y} - a\overline{x} \qquad (2.4.6)$$

trong đó: $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{xy}$ được tính theo (*).

Công thức (2.4.6) giúp ta tìm a và b nhanh hơn công thức (2.4.5). Tuy nhiên, nếu từ mẫu thực nghiệm (x_i, y_i) cho trước có thể đổi biến được thì việc tìm a và b thuận lợi hơn nữa.

Đặt: $u_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x} \Leftrightarrow x_i = x_0 + \Delta x u_i$; $v_i = \frac{y_i - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow y_i = y_0 + \Delta y v_i$

trong đó: x_0, y_0, $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ là tuỳ chọn.

Thì:
$$a = \frac{\overline{uv} - \overline{u} \times \overline{v}}{\overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2}\,\frac{\Delta y}{\Delta x};\ b = \overline{y} - a\overline{x} \qquad (2.4.7)$$

trong đó: $\overline{x} = x_0 + \Delta x.\overline{u}$; $\overline{y} = y_0 + \Delta y.\overline{v}$ và $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u}^2$, $\overline{uv}$ được tính theo các u_i, v_i đã biết.

Bạn đọc tự chứng minh (2.4.7).

Dựa vào mẫu thực nghiệm (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$, có từ hệ hai đại lượng (x, y) bao giờ ta cũng tìm được a và b để $\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$ bé nhất. Nhưng chỉ nên dùng xấp xỉ $y \approx ax + b$ khi biết $\left|R_{xy}\right| \approx 1$ hoặc $\left|r_{xy}\right| \approx 1$.

Với a và b vừa tìm được từ bài toán đặt ra, đại lượng y được tính gần đúng theo hàm bậc nhất của đại lượng x bởi phương trình y = ax + b. Tuy nhiên, chỉ được áp dụng phương trình này với những x thuộc khoảng rộng hơn khoảng ($\min x_i$, $\max x_i$) chút ít cả về hai phía.

Ví dụ 1: Theo dõi sự phụ thuộc giữa chiều cao X (cm) và cân nặng Y (kg) của 20 học sinh nữ 9 tuổi có kết quả sau:

x_i (cm)	115	112	103	117	115	112	117	130	114	115	126	113
y_i (kg)	16	19	14	21	17	17	20	25	19	19	23	20
m_i	1	1	2	1	1	2	2	1	3	3	1	2

Có m_i cặp (x_i, y_i), $i = \overline{1,12}$, $n = \sum_{i=1}^{12} m_i = 20$.

a) Tìm hệ số tương quan mẫu r_{xy}.

b) Tìm phương trình y = ax + b sao cho $\sum_{i=1}^{20}(ax_i + b - y_i)^2$ nhỏ nhất.

Giải: Ta có bảng:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i x_i^2$	$m_i y_i^2$	$m_i x_i y_i$
1	115	16	1	115	16	13225	256	1840
2	112	19	1	112	19	12544	361	2128
3	103	14	2	206	28	21218	392	2884
4	117	21	1	117	21	13689	441	2457
5	115	17	1	115	17	13225	289	1955
6	112	17	2	224	34	25088	578	3808
7	117	20	2	234	40	27378	800	4680
8	130	25	1	130	25	16900	625	3250
9	114	19	3	342	57	38988	1083	6498
10	115	19	3	345	57	39675	1083	6555
11	126	23	1	126	23	15876	529	2898
12	113	20	2	226	40	25538	800	4520
$\sum_{i=1}^{12}$			20	2292	377	263344	7237	43473
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{12} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{12}$				114,6	18,85	13167,2	361,85	2173,65

a) Ta có: $r = \dfrac{2173,65 - 114,6 \times 18,85}{\sqrt{13167,2 - (114,6)^2} \times \sqrt{361,85 - (18,85)^2}} = 0,901635 \approx 0,902.$

b) Vì có $|r|$ khá gần 1 nên có thể xấp xỉ $y \approx ax + b$ thoả mãn điều kiện đầu bài, với

$$a = \frac{2173,65 - 114,6 \times 18,85}{13167,2 - (114,6)^2} = 0,394829612 \approx 0,395;$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = -26,39747356 \approx -26,3975.$$

Đường thẳng hay phương trình cần tìm là: $y = 0,3950x - 26,3975$.

Ví dụ 2: Quan sát lượng sữa được vắt ra ở mỗi lần của 8 bà mẹ một cách ngẫu nhiên ta có bảng số liệu sau:

Tuổi x	21	24	27	30	33	36	39	42
Lượng sữa y (ml)	105	110	105	90	95	90	85	80

a) Tính hệ số tương quan r giữa x và y.

b) Tìm phương trình $y = ax + b$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{8}(ax_i + b - y_i)^2$ nhỏ nhất.

Giải:

Đặt: $u_i = \dfrac{x_i - 30}{3} \Leftrightarrow x_i = 30 + 3u_i$; $v_i = \dfrac{y_i - 90}{5} \Leftrightarrow y_i = 90 + 5v_i$.

Ta có bảng:

i	x_i	y_i	u_i	v_i	u_i^2	v_i^2	u_iv_i
1	21	105	– 3	3	9	9	–9
2	24	110	– 2	4	4	16	–8
3	27	105	– 1	3	1	9	–3
4	30	90	0	0	0	0	0
5	33	95	1	1	1	1	1
6	36	90	2	0	4	0	0
7	39	85	3	–1	9	1	–3
8	42	80	4	–2	16	4	–8
$\sum$			4	8	44	40	–30
$\frac{1}{n}\sum = \frac{1}{8}\sum$			0,5	1	5,5	5	–3,75

a) $r_{xy} = \dfrac{-3,75 - 0,5\,.\,1}{\sqrt{5,5-(0,5)^2}\,.\,\sqrt{5-1^2}} = -0,927.$

b) Vì $|r| \approx 1$ nên có thể tìm phương trình y = ax + b thoả mãn điều kiện đầu bài.

Có: $\overline{x} = 30 + 3\overline{u} = 30 + 3.0,5 = 31,5;\ \overline{y} = 90 + 5\overline{v} = 90 + 5.1 = 95.$

Vậy: $a = \dfrac{-3,75 - 0,5\,.\,1}{5,5-(0,5)^2}\,.\,\dfrac{5}{3} = -1,35;\ \ b = 95 + 31,5.1,35 = 137,53.$

Phương trình cần tìm là : y = −1,35x + 137,53.

2.4. Bài toán tìm phương trình (hay đường cong) $y = ax^2 + bx + c$

Bài toán:

Nhờ quan sát hệ hai đại lượng (x, y) ta có n cặp số liệu (x_i, y_i), tức là có mẫu thực nghiệm:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n

Tìm a, b, c hay tìm phương trình $y = ax^2 + bx + c$ sao cho

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \text{ bé nhất.}$$

Giải: Xét hàm $f(a, b, c) = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$, hàm này có các đạo hàm riêng f'_a, f'_b, f'_c tại mọi điểm (a, b, c) và:

$$f'_a = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2; \qquad f'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i;$$

$$f'_c = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i).$$

Xét hệ:

$$\begin{cases} f'_a = 0 \\ f'_b = 0 \\ f'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)b + nc = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Nếu hệ có nghiệm duy nhất (a_0, b_0, c_0) thì nghiệm này là toạ độ của điểm tới hạn duy nhất của hàm f. Dựa vào một số điều kiện khác nữa, người ta chứng minh được (a_0, b_0, c_0) là điểm cực tiểu của hàm f(a, b, c).

Do đó (a_0, b_0, c_0) chính là giá trị cần tìm của (a, b, c).

Ví dụ 1: Cho hai dãy số liệu:

x	1	2	3	4	(x_i)
y	− 2	0	4	10	(y_i)

Lập hàm bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bé nhất.

Giải: (a, b, c) cần tìm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^4\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^3\right) b + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) c = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^3\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) c = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) b + 4c = \sum_{i=1}^{4} y_i \end{cases} \qquad (*)$$

Lập bảng:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	1	− 2	1	1	1	− 2	− 2
2	2	0	4	8	16	0	0
3	3	4	9	27	81	12	36
4	4	10	16	64	256	40	160
Σ	10	12	30	100	354	50	194

Hệ (*) có: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 & 194 \\ 100 & 30 & 10 & 50 \\ 30 & 10 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3{,}54 & 1 & 0{,}3 & 1{,}94 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}12 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 3{,}54 & 1 & 0{,}3 & 1{,}94 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & -0{,}062 & -0{,}054 & 0{,}17 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}03 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,1 & 0,5\\ 0 & -6,2 & -5,4 & 17\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,1 & 0,5\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -6,2 & -5,4 & 17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,1 & 0,5\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 8 & -16\end{pmatrix}$$

(*) có nghiệm: $\begin{cases}a = 1\\ b = -1\\ c = -2\end{cases}$

Kết quả phương trình cần tìm là: $y = x^2 - x - 2$.

Ví dụ 2: Cho 5 cặp số liệu (x_i, y_i) có được từ hệ hai đại lượng (x, y):

x_i	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y_i	– 0,8	– 0,97	– 0,98	1,07	3,66

Lập phương trình: $y = ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện: $\sum_{i=1}^{5}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bé nhất.

Giải: Tìm (a, b, c) để $f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{5}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bé nhất. Suy ra (a, b, c) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i^4\right)a + \left(\sum_{i=1}^{5}x_i^3\right)b + \left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2\right)c = \sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i\\ \left(\sum_{i=1}^{5}x_i^3\right)a + \left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2\right)b + \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)c = \sum_{i=1}^{5}x_iy_i\\ \left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)b + 5c = \sum_{i=1}^{5}y_i\end{cases} \qquad (*)$$

Tính:

$\sum_{i=1}^{5}x_i = 8,14;$ $\sum_{i=1}^{5}x_i^2 = 18,26;$ $\sum_{i=1}^{5}x_i^3 = 48,33;$ $\sum_{i=1}^{5}x_i^4 = 137,44$

$\sum_{i=1}^{5}y_i = 1,98;$ $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i = 11,797;$ $\sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i = 40,71.$

Thay vào (*) và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 137,44a + 48,33b + 18,26c = 40,71 \\ 48,33a + 18,26b + 8,14c = 11,797 \\ 18,26a + 8,14b + 5c = 1,98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 0,98687 \\ b \approx -1,95383 \\ c \approx -0,02721 \end{cases}$$

Có thể lấy: $y = x^2 - 2x$.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Cho hàm số $u = y.f(x^2 - y^2)$, f là hàm khả vi. Tìm $\frac{1}{x}u'_x + \frac{1}{y}u'_y$.

Kết quả:

A. $\frac{1}{x}u'_x + \frac{1}{y}u'_y = \frac{u}{y^2}$

B. $\frac{1}{x}u'_x + \frac{1}{y}u'_y = \frac{2u}{y^2}$

C. $\frac{1}{x}u'_x + \frac{1}{y}u'_y = \frac{-2u}{y^2}$

D. Kết quả khác.

2. Cho $x = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$, với f, g tuỳ ý có đạo hàm cấp 2.

Tìm: $E = x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + x\,z'_x - y\,z'_y$.

Kết quả:

A. $E = \frac{4x}{y}g'$

B. $E = x^2\,y\,f'' + \frac{x^2}{y}g'' - x\,y^2 f'' - x\,g'' + \frac{2x}{y}g'$

C. $E = 0$

D. Kết quả khác.

3. Tìm cực trị của hàm số: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Kết quả:

A. $z_{\text{cực đại}} = Z(0, 0) = 0$, $z_{\text{cực tiểu}} = Z(1, 1) = -1$

B. $z_{\text{cực tiểu}} = Z(1, 1) = -1$

C. $z_{\text{cực đại}} = Z(0, 0) = 0$

D. Kết quả khác.

4. Có 5 cặp số liệu quan sát được (x_i, y_i), $i = \overline{1, 5}$ từ hệ hai đại lượng (x, y):

(1; 1,25), (1,5; 1,4), (3; 1,5), (4,5; 1,75), (5; 2,25).

Tìm hệ số tương quan r?

Kết quả:

A. $r = 0{,}716$ B. $r = 0{,}912$

C. $r = 0{,}804$ D. Kết quả khác

5. Có 5 cặp số liệu quan sát được (x_i, y_i), $i = \overline{1, 5}$ từ hệ hai đại lượng (x, y):

(1; 1,25), (1,5; 1,4), (3; 1,5), (4,5; 1,75), (5; 2,25).

Tìm phương trình $y = ax + b$ thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{5}(ax_i + b - y_i)^2$ bé nhất.

Kết quả:

A. $y = 0{,}202x + 1{,}024$ B. $y = 0{,}451x + 1{,}882$

C. $y = 0{,}602x + 4{,}065$ D. Kết quả khác

Chương III
TÍCH PHÂN

Bài 1
TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa tích phân bất định, các tính chất của tích phân bất định.

2. Áp dụng được các phương pháp tính tích phân bất định: phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần để tính được tích phân.

3. Tính được tích phân của phân thức hữu tỷ, hàm lượng giác và hàm vô tỷ.

1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Trong chương trước chúng ta đã biết rằng, nếu một hàm số f(x) khả vi trong khoảng (a, b) thì có đạo hàm trong (a, b) và có thể tính được đạo hàm $f'(x)$ của nó. Bây giờ ta xét bài toán ngược lại, nếu cho trước một hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b), hỏi có tồn tại hay không một hàm số F(x) khả vi trong khoảng (a, b) và có đạo hàm $F'(x) = f(x)$?

1.1. Định nghĩa nguyên hàm

Hàm số F(x) được gọi là *nguyên hàm* của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) nếu với $\forall x \in (a, b)$ ta có: $F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)dx$.

Nếu thay cho khoảng (a, b) là đoạn [a, b] thì ta phải có thêm:

$$F'(a + 0) = f(a) \text{ và } F'(b - 0) = f(b).$$

Ví dụ:

1) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 5$ là nguyên hàm của $f(x) = 4x^2 - x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

2) $G(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ là nguyên hàm của $g(x) = 4x^2 - x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

3) $H(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ là nguyên hàm của $h(x) = \sin 2x$ trên $\mathbb{R}$.

4) $R(x) = \text{tg}x$ là nguyên hàm của $r(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1.2. Định lý

Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b). Khi đó với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng đó.

Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) đều có thể viết dưới dạng F(x) + C, với C là một hằng số.

Nói khác đi: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) trên khoảng (a, b) thì $\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$ là họ các nguyên hàm hay là tất cả các nguyên hàm của f(x) (Bạn đọc tự chứng minh hoặc tham khảo chứng minh định lý).

1.3. Định nghĩa tích phân bất định

Tích phân bất định của hàm f(x) xác định trên khoảng (a, b) là họ tất cả các nguyên hàm của nó trên (a, b) và được ký hiệu là $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

trong đó: F(x) là một nguyên hàm của f(x) hay $F'(x) = f(x)$;

C là một hằng số tuỳ ý.

Ký hiệu: $\int$: dấu tích phân;

x : biến lấy tích phân;

f(x) : hàm số dưới dấu tích phân;

f(x)dx : biểu thức dưới dấu tích phân.

Trở lại các ví dụ trên ta có:

$$\int(4x^2 - x + 1)dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C;$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$$

1.4. Tính chất của tích phân bất định

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3) $\int df(x) = f(x) + C$

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0)$

5) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6) $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$

Một vấn đề đặt ra là những hàm nào có nguyên hàm?

1.5. Định lý về sự tồn tại của nguyên hàm

Mọi hàm số f(x) liên tục trên [a, b] đều có nguyên hàm hay tích phân bất định trên đoạn đó.

Từ đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản ta suy ra các tích phân, gọi là tích phân cơ bản.

Bảng tích phân cơ bản

1) $\int 0dx = C$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x + C$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Ví dụ 1: $\int(2x^5 - 3x^2 + x + 3)dx = 2\int x^5dx - 3\int x^2dx + \int xdx + 3\int dx$

$$= \frac{1}{3}x^6 - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + C.$$

Ví dụ 2: $\int\left(\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int\cos x\,dx - \int\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$$= \sin x + \cot gx + C.$$

Ví dụ 3: $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int x^{-3/2}dx + \int x^{-2}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$

Muốn tính tích phân bất định của một hàm số f(x), ta so sánh tích phân cần tính với các tích phân cơ bản để thực hiện các phép biến đổi thích hợp, sau đó đưa tích phân cần tính đó về dạng tích phân cơ bản rồi áp dụng công thức.

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

2.1. Phương pháp đổi biến số

Trong nhiều trường hợp, khi tính $\int f(x)dx$ nếu để biến tích phân là x thì không thấy ngay được tích phân cần tính đó gắn với dạng tích phân cơ bản nào, nhưng nếu thực hiện một số phép đổi biến thích hợp ta có thể đưa nó về dạng tích phân cơ bản.

2.1.1. Đổi biến số dạng 1: x = φ (t)

Trong một số trường hợp, thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t)$, ta được:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int g(t)dt$$

ở đây biểu thức $\int g(t)dt$ có dạng của các tích phân cơ bản.

Ví dụ: Tính $I = \int\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Giải: Vì muốn khử căn bậc hai ta thực hiện phép đổi biến x = asint.

Ta thấy: $-a \le x \le a$ nên $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t;\ dx = a\cos t dt;\ t = \arcsin\frac{x}{a}.$$

$$I = a^2\int\cos^2 tdt = a^2\int\frac{1 + \cos 2t}{2}dt = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C.$$

Ta có: $\frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t\; a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$.

Vậy $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

2.12. Đổi biến số dạng 2: $t = \Psi(x)$

Ta có thể thực hiện phép đổi biến $t = \Psi(x)$ thì $dt = \Psi'(x)dx$ và khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\int f(x)dx = \int g(\Psi(x))\,\Psi'(x)dx = \int g(t)dt$$

ở đây biểu thức $\int g(t)dt$ có dạng của các tích phân cơ bản đã biết.

Ví dụ 1: Tính $I = \int(2x+3)^{100}dx$.

Giải: Đặt $t = 2x + 3$; $dt = 2dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int t^{100}dt = \frac{t^{101}}{202} + C = \frac{(2x+3)^{101}}{202} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int(x^2-5)^3xdx$.

Giải: Đặt $t = x^2 - 5$; $dt = 2xdx$.

$$I = \frac{1}{2}\int t^3dt = \frac{t^4}{8} + C = \frac{(x^2-5)^4}{8} + C.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Giải: Đặt $t = \ln x$; $dt = \frac{dx}{x}$.

$$I = \int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int\frac{1}{a^2+x^2}dx$.

Giải: Ta có:

$$I = \int\frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}dx = \frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được tích phân:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \text{ từ } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4} dx$.

Giải: Đặt t = cosx; dt = – sinxdx.

$$I = -\int \frac{1}{t^2 + 4} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

2.2. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u = f(x) và v = g(x) là hai hàm số khả vi và có đạo hàm $u' = f'(x)$; $v' = g'(x)$ là hai hàm số liên tục. Khi đó, theo quy tắc lấy vi phân của tích ta có: d(uv) = vdu + udv hay udv = d(uv) – vdu. Vì nguyên hàm của d(uv) là uv nên ta suy ra:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Quy tắc lấy tích phân từng phần này chuyển việc lấy tích phân của biểu thức $udv = uv'dx$ về tích phân của $vdu = vu'dx$ mà ở đó tích phân của vdu dễ tìm hơn.

Những dạng tích phân sau đây thường dùng quy tắc lấy tích phân từng phần:

$$\int x^k \ln^m x dx,\ \int x^k \sin bx dx,\ \int x^k \cos bx dx,\ \int x^k e^{ax} dx,\ \ldots$$

Ví dụ 1: Tính $I = \int x^2 \ln x dx$.

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

Do đó:

$$I = \int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int x \sin 2x dx$.

Giải: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

Do đó:

$$I = \int x \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int x^2 e^x dx$.

Giải: Tất nhiên ở đây, có thể đặt

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx.$$

Đặt tiếp: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Ta có:

$$I_1 = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$

Vậy $\quad I = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

Ở ví dụ này ta có thể viết:

$$I = \int x^2 e^x dx = e^x(ax^2 + bx + c) + C.$$

Suy ra:

$$x^2 e^x \equiv \left[e^x(ax^2 + bx + c) + C\right]' \equiv e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b)$$
$$\equiv e^x\left[ax^2 + (2a+b)x + (b+c)\right]$$

Dùng cách cân bằng hệ số, suy ra:

$a = 1;\ b = -2;\ c = 2$

Vậy $\quad I = \int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

3. TÍCH PHÂN CÁC PHÂN THỨC HỮU TỶ

3.1. Tích phân phân thức đơn giản

1) $\int \frac{A}{x-a}dx$;

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$, $k \geq 2$, nguyên;

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$;

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$, $k \geq 2$, nguyên

trong đó: A, M, N, a, p, q là các số thực, $p^2 - 4q < 0$.

Nói cách khác là tam thức $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực và luôn dương với mọi x.

Xét từng dạng tích phân trên ta có:

- $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C \qquad (3.1.1)$$

- $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + C,\ k \geq 2,\ \text{nguyên} \qquad (3.1.2)$$

- $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{M}{2}p}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{M}{2}p\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (3.1.3)$$

- $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N-\frac{M}{2}p\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1} + \left(N-\frac{M}{2}p\right)\underbrace{\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}}_{(*)}$$

Đặt: $t = x+\frac{p}{2}$ và $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$ tích phân (*) có dạng:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\,2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{k-1} + \frac{1}{2a^2(k-1)}\int td(t^2+a^2)^{1-k}.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần với:

$$u = t \Rightarrow du = dt; \quad dv = d\left[(t^2+a^2)^{1-k}\right] \Rightarrow v = (t^2+a^2)^{1-k}$$

$$\int td(t^2+a^2)^{1-k} = t(t^2+a^2)^{1-k} - \int (t^2+a^2)^{1-k}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - I_{k-1}$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} + \frac{1}{2a^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - I_{k-1}\right]$$

$$I_k = \frac{1}{2a^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + (2k-3)I_{k-1}\right]$$

hoặc $$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

trong đó $I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}$.

Công thức tính I_k (3.1.4) được gọi là *công thức truy hồi*. Sở dĩ gọi là công thức truy hồi vì áp dụng công thức này tính I_k, ta lại đưa về tính I_{k-1} (thấp hơn 1 bậc), tính I_{k-1} qua I_{k-2}, ... Do đó sau (k − 1) lần liên tiếp dùng công thức (3.1.4) sẽ đi tới tích phân quen thuộc I_1 sau:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C. \tag{3.1.5}$$

Để trở về biến x, trong kết quả ta thay $t = x + \frac{p}{2}$.

Như vậy, ta đã tính được tích phân của các phân thức đơn giản.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{1}{5-x} dx.$

Giải: Ta có:

$$\int \frac{1}{5-x} dx = -\ln|5-x| + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

Giải: Ta có:

$$I = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{3x+1}{x^2+x+2} dx.$

Giải: Ta có:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{6x+2}{x^2+x+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+2) - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2}$.

Giải: Áp dụng công thức (3.1.4) ta được:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2(2-1)}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{2-1}} + (2\times 2 - 3)I_1\right]$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a}\right] + C$$

$$= \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\text{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int \frac{2x+6}{(x^2+2x+10)^3}dx$.

Giải: Ta có:

$$I = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^3}dx + 4\int \frac{1}{(x^2+2x+10)^3}dx$$

$$= \int (x^2+2x+10)^{-3}\, d\,(x^2+2x+10) + 4\int \frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2+9\right]^3} = \frac{(x^2+2x+10)^{-2}}{-2} + 4I^*$$

Đặt: $x + 1 = t$

$$I^* = \int \frac{dt}{(t^2+3^2)^3} = I_3.$$

Theo công thức (3.1.4) ta có:

$$I_3 = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_2$$

Ở đây $a = 3$, $k = 3$ ta có:

$$I_3 = \frac{t}{2\times 3^2\times 2(t^2+3^2)^2} + \frac{1}{3^2}\times\frac{6-3}{6-2}\times I_2$$

$$\text{mà } I_2 = \frac{t}{2\times 3^2(t^2+3^2)} + \frac{1}{2\times 3^3}\text{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{t}{18(t^2+9)} + \frac{1}{54}\text{arctg}\frac{t}{3} + C$$

$$\text{Vậy: } I_3 = \frac{t}{36(t^2+9)^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{t}{18(t^2+9)} + \frac{1}{54}\text{arctg}\frac{t}{3}\right] + C$$

$$= \frac{t}{36(t^2+9)^2} + \frac{t}{216(t^2+9)} + \frac{1}{648}\text{arctg}\frac{t}{3} + C$$

$$= \frac{x+1}{36(x^2+2x+10)^2} + \frac{x+1}{216(x^2+2x+10)} + \frac{1}{648}\text{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

Tóm lại:

$$I=\frac{-1}{2(x^2+2x+10)^2}+\frac{x+1}{9(x^2+2x+10)^2}+\frac{x+1}{54(x^2+2x+10)}+\frac{1}{162}\text{arctg}\frac{x+1}{3}+C$$

$$=\frac{2x-7}{18(x^2+2x+10)^2}+\frac{x+1}{54(x^2+2x+10)}+\frac{1}{162}\text{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

3.2. Tích phân các phân thức hữu tỷ

3.2.1. Phân thức thực sự và phân thức đơn giản

Xét phân thức hữu tỷ:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}{a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n} \text{ với } a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ và } a_n, b_m \neq 0.$$

– Nếu $m < n$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ được gọi là phân thức thực sự.

– Nếu $m \geq n$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ gọi là phân thức không thực sự.

Nếu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức không thực sự thì bằng cách chia tử cho mẫu bao giờ ta cũng có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức thực sự.

Việc lấy tích phân phân thức hữu tỷ sẽ được quy về việc lấy tích phân bốn dạng phân thức đơn giản đã xét ở trên nhờ định lý sau.

3.2.2. Định lý

Mọi đa thức bậc n, với hệ số thực $Q(x) = a_0 + a_1x +\ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích thành tích các thừa số là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực, trong đó có thể có những thừa số trùng nhau:

$$Q(x)=a_n(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\mu\ldots(x^2+lx+s)^\upsilon$$

$$\text{với } \begin{cases} a, b, \ldots, p, q, l, s \in \mathbb{R} \\ p^2-4q<0, \ldots, l^2-4s<0 \\ \alpha+\beta+\ldots+2(\mu+\ldots+\upsilon)=n \end{cases}$$

Khi đó phân thức thực sự tương ứng $\frac{P(x)}{Q(x)}$ có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} +$$

$$+ \ldots + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} +$$

$$+ \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\upsilon}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\upsilon-1}} + \ldots + \frac{P_{\upsilon-1}x+Q_{\upsilon-1}}{x^2+lx+s}$$

trong đó: $A, A_1, \ldots, P_{\upsilon-1}, Q_{\upsilon-1}$ là các hằng số được xác định theo phương pháp hệ số bất định mà chúng ta sẽ giới thiệu qua các ví dụ dưới đây.

3.2.3. Một số ví dụ về tích phân các phân thức hữu tỷ

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2+1} dx$.

Giải: Ta có:

$$I = \int\left(x^2 + 2x + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + \text{arctg}x + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Giải:

$$I = \int \frac{dx}{x^2(x^3-1)} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Phân tích $\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$ thành tổng các phân thức đơn giản:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Quy đồng mẫu thức ta được:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (B+C+D)x^4 + (A+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 - Bx - A.$$

Đồng nhất hệ số các đơn thức đồng dạng ở hai vế ta có hệ 5 phương trình 5 ẩn:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C - E = 0 \\ A + C - D + E = 0 \\ B + C + D = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là: $A = -1, B = 0, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{3}, E = \frac{1}{3}$.

Ta đã phân tích hàm dưới dấu tích phân thành tổng của các phân thức đơn giản

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{x-1}{x^2 + x + 1}$$

Vậy:

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$= x^{-1} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx.$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{x^2 - 2x + 9}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.

Giải: Phân tích $\frac{x^2 - 2x + 9}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Ta có:

$$\frac{x^2 - 2x + 9}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định để tính các hệ số A, B, C trong phân tích trên như đã làm ở ví dụ 2. Tuy nhiên, khi đa thức mẫu tách ra được là tích của các đơn thức bậc nhất thì ta có thể tính A, B, C nhanh, gọn hơn theo cách sau:

Vì phân tích trên là đồng nhất thức, phân thức đó đúng với mọi giá trị của x, nên để tính hệ số A chẳng hạn, ta nhân cả hai vế với $x - 1$, được:

$$\frac{x^2 - 2x + 9}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B}{x-2}(x-1) + \frac{C}{x-3}(x-1)$$

Cho x = 1, ta có: $\dfrac{1-2\times 1+9}{(1-2)(1-3)} = A \Rightarrow A = 4.$

Tương tự, muốn tính B ta nhân cả hai vế của đồng nhất thức ban đầu với $(x-2)$, rồi cho x = 2 ta được: $B = \dfrac{2^2-2.2+9}{(2-1)(2-3)} = -9.$

Và cuối cùng $C = \dfrac{3^2-2.3+9}{(3-1)(3-2)} = 6.$

Vậy: $$\frac{x^2-2x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{9}{x-2} + \frac{6}{x-3}.$$

Nên $$I = \int \frac{x^2-2x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = 4\int\frac{dx}{x-1} - 9\int\frac{dx}{x-2} + 6\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= 4\ln|x-1| - 9\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3}dx.$

Giải: Để phân tích $\dfrac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3}$ thành tổng của các phân thức tối giản, dùng định lý trên ta có:

$$\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}.$$

Để ý rằng, trong ví dụ này nếu làm theo cách của ví dụ 3 thì chỉ tính được:

$$A = \frac{2^2+2+3}{(2+1)^3} = \frac{1}{3};\ B = \frac{(-1)^2+(-1)+3}{(-1-2)} = -1.$$

Do vậy, ta có:

$$\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+3x+9}{3(x-2)(x+1)^3} = \frac{(x+1)^3 - 3(x-2) + 3B_1(x+1)(x-2) + 3B_2(x-2)(x+1)^2}{3(x-2)(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x+9 = (1+3B_2)x^3 + (3+3B_1)x^2 - 3(B_1+3B_2)x + 7 - 6B_1 - 6B_2$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} 1+3B_2=0 \\ 3+3B_1=3 \\ -3(B_1+3B_2)=3 \\ 7-6B_1-6B_2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1=0 \\ B_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy : $\dfrac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3}=\dfrac{1}{3(x-2)}-\dfrac{1}{(x+1)^3}-\dfrac{1}{3(x+1)}$.

Nên $I=\displaystyle\int\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x+1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

Chú ý: Trong một số trường hợp đặc biệt ta có thể tìm được tích phân các phân thức thực sự bằng các phép đổi biến thích hợp.

Ví dụ 5: Tính $I=\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}$.

Giải: Đặt: $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow dx=dt$.

$$I=\int\frac{(t+1)^2dt}{t^5}=\int\frac{t^2+2t+1}{t^5}dt=\int(t^{-3}+2t^{-4}+t^{-5})dt$$

$$=-\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}+C=\frac{-6t^2-8t-3}{12t^4}+C=\frac{-6(x-1)^2-8(x-1)-3}{12(x-1)^4}+C$$

$$=-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+C.$$

Ví dụ 6: Tính $I=\displaystyle\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$.

Giải: Ta có: $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+5}=\int\frac{xdx}{(x^2+3)^2-4}$.

Đặt $t=x^2+3$, ta có $dt=2xdx$. Do đó:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C.$$

Ví dụ 7: Tính $I=\displaystyle\int\frac{1}{x^4-3x^2-4}dx$.

Giải: Để tính tích phân trên ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định để phân tích biểu thức dưới dấu tích phân thành các phân thức đơn giản.

Ta có thể biểu diễn

$$\frac{1}{x^4-3x^2-4}=\frac{1}{(x^2+1)(x^2-4)}=\frac{1}{(x^2+1)(x-2)(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}$$

rồi dùng các cách đã giới thiệu để tính A, B, C, D. Tuy nhiên, có thể dùng cách thêm bớt vào tử số để đi đến kết quả nhanh hơn:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2-4)}=\frac{(x^2+1)-(x^2-4)}{5(x^2+1)(x^2-4)}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{x+2-(x-2)}{4(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x^2+1}\right]=\frac{1}{20(x-2)}-\frac{1}{20(x+2)}-\frac{1}{5(x^2+1)}$$

Ta có: $I=\int\frac{1}{x^4-3x^2-4}dx=\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{1}{5}\mathrm{arctg}x+C.$$

4. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM LƯỢNG GIÁC

Giả sử cần tính tích phân $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$, trong đó R(u, v) là một biểu thức hữu tỷ đối với u, v (u = sinx; v = cosx).

4.1. Phương pháp chung để tính tích phân $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Phương pháp chung để tính tích phân này là đặt $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ với $-\pi<x<\pi$.

$$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}t\Rightarrow x=2\mathrm{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Đây là tích phân của một hàm hữu tỷ đối với t mà ta đã xét ở trên.

Ví dụ 1: Tính $I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

Giải: Đặt $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ với $-\pi<x<\pi$.

$$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(4\times\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}+5\right)}$$

$$I = \int \frac{2dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2}$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\text{tg}\,\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \frac{1}{2}\int \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx \quad (0 < a < 1;\ -\pi < x < \pi)$.

Giải: Thực hiện đổi biến $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, ta có:

$$I = \frac{1 - a^2}{2}\int \frac{2}{(1 + t^2)\left(1 - 2a\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + a^2\right)}\,dt = (1 - a^2)\int \frac{1}{1 + t^2 - 2a + 2at^2 + a^2 + a^2t^2}\,dt$$

$$= (1 - a^2)\int \frac{1}{(1 - a)^2 + (1 + a)^2t^2}\,dt = \frac{1 - a^2}{1 + a}\int \frac{d\left[(1 + a)t\right]}{\left[(1 + a)t\right]^2 + (1 - a)^2}$$

$$= \frac{1 - a^2}{(1 + a)(1 - a)}\,\text{arctg}\left[\frac{1 + a}{1 - a}\,t\right] + C = \text{arctg}\left(\frac{1 + a}{1 - a}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C.$$

Trong một số trường hợp đặc biệt, nếu áp dụng phương pháp chung nói trên có thể đưa đến tích phân của các hàm hữu tỷ phức tạp. Trong khi đó ta có thể đi đến kết quả nhanh hơn bằng các phép biến đổi thích hợp.

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

Giải: Ta có:

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow I = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Giải:

Ta có: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, do đó:

$$I = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\cos\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right)}{\text{tg}\,\frac{x}{2}} = \ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

4.2. Một số trường hợp đặc biệt

4.2.1. Một số trường hợp đặc biệt của R(sinx, cosx)

Trường hợp 1: Nếu R(sinx, cosx) là hàm chẵn đối với sinx và cosx,
tức là R(–sinx, –cosx) = R(sinx, cosx) thì đặt t = tgx hoặc t = cotgx.

Trường hợp 2: Nếu R(sinx, cosx) là hàm lẻ đối với cosx,
tức là R(sinx, –cosx) = –R(sinx, cosx) thì đặt t = sinx.

Trường hợp 3: Nếu R(sinx, cosx) là hàm lẻ đối với sinx,
tức là R(–sinx, cosx) = –R(sinx, cosx) thì đặt t = cosx.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn đối với sinx, cosx nên ta đặt

$$t = tgx \Rightarrow x = arctgt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Do đó

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2} + 2\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Chú ý: Tích phân trên có thể tính được đơn giản hơn nếu ta chia cả tử số và mẫu số của hàm dưới dấu tích phân cho $\cos^2x$, thật vậy:

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tg^2x + 2tgx - 1} = \int \frac{d(tgx)}{(tgx+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn đối với sinx, cosx nên ta đặt t = tgx. Ta có:

$$d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x};\ \sin^4 x = \left(\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}\right)^4 = \frac{tg^4x}{(1+tg^2x)^2}.$$

Nên: $I = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4} dt$

$$= \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^4} = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = tgx - \frac{2}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + C.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$

Vì R(sinx, –cosx) = –R(sinx, cosx) nên hàm dưới dấu tích phân là một hàm lẻ đối với cosx. Đặt t = sinx ⇒ dt = cosxdx.

$$I = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x(1+\sin^2 x)} dx = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} dt = \int \frac{2-3t^2+t^4}{t^2(1+t^2)} dt$$

$$= \int \frac{t^2(t^2+1)+2(t^2+1)-6t^2}{t^2(1+t^2)} dt = \int dt + 2\int t^{-2}dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\text{arctgt} + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\text{arctg}(\sin x) + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx.$

Giải:

$$I = \int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx.$$

Vì R(–sinx, cosx) = –R(sinx, cosx) nên hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ đối với sinx. Đặt t = cosx ⇒ dt = –sinxdx.

$$I = -\int \frac{(2-t^2)}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1-3}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\left[\int dt - 3\int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

4.2.2. Tích phân dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: m lẻ: đặt t = cosx;

n lẻ: đặt t = sinx.

Trường hợp 2: m, n chẵn và ít nhất một trong hai số đó âm thì đặt t = tgx.

Trường hợp 3: m, n chẵn và đều dương thì có thể dùng các công thức sau để biến đổi hàm dưới dấu tích phân:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Ví dụ: Tính $I = \int \sin^2 x\cos^2 x\, dx$.

$$I = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

4.2.3. Các tích phân dạng $\int \cos(ax)\cos(bx)dx;\ \int \sin(ax)\sin(bx)dx;$ $\int \sin(ax)\cos(bx)dx$

Dùng các công thức:

$$1)\ \cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]$$

$$2)\ \sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

$$3)\ \sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$

Ví dụ 1: Tính $I = \int \sin 2x\cos 5x\, dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int \left[\sin(2+5)x + \sin(2-5)x\right] dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 7x dx - \int \sin 3x dx\right]$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C = \frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int \left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]\cos\frac{x}{4}\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx + \int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right)dx + \int\left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \cos\frac{7x}{4}dx + \int \cos\frac{5x}{4}\, dx + \int \cos\frac{3x}{4}\, dx + \int \cos\frac{x}{4}\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{4}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{4}{3}\sin\frac{3x}{4} + 4\sin\frac{x}{4}\right] + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + C.$$

5. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM VÔ TỶ

Khi tính tích phân các hàm vô tỷ ta thường dùng phép đổi biến thích hợp để đưa tích phân đã cho về dạng tích phân hàm hữu tỷ, tức là "hữu tỷ hoá" tích phân đã cho. Ở đây ta chỉ xét một số dạng đơn giản.

5.1. Dạng $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx$

$R(u, v, \ldots, \omega)$ là hàm hữu tỷ của các đối số $u, v, \ldots, \omega$ và $m, n, \ldots, r, s$ là những số nguyên dương.

Đặt $x = t^k$ với k = bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $(n, \ldots, s)$.

Ví dụ: Tính $I = \int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + 1)}dx.$

Giải: Đặt $x = t^8 \Rightarrow dx = 8t^7dt.$

$$I = \int \frac{(t^2 - t)8t^7dt}{t^8(t^2+1)} = 8\int \frac{(t-1)dt}{t^2+1} = \frac{8}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 8\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 4\ln(t^2+1) - 8\text{arctg}t + C = 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) - 8\text{arctg}\sqrt[8]{x} + C.$$

5.2. Dạng $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ với $a \neq 0$; a, b, c là hằng số

Xét tam thức bậc hai dưới dấu căn, ta có:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\text{vì } a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

Đặt $u = x + \frac{b}{2a} \Rightarrow du = dx.$

a) Nếu $b^2 - 4ac \ge 0$ thì:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\ \sqrt{u^2 - \alpha^2} \qquad \text{khi } a > 0;$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}\ \sqrt{\alpha^2 - u^2} \qquad \text{khi } a < 0$$

trong đó: $\alpha^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

b) Nếu $b^2 - 4ac < 0$ thì:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\ \sqrt{u^2 + \alpha^2} \ \text{ khi } a > 0$$

trong đó: $\alpha^2 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Còn khi $a < 0$ thì tam thức bậc hai dưới căn luôn âm (biểu thức vô nghĩa). Như vậy, ta đã đưa tích phân trên về một trong ba dạng tích phân sau:

$$\int R_1(u, \sqrt{\alpha^2 + u^2})du, \text{ đặt } u = \alpha \text{tgt};$$

$$\int R_2(u, \sqrt{\alpha^2 - u^2})du, \text{ đặt } u = \alpha \sin t;$$

$$\int R_3(u, \sqrt{u^2 - \alpha^2})du, \text{ đặt } u = \frac{\alpha}{\cos t}.$$

Ví dụ 1: Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$.

Giải: Đặt $x = a\sin t;\ -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow dx = a\cos t dt$;

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a|\cos t| = a\cos t \ \text{ (vì cost} \ge 0).$$

$$I = \int \frac{a^2\cos^2 t}{a\sin t}dt = a\int \frac{(1 - \sin^2 t)}{\sin t}dt = a\int \frac{dt}{\sin t}dt - a\int \sin t dt$$

$$= a\ln\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a\cos t + C.$$

Vì $\sin t = \dfrac{x}{a}$; $\cos t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ nên

$$I = a\ln\left|\frac{a}{x} - \frac{\dfrac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{x}\right| + \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + C = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$ $(a > 0)$.

Giải: Đặt $x = a\text{tg}t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$;

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \text{tg}^2 t)} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t} \quad (\text{vì } \cos t \geq 0).$$

$$I = \int \frac{a\cos t dt}{\cos^2 t \; a\text{tg}t \; a} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cos t \; \text{tg}t}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + C$$

Ta có: $\text{tg}t = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{x}{a}$

$$\Rightarrow a^2\sin^2 t = x^2 - x^2\sin^2 t \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t = \frac{x^2}{a^2 + x^2} \Rightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2 t = 1 - \frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \Rightarrow \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Vậy $\quad I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}\right| + C.$

Ngoài ra, ta có thể dùng phương pháp đổi biến số khác để tính các tích phân vô tỷ.

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Giải: Ta thực hiện phép đổi biến Euler: $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$, lấy vi phân cả hai vế ta được:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = dt - dx \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\right)dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + \alpha} + x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}dx = dt \Rightarrow \quad t\frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = dt \quad \text{do} \quad \sqrt{x^2 + \alpha} + x = t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \frac{dt}{t}.$$

Vậy $I = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\sqrt{x^2+\alpha} + x\right| + C.$

Ví dụ 4: Tính $I = \int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Giải: Đổi biến $x - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{t+1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}$$

Vậy $$I = -\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t|t|}\sqrt{-1-2t}} = \int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}$$

Vì $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow t < 0$ nên $|t| = -t$.

Vậy $$I = -\sqrt{-1-2t} + C = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Trở lại ví dụ 2, ngoài cách đổi biến $x = a\mathrm{tg}t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, với ví dụ này ta có thể đổi biến cách khác:

Ví dụ 5: Tính $I = \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a > 0)$.

Giải: Ta có: $I = \int\frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1}}$. Đặt $\frac{a}{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a}dt.$

$$I = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{a}\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C \quad \text{(theo ví dụ 3)}$$

$$I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|t - \sqrt{t^2+1}\right| + C$$

Thay $t = \frac{a}{x}$, ta được:

$$I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2} - a}{x}\right| + C.$$

5.3. Một số tích phân dạng vô tỷ có thể dùng phương pháp đổi biến theo các hàm hypecbol

Từ đạo hàm của các hàm hypecbol đã biết ở chương II ta có:

$$\int \text{sh}x dx = \text{ch}x + C; \qquad \int \text{ch}x dx = \text{sh}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}x + C; \qquad \int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\coth x + C.$$

Trong một số trường hợp, có thể dùng phương pháp đổi biến số theo các hàm hypecbol để tính các tích phân dạng vô tỷ.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $(a > 0)$.

Giải: Đổi biến $x = a\,\text{sh}t \Rightarrow dx = a\text{ch}tdt$.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\,\text{ch}t\,dt}{a\sqrt{\text{sh}^2 t + 1}} = \int \frac{a\,\text{ch}t\,dt}{a\,\text{ch}t} = \int dt = t + C.$$

Từ $\text{sh}t = \frac{x}{a}$, ta được: $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{a} = e^t - \frac{1}{e^t} = \frac{e^{2t} - 1}{e^t}$

$$\Leftrightarrow \; ae^{2t} - 2xe^t - a = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

Vì $e^t > 0$ nên $t = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right| = \ln\frac{1}{a} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$.

Ta có:

$$I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + \ln\frac{1}{a} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $(a, x > 0)$.

Giải: Đổi biến $x = a\text{ch}t \Rightarrow dx = a\text{sh}tdt$.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\text{sh}tdt}{a\sqrt{\text{ch}^2 t - 1}} = \int \frac{a\text{sh}tdt}{a\text{sh}t} = \int dt = t + C.$$

Từ $\text{ch}t = \frac{x}{a}$, ta được:

$$\frac{x}{a} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{a} = e^t + \frac{1}{e^t} = \frac{e^{2t} + 1}{e^t} \;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ae^{2t} - 2xe^{t} + a = 0 \quad \Leftrightarrow e^{t} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Vì $e^t > 0$, $x > 0$ nên $t = \ln\left(\frac{x}{a} \pm \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} + \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.

Ta có:

$$I = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \ln\frac{1}{a} + C = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$$

Do tính duy nhất của nguyên hàm hàm số nên ta có thể chọn

$$I = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$$

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Tính $I = \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x + 5}$.

Kết quả:

A. $I = 5\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} - 24\ln(\sin x + 5) + C$

B. $I = -5\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 24\ln(\sin x + 5) + C$

C. $I = 5\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{12}{\sin x + 5} + C$

D. Kết quả khác.

2. Tính $I = \int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x^2 + 1)}$.

Kết quả:

A. $I = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right| + C$ B. $I = \mathrm{arctg}x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + C$

C. $I = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1}\right| + C$ D. Kết quả khác.

3. Tính $I = \int \frac{dx}{(x+3)(x-2)^2}$! ằng phương pháp thêm bớt.

Kết quả:

A. $I = -\frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{25} \ln \left|\frac{x+3}{x-2}\right| + C$

B. $I = \frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{25} \ln \left|\frac{x+3}{x-2}\right| + C$

C. $I = -\frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{25} \ln \left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C$

D. Kết quả khác.

4. Tính $I = \int x\sqrt{x^2+1} \ln(\sqrt{x^2+1})dx$.

Kết quả:

A. $I = \frac{1}{9}\sqrt{(x^2+1)^3}\left[3\ln\sqrt{x^2+1} - 1\right] + C$

B. $I = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\left[\ln\sqrt{x^2+1} - 1\right] + C$

C. $I = \frac{1}{18}\sqrt{(x^2+1)^3}\left[3\ln\sqrt{x^2+1} - 1\right] + C$

D. Kết quả khác.

5. Tính $I = \int x\,(1+x^2)\text{arctg}x\,dx$.

Kết quả:

A. $I = \frac{1}{4}\left[\text{arctg}x(x^2+1)^2 - \frac{x^3}{3} - x\right] + C$

B. $I = \frac{1}{4}\left[\text{arctg}x(x^2+1)^2 + \frac{x^3}{3} + x\right] + C$

C. $I = \frac{1}{4}\left[\text{arctg}x(x^4+2x^2) - \frac{x^3}{3} - x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right] + C$

D. Kết quả khác.

Bài 2

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

MỤC TIÊU

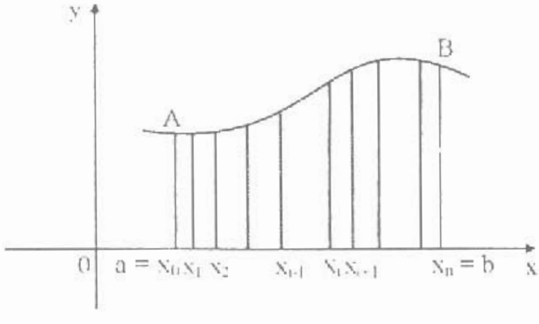
Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. *Trình bày được định nghĩa tích phân xác định bằng cách lập tổng S_n, tính giới hạn và ý nghĩa hình học của tích phân xác định.*
2. *Áp dụng được các phương pháp tính tích phân xác định: công thức Newton –Leibnitz, phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân.*
3. *Tính gần đúng được tích phân xác định bằng phương pháp hình thang và phương pháp Simpson.*

1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.1. Diện tích hình thang cong

Cho hàm số y = f(x), xác định và liên tục trên đoạn [a, b], ngoài ra giả sử f(x) không âm trên [a, b]. Xét hình thang cong AabB là hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) trên [a, b]; các đường thẳng x = a, x = b và trục hoành Ox (hình 3.1).



Hình 3.1

Ta chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Các điểm chia x_i ($i = 0, 1, ..., n$) được chọn tuỳ ý, tuân theo thứ tự tăng dần và điểm đầu x_0 trùng với a, điểm cuối x_n trùng với b. Từ các điểm chia x_i ($i = \overline{1, n-1}$) ta dựng các đường $x = x_i$, như thế ta đã chia hình thang cong AabB thành n hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ ($i = \overline{1, n}$). Mỗi hình thang cong nhỏ có đáy là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = \overline{1, n}$). Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm tuỳ ý ξ_i; khi đó tung độ y_i ứng với hoành độ ξ_i là $y_i = f(\xi_i)$.

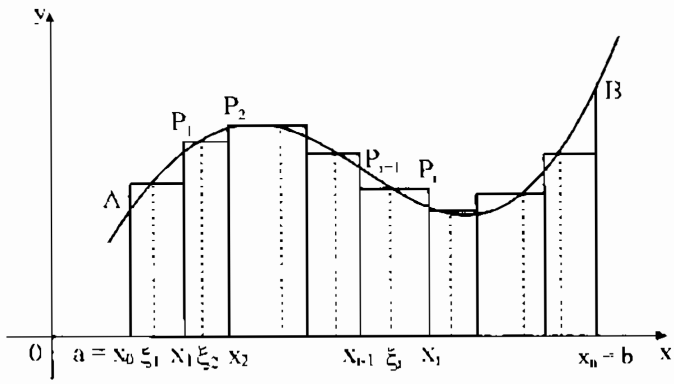
Nếu ứng với mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ ta dựng một hình chữ nhật có kích thước là $(x_i - x_{i-1})$ và $f(\xi_i)$ thì diện tích của nó là: $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Lập tổng S_n:

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$\text{hay } S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3.2.1)$$

trong đó: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; S_n chính là diện tích hình bậc thang (hình 3.2).



Hình 3.2

Diện tích S của hình thang cong AabB bằng tổng diện tích của các hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ ($i = \overline{1, n}$). Ta thấy rằng, diện tích hình bậc thang sai khác với diện tích hình thang cong AabB càng nhỏ nếu n càng lớn và các Δx_i càng nhỏ. Do đó người ta định nghĩa diện tích hình thang cong AabB như sau:

Nếu tổng (3.2.1) dần tới một giới hạn xác định S khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ thì S được gọi là *diện tích của hình thang cong* AabB.

Vậy diện tích của hình thang cong AabB là:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm f(x) xác định trên [a, b]. Chia tuỳ ý đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ lấy một điểm ξ_i tuỳ ý ($i = \overline{1, n}$).

Lập tổng: $$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

I_n được gọi là *tổng tích phân* của hàm f(x) trên đoạn [a, b]. Cho số điểm chia tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$. Nếu trong quá trình đó mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách lấy điểm ξ_i. Khi đó hàm f(x) được gọi là *khả tích* trên đoạn [a, b], và I được gọi là *tích phân xác định* của hàm f(x) trên đoạn [a, b] và ký hiệu là:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ở đây: [a,b]: đoạn lấy tích phân; a: cận dưới;

b: cận trên; x: biến lấy tích phân;

f: hàm số lấy tích phân; f(x)dx: biểu thức dưới dấu tích phân.

Chú ý 1. Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ (nếu có) chỉ phụ thuộc vào hàm f(x) dưới dấu tích phân và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến tích phân.

Tức là: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Chú ý 2. Khi định nghĩa tích phân xác định, ta giả thiết $a \le b$.

– Nếu b < a ta định nghĩa: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

– Nếu a = b ta định nghĩa: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Chú ý 3. Nếu f(x) liên tục và không âm với $\forall x \in [a, b]$ thì diện tích hình thang cong xác định bởi y = f(x), y = 0, x = a, x = b bằng $\int_a^b f(x)dx$. Đó là ý nghĩa hình học của tích phân xác định.

1.3. Dấu hiệu khả tích của một số hàm quen thuộc

Sau khi định nghĩa về tích phân xác định, một vấn đề đặt ra là: Những hàm nào thì khả tích trên đoạn [a, b]? Vấn đề đó được khẳng định bởi định lý sau:

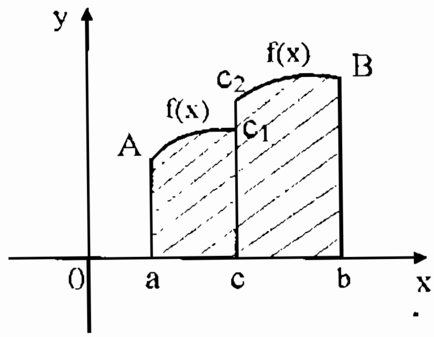
1.3.1. Định lý 1

Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

Chú ý: Định lý trên cho ta một điều kiện đủ để hàm f(x) khả tích trên [a, b]. Đó không phải là một điều kiện cần. Một hàm khả tích trên [a, b] thì không nhất thiết liên tục trên đoạn đó.

Người ta cũng chứng minh được rằng, nếu f(x) có một điểm gián đoạn loại I x = c trên [a, b] thì nó khả tích trên đoạn ấy và ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Hình 3.3

Ý nghĩa hình học của mệnh đề là diện tích hình thang cong ứng với hàm f(x) có điểm gián đoạn loại I tại x = c bằng tổng diện tích các hình thang cong aAC_1c và cC_2Bb (hình 3.3).

Mệnh đề trên vẫn đúng nếu f(x) có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại I trên [a, b].

1.3.2. Định lý 2

Nếu f(x) bị chặn trên [a, b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

1.3.3. Định lý 3

Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trên [a, b] thì khả tích trên [a, b].

1.4. Tính chất của tích phân xác định

Để khỏi phải nhắc lại nhiều lần, trong các mệnh đề dưới đây khi nói đến tích phân $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ chúng ta đều hiểu là f(x) được giả thiết là khả tích trên [α, β].

Tính chất 1

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\text{, C là hằng số;}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Tính chất 2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{, c tuỳ ý.}$$

Tính chất 3 (trong tính chất này a < b)

a) Nếu $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Nếu $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

c) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] $\Rightarrow |f(x)|$ khả tích trên [a, b] và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

d) Nếu $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Tính chất 4: Định lý về giá trị trung bình

Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì trên đoạn đó có ít nhất một điểm ξ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Chứng minh: Vì f(x) liên tục trên [a, b] nên ta có m và M là các giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm f(x) trên đoạn đó.

Ta có: $$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \quad (b > a)$$

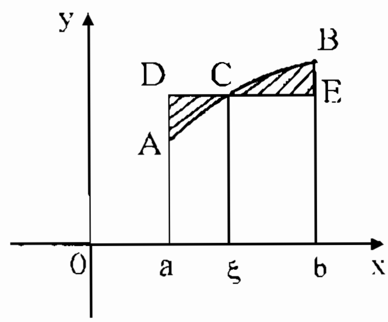
$$\text{hay } m \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Cũng vì f(x) liên tục trên [a, b] nên trên đoạn đó có ít nhất một điểm ξ sao cho

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx.$$

Do đó : $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Chú ý: Giả sử cung AB là đường biểu diễn của $f(x) \geq 0$ trên [a, b]. Ý nghĩa hình học của định lý về giá trị trung bình là: Trên cung AB bao giờ cũng có ít nhất một điểm C có hoành độ $x = \xi$ ($a \leq \xi \leq b$) sao cho diện tích hình chữ nhật aDEb đúng bằng diện tích hình thang cong AabB (hình 3.4).



Hình 3.4

Giá trị $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ được gọi là *giá trị trung bình* của f(x) trên [a, b].

Ví dụ 1: Tính $\int_0^1 x^2dx$ theo định nghĩa.

Giải: Vì $f(x) = x^2$ liên tục trên [0, 1] nên nó khả tích trên [0, 1]. Do đó ta có:

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 \Delta x_i,$$

trong đó giới hạn của vế phải tồn tại không phụ thuộc vào cách chia [0, 1] và cách lấy điểm ξ_i. Để việc tính toán được dễ dàng, ta chia [0, 1] thành n đoạn nhỏ bằng nhau và lấy các điểm ξ_i là các đầu mút phải của mỗi đoạn nhỏ, khi đó ta có:

$$\Delta x_i = \frac{1}{n},\ \xi_i = x_i = i\frac{1}{n}\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

và $\max \Delta x_i \to 0$ tương đương với $n \to \infty$.

Do đó: $$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\int_0^1 x^2dx = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Dùng tích phân xác định tìm giới hạn

$$I = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right].$$

Giải: Đặt $I_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$

Có thể viết I_n dưới dạng:

$$I_n = \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$, hàm số này liên tục trên [0, 1], do đó khả tích trên [0, 1]; dùng phân điểm đều $\Delta x_i = \frac{1-0}{n}$ và các điểm chia:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{n};\ \ldots;\ x_i = \frac{i}{n},\ i = \overline{0,n},$$

chọn điểm $\xi_i \equiv x_i$, có tổng tích phân là I_n, do đó:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

2.1. Định lí cơ bản giữa nguyên hàm và tích phân xác định

Nếu f(x) khả tích trên [a, b], f(x) cũng khả tích trong [a, x] với $x \in [a, b]$. Do đó tích phân $\int_a^x f(t)dt$ là một hàm của x (hàm của cận trên). Ta đặt $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Định lý: *Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì hàm $\Phi(x)$ có đạo hàm trên đoạn đó và*

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) \qquad (3.2.2)$$

Nói khác đi, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của hàm f(x) trên [a, b].

Chứng minh: Lấy $x \in (a, b)$, cho x một số gia Δx sao cho $x + \Delta x \in (a, b)$. Khi đó ta có:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Theo định lý về giá trị trung bình, có một điểm ξ nằm giữa x và $x + \Delta x$ sao cho

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x.$$

Do đó ta có $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ hay $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$.

Cho $\Delta x \to 0$, khi đó $\xi \to x$ và vì f(x) liên tục tại x nên $f(\xi) \to f(x)$. Do đó ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

Điều này chứng tỏ rằng, $\Phi(x)$ có đạo hàm tại x và $\Phi'(x) = f(x)$.

Mặt khác, tại các mút $x = a$, $x = b$ cũng chứng minh tương tự như trên ta được:

$$\Phi'(a + 0) = f(a); \ \Phi'(b - 0) = f(b).$$

Vậy tại mọi điểm $x \in [a, b]$ ta đều có: $\Phi'(x) = f(x)$.

Từ định lý trên ta suy ra ngay hệ quả sau.

Hệ quả: Mọi hàm liên tục trên [a, b] đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

2.2. Công thức Newton – Leibnitz

Định lý: *Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và F(x) là một nguyên hàm của nó trong đoạn đó thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (3.2.3)$$

Đẳng thức (3.2.3) được gọi là công thức Newton – Leibnitz.

Chứng minh: Theo giả thiết, F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b] và theo hệ quả trên thì

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

cũng là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b].

Do đó F(x) và Φ(x) chỉ khác nhau một hằng số cộng, tức là: Φ(x) = F(x) + C.

Để xác định hằng số C, cho x = a ta có: Φ(a) = F(a) + C.

Nhưng $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, do đó C = –F(a). Vậy

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),\ a \le x \le b.$$

Cho x = b, trong biểu thức trên ta có

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Người ta thường ký hiệu F(b) – F(a) bằng $F(x)\Big|_a^b$, như vậy công thức Newton – Leibnitz được viết thành

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ví dụ 1: Tính $\int_0^2 |1-x|dx.$

Giải: Ta có:

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= -\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2 = -\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right) = 1.$$

Ví dụ 2: Giá trị trung bình của hàm f(x) = $\sin^2(x)$ trên đoạn [0, 2π] bằng

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.1. Phương pháp đổi biến trong tích phân xác định

Tương tự tích phân bất định, trong tích phân xác định người ta cũng dùng các phép đổi biến thích hợp để tính tích phân.

3.1.1. Đổi biến số dạng 1: $x = \varphi(t)$

Định lý: *Xét tích phân* $\int_a^b f(x)dx$, *với f liên tục trong [a, b]. Giả sử thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thoả mãn:*

1) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trong $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;

3) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong [a,b]

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{3.2.4}$$

Chứng minh: Giả sử F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong [a, b], khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3.2.5}$$

Mặt khác, vì F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong [a, b] nên $F[\varphi(t)]$ sẽ là một nguyên hàm của $f[\varphi(t]\,\varphi'(t)$ trong $[\alpha, \beta]$ và:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) \tag{3.2.6}$$

Từ (3.2.5) và (3.2.6) suy ra đẳng thức (3.2.4).

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$.

Đặt: $x = 2\text{tg}t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$;

$x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Vậy ta đặt $x = 2tgt$, với $0 \le x \le 2$ thì $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4(tg^2t+1)};\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt = 2(1+tg^2t)dt.$$

Vậy: $$I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(tg^2t+1)} 2(1+tg^2t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng, nếu f(x) liên tục trong [−a, a] thì:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm chẵn} \end{cases}$$

Thật vậy, theo tính chất của tích phân xác định ta có:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Trong tích phân thứ nhất ở vế phải $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx$, đổi biến $x = -t$ ta có:

$$I_1 = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx.$$

Do đó:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx.$$

Vậy: nếu f(x) lẻ, tức là $f(-x) = -f(x)$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

nếu f(x) chẵn, tức là $f(-x) = f(x)$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

3.1.2. Đổi biến số dạng 2: $t = \Psi(x)$

***Định lý:** Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, với f(x) liên tục trong [a,b].*

Nếu phép đổi biến $t = \Psi(x)$ thoả mãn:

1) $\Psi(x)$ biến thiên đơn điệu trên $[a, b]$ và có đạo hàm liên tục;

2) $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, trong đó $g(t)$ là một hàm số liên tục trong khoảng đóng $[\Psi(a), \Psi(b)]$ thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} g(t)dt. \tag{3.2.7}$$

Chứng minh: Giả sử $\int g(t)dt = G(t) + C$, khi đó:

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G[\psi(x)] + C.$$

Do đó:

$$\int_a^b f(x)dx = G[\Psi(x)]\Big|_a^b = G[\Psi(b)] - G[\Psi(a)] = G(t)\Big|_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} = \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} g(t)dt.$$

Chú ý: Khi dùng công thức (3.2.7) cần lưu ý hàm số $t = \Psi(x)$ phải đơn điệu trên $[a, b]$. Nếu không đơn điệu, có thể xảy ra trường hợp $\Psi(a) = \Psi(b)$ với $a \neq b$ (chẳng hạn hàm số $t = \sin x$, $x \in [0, \pi]$). Khi đó tích phân ở vế phải (3.2.7) bằng không, còn tích phân ở vế trái lại khác không. Công thức (3.2.7) không đúng nữa.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

Giải: Đổi biến $t = \cos x$, hàm số $t = \cos x$ đơn điệu trên $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, khi $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$; $dt = -\sin x dx$.

Nên $I = -\int_1^0 \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^2 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} dx.$

Giải: Đặt $t = x^2 - x + 3$; $dt = (2x - 1)dx$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 3$; khi $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Vậy: $I = \int_1^2 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} dx = \int_3^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_3^5 = \ln\frac{5}{3}$.

Chú ý: Ta có thể biến đổi như sau mà không cần phải đưa ra biến t:

$$I = \int_1^2 \frac{d(x^2 - x + 3)}{x^2 - x + 3} = \ln\left|x^2 - x + 3\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{5}{3}.$$

3.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý: *Giả sử u(x) và v(x) là những hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn [a, b] thì:*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)dx = [u(x)\,v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)dx$$

hay $$\int_a^b u(x)\,dv = [u(x)\,v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du.$$

Chứng minh:

Ta có: $[u(x)\,v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b [u(x)\,v(x)]'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)dx = [u(x)\;v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Vì $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$ nên ta có: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 x\,e^{3x}dx$.

Giải: Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{3}\,e^{3x} \end{cases}$

$$I = \int_0^1 x\,e^{3x}dx = \frac{1}{3}x\,e^{3x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x\,e^{3x}\Big|_0^1 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^e x\ln x dx$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = \int_1^e x\ \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{x^2}{4}\left[2\ln x - 1\right]\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

4. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chúng ta đã biết cách tính tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ bằng định nghĩa, bằng công thức Newton – Leibnitz và các phương pháp đổi biến số, phương pháp tích phân từng phần đã nêu ở phần trên. Đôi khi $\int_a^b f(x)dx$ không tính đúng được, chẳng hạn khi hàm f(x) không có nguyên hàm biểu diễn bằng hàm sơ cấp hoặc khi phải tính nguyên hàm rất phức tạp. Ví dụ các nguyên hàm sau đây thực sự tồn tại nhưng không phải là một hàm sơ cấp:

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin(x^2)dx,\quad \int \cos(x^2)dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\ \ldots$$

Khi đó ta phải tính $\int_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp tính gần đúng.

Các công thức tính gần đúng trong phần này đều dựa vào ý nghĩa hình học của tích phân xác định.

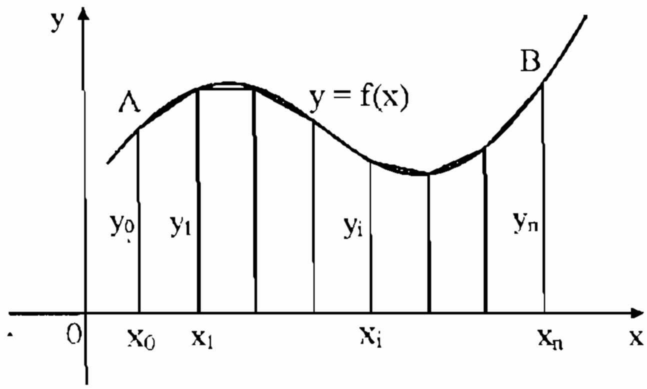
4.1. Công thức hình thang

Giả sử phải tính $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x) \geq 0$ và liên tục trên [a, b] (a < b).

Chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Đặt $h = \dfrac{b-a}{n}$; $x_i = x_0 + i \times h$; $y_i = f(x_i)$ (i = 0, 1, 2,..., n)



Hình 3.5

Nếu thay mỗi hình thang nhỏ giới hạn bởi cung y = f(x), trục Ox và đường $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ bởi hình thang có chiều cao $h = \dfrac{b-a}{n}$ và hai đáy là $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, $y_i = f(x_i)$ (hình 3.5).

Ta có công thức gần đúng sau đây được gọi là công thức hình thang:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ \ldots \ + \ \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) \qquad (3.2.8)$$

Gọi biểu thức ở vế phải (3.2.8) là I_T có:

$$I \approx I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right] \qquad (3.2.9)$$

Khi f(x) < 0 và liên tục trên [a, b] thì công thức (3.2.9) vẫn đúng.

Người ta đã chứng minh được rằng, nếu f(x) có đạo hàm cấp 2 bị chặn và nếu dùng công thức (3.2.9) để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$ thì sai số mắc phải là:

$$\delta(n) = |I - I_T| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$$

trong đó: $M_2 = \max|f''(x)|$ với $\forall x \in [a,b]$.

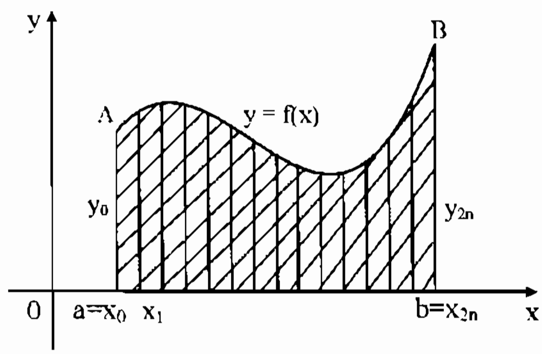
4.2. Công thức Simpson

Giả sử phải tính $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a, b]$ $(a < b)$.

Chia đoạn [a, b] thành 2n đoạn bằng nhau, bởi các điểm chia:

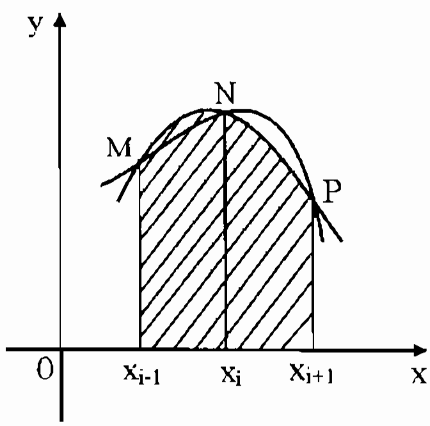
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b.$$

Đặt $h = \dfrac{b-a}{2n}$; $x_i = x_0 + i \times h$; $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$

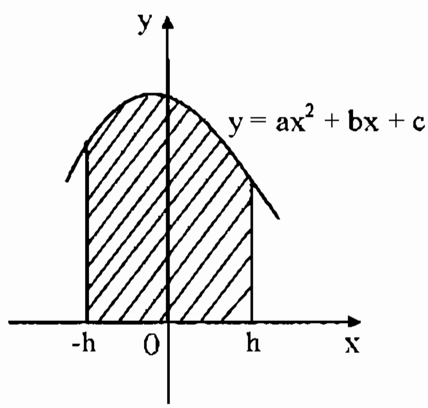


Hình 3.6

Ta thay mỗi cặp hình thang nhỏ liên tiếp (hình 3.6), giới hạn bởi cung $y = f(x)$, trục 0x, các đường $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ bằng hình thang cong giới hạn bởi trục 0x, các đường $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ và cung parabol đi qua ba điểm $M(x_{i-1}, y_{i-1})$, $N(x_i, y_i)$, $P(x_{i+1}, y_{i+1})$ có trục song song với Oy (hình 3.7) và có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Khi đó ta có thể xấp xỉ $\int_a^b f(x)dx$ bởi diện tích của n hình thang parabol nói trên.



Hình 3.7



Hình 3.8

Vì phép tịnh tiến không làm thay đổi diện tích của một hình nên để việc tính toán được đơn giản, ta tính diện tích S của hình parabol giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = -h$, $x = h$, $y = ax^2 + bx + c$ (hình 3.8) với:

$$y_- = y|_{x=-h} = ah^2 - bh + c$$

$$y_0 = y|_{x=0} = c$$

$$y_+ = y|_{x=h} = ah^2 + bh + c$$

$$S = \int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}\left[(ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c)\right] \Rightarrow S = \frac{h}{3}(y_- + 4y_0 + y_+)$$

Do đó:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})\right] \tag{3.2.10}$$

Gọi vế phải của (3.2.10) là I_S ta có:

$$I \approx I_S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})\right] \tag{3.2.11}$$

Khi $f(x) < 0$ và liên tục trên [a, b] thì công thức (3.2.11) vẫn đúng.

Người ta chứng minh được rằng, nếu f(x) có đạo hàm cấp 4 bị chặn thì sai số mắc phải trong trường hợp này là:

$$\delta(2n) = |I - I_S| \le \frac{(b-a)^5 M_4}{180\,(2n)^4},$$

trong đó: $M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|$ với $\forall x \in [a,b]$.

Ví dụ 1. Tính gần đúng tích phân $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ bằng công thức hình thang và công thức Simpson.

Giải: Chia [0, 1] thành 10 phần bằng nhau (n = 10):

$$h = 0{,}1;\ x_i = 0 + i \times 0{,}1 = 0{,}1 \times i;\ y_i = \sqrt{1 + x_i^2}\quad (i = 0, 1, \dots, 10)$$

x_i	$y_i = \sqrt{1+x_i^2}$
$x_0 = 0,0$	$y_0 = 1,0000$
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,0050$
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,019803903$
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,044030651$
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,0770$
$x_5 = 0,5$	$y_5 = 1,1180$
$x_6 = 0,6$	$y_6 = 1,1662$
$x_7 = 0,7$	$y_7 = 1,2207$
$x_8 = 0,8$	$y_8 = 1,2806$
$x_9 = 0,9$	$y_9 = 1,3454$
$x_{10} = 1$	$y_{10} = 1,4142$

Theo công thức hình thang (n = 10):

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \approx 0,1\left[\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_9\right] = 0,1\times 11,4838 = 1,14838.$$

Theo công thức Simpson ($2n = 10 \Rightarrow n = 5$):

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \approx \frac{0,1}{3}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$\approx \frac{0,1}{3}\left[\begin{array}{l}1+1,4142+4(1,0050+1,0440+1,1180+1,2207+1,3454)\\+2(1,0198+1,0770+1,1662+1,2806)\end{array}\right]$$

$$\approx \frac{0,1}{3}\times[2,4142+22,9324+9,0872]$$

$$\approx 0,1\times\frac{34,4338}{3} = 0,1\times 11,47793333 = 1,147793333.$$

Giá trị đúng của tích phân đã cho là:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}\right| = 0,707106781+\frac{1}{2}\ln(2,414213562)$$

$$= 1,147793574.$$

Ví dụ 2: Tính gần đúng tích phân $\int_{-3}^{3} e^{-x^2}dx$ bằng công thức hình thang.

Giải: Ta thấy: $f(x) = e^{-x^2}$ là hàm chẵn nên ta có

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{3} e^{-x^2}dx.$$

Chia đoạn [0, 3] thành 10 phần bằng nhau (chọn n = 10):

$h = 0,3;\ x_i = 0 + i \times 0,3 = 0,3i;\ y_i = e^{-x_i^2}\ (i = 0, \ldots, 10)$

x_i	$y_i = e^{-x_i^2}$
$x_0 = 0,0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 0,3$	$y_1 = 0,91393119$
$x_2 = 0,6$	$y_2 = 0,69767633$
$x_3 = 0,9$	$y_3 = 0,44485807$
$x_4 = 1,2$	$y_4 = 0,23692776$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,10539922$
$x_6 = 1,8$	$y_6 = 0,03916390$
$x_7 = 2,1$	$y_7 = 0,01215518$
$x_8 = 2,4$	$y_8 = 0,00315111$
$x_9 = 2,7$	$y_9 = 0,00068233$
$x_{10} = 3$	$y_{10} = 0,00012341$

Theo công thức hình thang (n = 10):

$$\int_{0}^{3} e^{-x^2}dx \approx \frac{0,3}{2}\left[(y_0 + y_{10}) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9)\right]$$

$$\approx 0,15(1,00012341 + 2 \times 2,45394509)$$

$$\approx 0,15 \times 5,90801368 \approx 0,886202038$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^{3} e^{-x^2}dx \approx 2 \times 0,886202052 = 1,772404076.$$

Ví dụ 3: Áp dụng công thức Simpson để tính gần đúng tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad \text{với sai số nhỏ hơn } 0{,}00001.$$

Giải: Trước hết ta phải xét xem muốn thoả mãn yêu cầu của bài toán thì phải chia đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thành bao nhiêu đoạn nhỏ?

Với giả thiết của bài toán $\delta(2n) < 0{,}00001 = 10^{-5} \Rightarrow \dfrac{(b-a)^5 M_4}{180(2n)^4} < 10^{-5}$.

Ta có:

$$\left|y^{(4)}(x)\right| = |\cos x| \le 1 \quad \text{với } \forall x.$$

Vậy lấy $M_4 = 1$; $a = 0$; $b = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi^5}{2^5 \times 180 \times (2n)^4} \times 1 < 10^{-5} \Rightarrow (2n)^4 > \frac{\pi^5 \times 10^5}{2^5 \times 180} \Rightarrow (2n)^4 > 5^4 \times \pi^4 \times \frac{\pi}{36}$$

$$\Rightarrow 2n > 5\pi \times \sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} \approx 8{,}5.$$

Chọn $2n = 10$. Vậy ta sẽ chia đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thành 10 phần bằng nhau.

Tương tự ví dụ trên, dành cho bạn đọc hoàn thành.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Tính $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x - 1}}$.

Kết quả:

A. $I = 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$ B. $I = 2\ln 2 + \dfrac{1}{2}$

C. $I = 2\ln 3 - \dfrac{2}{3}$ D. Kết quả khác.

2. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Kết quả:

A. $I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

B. $I = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

C. $I = \frac{\pi}{3}$

D. Kết quả khác.

3. Tính $I = \int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$.

Kết quả:

A. $I = \frac{\sqrt{2}+1}{9(\sqrt{2}+2)}$

B. $I = \frac{e^2-1}{9(e^2+1)}$

C. $I = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+2)}$

D. Kết quả khác.

4. Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ bằng phương pháp hình thang với $n = 10$.

Kết quả:

A. $I = 0{,}92644745$

B. $I = 0{,}89858792$

C. $I = 1{,}0118028$

D. Kết quả khác.

5. Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ bằng phương pháp Simpson với $2n = 10$.

Kết quả:

A $I = 0{,}9270397$

B. $I = 0{,}8985879$

C. $I = 0{,}868952$

D. Kết quả khác.

Bài 3
TÍCH PHÂN SUY RỘNG

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa tích phân suy rộng trong hai trường hợp: khoảng lấy tích phân là vô hạn và hàm dưới dấu tích phân có điểm gián đoạn vô cực trong khoảng lấy tích phân.

2. Biết cách lấy tích phân suy rộng trong hai trường hợp: khoảng lấy tích phân là vô hạn và hàm dưới dấu tích phân có điểm gián đoạn vô cực trong khoảng lấy tích phân.

Ta đã xét khái niệm tích phân xác định với giả thiết:

– Khoảng lấy tích phân [a, b] là hữu hạn.

– Hàm dưới dấu tích phân liên tục hay chỉ có một số điểm gián đoạn loại I trên [a, b].

Bây giờ mở rộng định nghĩa tích phân xác định trong hai trường hợp:

– Khoảng lấy tích phân là vô hạn.

– Hàm dưới dấu tích phân có điểm gián đoạn vô cực trong khoảng lấy tích phân.

1. KHOẢNG LẤY TÍCH PHÂN LÀ VÔ HẠN

1.1. Khoảng lấy tích phân là [a, +∞)

Giả sử hàm f(x) xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $a \le x \le b < +\infty$. Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, tích phân ấy tồn tại với mọi b > a.

Ta gọi giới hạn (hữu hạn hay là vô cùng)

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (3.3.1)$$

là *tích phân suy rộng* của f(x) trong [a, + ∞) và ký hiệu là:

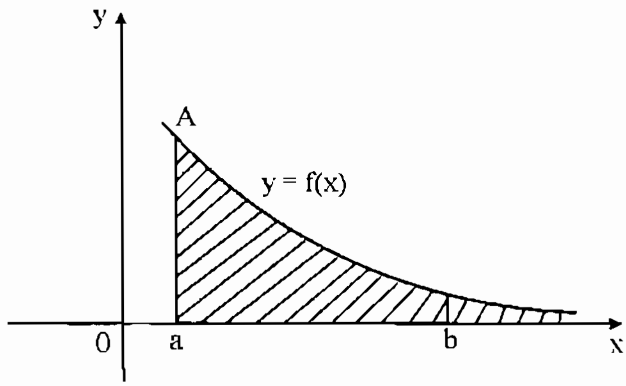
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{3.3.2}$$

Trong trường hợp giới hạn (3.3.1) hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng (3.3.2) *hội tụ* và giới hạn (3.3.1) là giá trị của nó và viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{3.3.3}$$

Nếu giới hạn (3.3.1) là vô cùng hay không tồn tại, ta nói rằng tích phân suy rộng (3.3.2) *phân kỳ*.

Về phương diện hình học, nếu $f(x) \geq 0$ với $\forall x \geq a$ và tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về I thì I là diện tích hình thang cong vô hạn (hình 3.9).



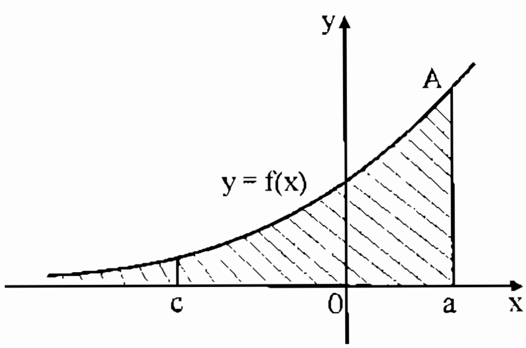
Hình 3.9

1.2. Khoảng lấy tích phân là (–∞, a]

Tương tự như trên ta định nghĩa tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx \quad (-\infty < c \leq a) \tag{3.3.4}$$

Nếu $f(x) \geq 0$ với $\forall x \leq a$ thì tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ là diện tích hình thang cong vô hạn (hình 3.10).



Hình 3.10

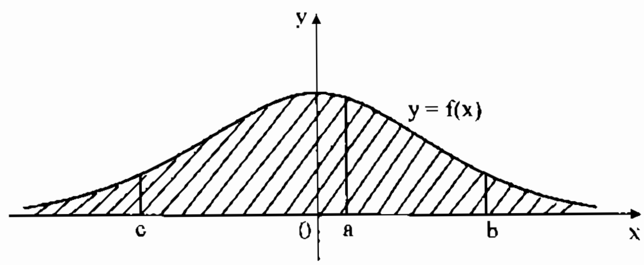
1.3. Khoảng lấy tích phân là (−∞, +∞)

Ta chia khoảng đó thành (−∞, a], [a, +∞) và viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (3.3.5)$$

Đối với đẳng thức (3.3.5) tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ chỉ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân ở vế phải hội tụ.

Hình ảnh hình học của tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ là (hình 3.11):



Hình 3.11

Ví dụ 1: Tính $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

Giải: Ta có:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\int_{2}^{b}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Bigg|_{2}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\ln\frac{b-1}{b+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{4(b-1)}{b+2} = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Ví dụ 2: Xét tính hội tụ của tích phân $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ (a > 0).

Giải: Lấy b > a.

• Với $\alpha = 1$: $\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \ln|x|\Big|_{a}^{b} = \ln b - \ln a;$

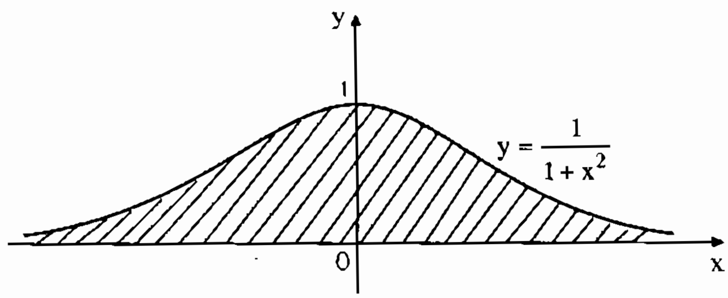
$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = +\infty.$$

• Với $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b = \frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$;

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{khi } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{khi } \alpha > 1 \end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$ hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Ví dụ 3: Tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.



Hình 3.12

Giải: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to-\infty} \text{arctgc} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

• $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \text{arctgb} = \frac{\pi}{2}$

Vậy $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Giải: Thực hiện phép biến đổi: $x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = \dfrac{-dt}{t^2}$.

Khi $x \to 0$ thì $t \to +\infty$; khi $x \to +\infty$ thì $t \to 0$.

Ta có:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{dt}{\left(1+\frac{1}{t^4}\right)t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

Do đó có thể viết

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx.$$

Lại thực hiện phép đổi biến $z = x - \frac{1}{x}$ ta được:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.$$

Giải: Đặt $\frac{x}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt$ và $x = \sqrt{2}\,t$.

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} \sqrt{2}\,te^{-t^2}\sqrt{2}\,dt + \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\,te^{-t^2}\sqrt{2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} d(t^2) + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,d(t^2)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^0 + e^{-\infty} - e^{-\infty} + e^0\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1+0-0+1\right] = 0.$$

2. HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CÓ ĐIỂM GIÁN ĐOẠN VÔ CỰC TRONG KHOẢNG LẤY TÍCH PHÂN

Giả sử hàm f(x) khả tích trên mọi đoạn $[a, b - \varepsilon]$ với $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý và không giới nội khi $x \to b - 0$. Ta gọi giới hạn (hữu hạn hay vô cùng)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{3.3.6}$$

là *tích phân suy rộng* của f(x) trên [a, b) và ký hiệu là:

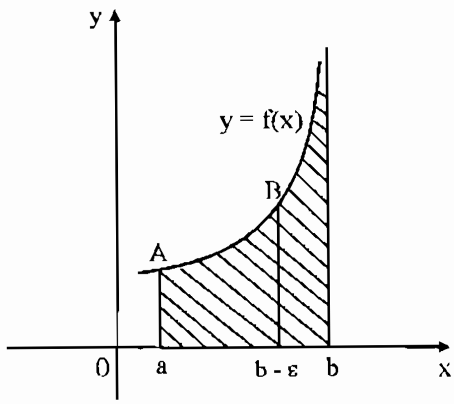
$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.3.7}$$

Trong trường hợp giới hạn (3.3.6) là hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng (3.3.7) hội tụ và giới hạn (3.3.6) là giá trị của nó:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{3.3.8}$$

Nếu giới hạn (3.3.6) là vô cùng hay không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng (3.3.7) phân kỳ.

Về phương diện hình học, tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ với $f(x) \geq 0$ trên [a, b] và hội tụ về I thì I là biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn (hình 3.13).



Hình 3.13

Tương tự, ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm f(x) khả tích trên mọi đoạn [a + ε, b] và không giới nội khi x → a + 0:

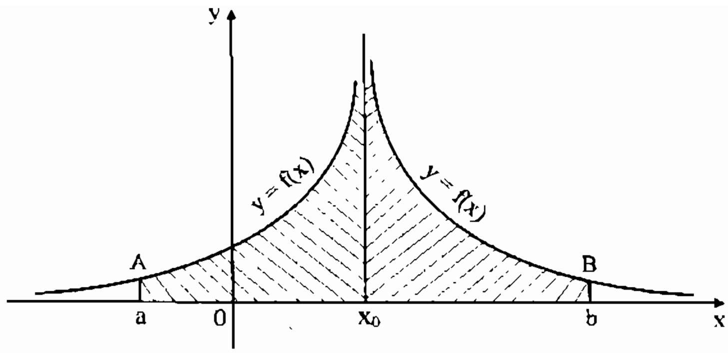
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{3.3.9}$$

Nếu hàm f(x) không giới nội khi $x \to x_0$ với $x_0 \in (a, b)$, ta chia đoạn [a, b] thành hai khoảng $[a, x_0)$, $(x_0, b]$ và viết:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx \tag{3.3.10}$$

Trong đẳng thức (3.3.10), tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

Về phương diện hình học, tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn (hình 3.14).



Hình 3.14

Trong trường hợp f(x) có điểm gián đoạn vô cực tại x = a (hoặc x = b), nếu ta đã biết F(x) là hàm liên tục trên [a, b] và là nguyên hàm của f(x) trên (a, b] (hoặc [a, b)) thì tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ có thể được viết là:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3.3.11}$$

Công thức (3.3.11) vẫn đúng trong trường hợp f(x) có một số hữu hạn điểm gián đoạn vô cực trên [a, b] nếu nguyên hàm F(x) của nó liên tục trên [a, b].

Ví dụ 1: Tính $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải: Ta có hàm dưới dấu tích phân không giới nội khi $x \to -1 + 0$ và $x \to 1 - 0$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (b > a\ ;\ \alpha > 0).$$

Giải: Ta có hàm dưới dấu tích phân không giới nội khi $x \to b - 0$.

• Với $\alpha \neq 1$:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}\Big|_a^{b-\varepsilon} = \frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha-1}(b-a)^{1-\alpha}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^{1-\alpha}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{nếu } 1-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{nếu } 1-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<1 \end{cases}$$

• Với $\alpha = 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\{-\ln|b-x|\}\Big|_a^{b-\varepsilon} = \ln|b-a| - \lim_{\varepsilon\to0^+}\ln|\varepsilon|$$

$$= \ln|b-a| + \lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\left|\frac{1}{\varepsilon}\right| = +\infty.$$

Do đó: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $0<\alpha<1$; phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Tương tự $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ nếu $0<\alpha<1$; phân kỳ nếu $\alpha\geq 1$.

Ví dụ 3: Tính $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Giải: Hàm dưới dấu tích phân không giới nội khi $x \to 0$; nhưng nguyên hàm của nó là $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ nên ta có:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Tính $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

Kết quả:

A. $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

B. $I = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$

C. $I = 0$

D. Kết quả khác.

2. Tính $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x + 1}$.

Kết quả:

A. $I = 2$

B. $I = 0$

C. $I = 1$

D. Kết quả khác.

3. Tính $I = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)(b-x)}$.

Kết quả:

A. $I = \pi$

B. $I = \frac{\pi}{2}$

C. $I = -\pi$

D. Kết quả khác.

4. Tính $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

Kết quả:

A. $I = \frac{\pi}{2} - 1$

B. $I = \frac{\pi}{2} + 1$

C. $I = -\frac{\pi}{2} - 1$

D. Kết quả khác.

5. Tính $I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

Kết quả:

A. $I = -\infty$

B. $I = \frac{1}{2}$

C. $I = +\infty$

D. Kết quả khác.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. BÀI TOÁN ĐƯA ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Trong nhiều bài toán của khoa học, kỹ thuật, y, sinh học, khi cần mối liên hệ giữa hai đại lượng x, y ta không tìm được ngay mối liên hệ ấy, mà chỉ tìm được một hệ thức giữa x, y và các đạo hàm của y theo x. Hệ thức đó được gọi là *phương trình vi phân*. Việc tìm mối liên hệ giữa y và x từ hệ thức đó được gọi là *giải phương trình vi phân.*

Ví dụ 1: Biết vận tốc phân huỷ của radium tỷ lệ với khối lượng của nó tại thời điểm t. Gọi M là khối lượng của radium tại thời điểm t, khi đó phương trình mô tả tốc độ phân huỷ của nó là

$$\frac{dM}{dt} = -kM$$

trong đó: k là hệ số tỷ lệ (k > 0). Khi thời gian tăng thì khối lượng của radium giảm, do đó $\frac{dM}{dt} < 0$.

Ví dụ 2: Biết tốc độ phát triển của vi khuẩn tại thời điểm t tỷ lệ với sinh khối, hoặc mật độ tế bào vi khuẩn (trong công nghệ sinh học thường đánh giá qua sinh khối). Gọi x (x > 0) là sinh khối của vi khuẩn (đơn vị: nghìn, triệu tế bào vi khuẩn), t là thời gian (đơn vị: giờ, ngày,...). Khi đó phương trình mô tả tốc độ phát triển của vi khuẩn theo thời gian là:

$$x'_t = kx$$

trong đó: k là hệ số phát triển ($k > 0$). Khi thời gian tăng thì sinh khối của vi khuẩn tăng, do đó $\frac{dx}{dt} > 0$.

2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương trình vi phân là phương trình biểu diễn mối liên hệ giữa biến độc lập (hay các biến độc lập) với hàm chưa biết và các đạo hàm hoặc vi phân của nó. Nếu hàm chưa biết là hàm của một biến độc lập thì phương trình được gọi là *phương trình vi phân thường*. Trong cuốn sách này chỉ xét các phương trình vi phân thường. Để cho gọn, gọi tắt các phương trình vi phân thường là các phương trình vi phân.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân là

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

trong đó: x là biến độc lập; $y = y(x)$ là hàm số phải tìm; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình.

Ví dụ: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ là phương trình vi phân cấp 1;

$y' + yx = x^2$ là phương trình vi phân cấp 1;

$y'' + y'x + y = 2$ là phương trình vi phân cấp 2.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm thoả mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm sao cho khi thế nó và các đạo hàm của nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức.

Chẳng hạn $y = \frac{C}{x}$, trong đó C là hằng số bất kỳ, là nghiệm của phương trình vi phân cấp 1: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ vì khi thế nó và đạo hàm của nó vào phương trình ta được đồng nhất thức $-\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}.\frac{C}{x} = 0$. Cho C những giá trị khác nhau ta được những nghiệm khác nhau của phương trình, vậy phương trình đó có vô số nghiệm.

Bài 1

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. *Trình bày được định nghĩa, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân cấp 1.*
2. *Trình bày được định nghĩa bốn dạng phương trình vi phân cấp 1 thường gặp: phương trình có biến phân ly, phương trình đẳng cấp, phương trình tuyến tính, phương trình Becnuli.*
3. *Giải được bốn dạng phương trình vi phân cấp 1 nêu trên.*

1. TỔNG QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4.1.1)$$

trong đó: F là hàm của ba biến x, y, y'.

Nếu giải được phương trình đó đối với y' thì phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$y' = f(x, y) \text{ hay } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (4.1.2)$$

trong đó: f là hàm của hai biến x, y.

Ví dụ: $3yy' + 4x^2 = 0$, $y^2dx + xdy = 0$, $y' = xy + x^2$ là những phương trình vi phân cấp 1.

1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình vi phân cấp 1 $y' = f(x, y)$. *Giả sử f(x, y) liên tục trong một miền D của mặt phẳng Oxy và giả sử* (x_0, y_0) *là một điểm thuộc D. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm* $x = x_0$, *tồn tại ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình (4.1.2), lấy giá trị* y_0 *khi* $x = x_0$.

Ngoài ra, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trong miền D thì nghiệm ấy là duy nhất.

Ta thừa nhận định lý này.

Điều kiện hàm $y = y(x)$ lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$ được gọi là ***điều kiện ban đầu*** và thường được viết

$$y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng

Ta gọi *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1 là hàm

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.1.3}$$

trong đó C là một hằng số tuỳ ý, thoả mãn phương trình vi phân cấp 1 đã cho.

Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình vi phân cấp 1 là mỗi nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ mà ta nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số tuỳ ý C một giá trị cụ thể C_0 thoả mãn điều kiện ban đầu $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' + \frac{y}{x} = 0$ và nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y\big|_{x=2} = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình này là $y = \frac{C}{x}$.

Nghiệm riêng được xác định từ điều kiện trên là $y = \frac{6}{x}$.

Đôi khi giải phương trình (4.1.1) hoặc (4.1.2) ta không được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$ mà được một hệ thức có dạng $\Phi(x, y, C) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình.

Khi đó hệ thức $\Phi(x, y, C_0) = 0$ có được bằng cách cho C trong tích phân tổng quát lấy giá trị C_0 thoả mãn điều kiện ban đầu và được gọi là *tích phân riêng* của phương trình.

Ví dụ 2: Phương trình vi phân $\frac{x^2}{x^3 - 1}dx + \frac{y - 1}{y + 1}dy = 0$ $(x \neq 1, y \neq -1)$ có nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn là:

$$\frac{1}{3}\ln\left|x^3 - 1\right| + y - 2\ln|y + 1| = C$$

Hệ thức trên được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình đã cho.

Phương trình (4.1.2) có thể có một số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, những nghiệm ấy được gọi là *nghiệm kỳ dị*.

Sau đây ta xét một số dạng phương trình vi phân cấp 1.

2. PHƯƠNG TRÌNH KHUYẾT

2.1. Phương trình khuyết y

Định nghĩa: *Phương trình khuyết y* là phương trình có dạng: $F(x, y') = 0$.

Nếu phương trình giải ra được đối với y' có dạng $y' = f(x)$, chỉ việc lấy tích phân hai vế, ta được:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

trong đó: $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ: Giải phương trình $y' - \cos x = 0$.

Giải: Ta có: $y' - \cos x = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad y = \sin x + C.$$

2.2. Phương trình khuyết x

Định nghĩa: *Phương trình khuyết x* là phương trình có dạng: $F(y, y') = 0$.

Nếu phương trình có dạng $y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$. Lấy tích phân hai vế ta được $x = F(y) + C$, $F(y)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{f(y)}$.

Ví dụ: Giải phương trình $y' = y^2\ (y \neq 0)$.

Giải: Ta có: $\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{y} + C.$

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ BIẾN PHÂN LY

3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân có *biến phân ly* là phương trình có dạng:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \qquad (4.1.4)$$

trong đó: $f_1(x)$ là hàm của biến độc lập x, $f_2(y)$ là hàm của biến độc lập y.

Ví dụ: $\frac{x^2}{1+x^2}dx + \frac{2y}{y^2+2}dy = 0$ là phương trình có biến phân ly.

3.2. Cách giải

Từ (4.1.4) ta có:

$$f_1(x)dx = -f_2(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$\int f_1(x)dx = -\int f_2(y)dy$$

$$\text{hay} \quad F_1(x) + F_2(y) = C. \qquad (4.1.5)$$

trong đó: $F_1(x)$ là nguyên hàm của $f_1(x)$, $F_2(y)$ là nguyên hàm của $f_2(y)$.

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{2y}{y^2+2}dy = 0$.

Giải: Ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{2y}{y^2+2}dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx = -\int\frac{2y}{y^2+2}dy \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = -\ln(y^2+2)+C$$

$$\Rightarrow \ln\sqrt{1+x^2} = -\ln(y^2+2)+\ln|C| \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{C}{y^2+2}.$$

Chú ý: Xét một phương trình vi phân có thể đưa về dạng phương trình có biến phân ly sau đây:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (4.1.6)$$

Nếu $M_2(x) \neq 0$ và $N_1(y) \neq 0$, chia hai vế của (4.1.6) cho $M_2(x).N_1(y)$, ta được:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Khi đó tích phân tổng quát của (4.1.6) sẽ là

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ hoặc $N_1(y) = 0$ tại $y = b$ thì bằng cách thử trực tiếp vào (4.1.6) ta thấy $x = a$ (y tuỳ ý) hoặc $y = b$ (x tuỳ ý) cũng là nghiệm của (4.1.6).

(Không xét trường hợp $x = a$ đồng thời $y = b$ vì phương trình (4.1.6) bị suy biến)

Ví dụ: Giải phương trình

$$x(y+1)dx + (x^2-1)(y-1)dy = 0\,.$$

Giải: Nếu $y+1 \neq 0, x^2-1 \neq 0$ thì phương trình đã cho có thể viết lại:

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y-1}{y+1}dy = 0\,.$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y-1}{y+1}dy = C$$

hay $$\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + y - 2\ln|y+1| = C\,.$$

Nếu $x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1, y+1=0 \Rightarrow y=-1$: bằng cách thử trực tiếp, ta thấy $x = \pm 1$, y tuỳ ý; hoặc $y = -1$, x tuỳ ý cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP CẤP 1

4.1. Định nghĩa

Phương trình đẳng cấp cấp 1 là phương trình có dạng:

$$y' = f(x,y) \tag{4.1.7}$$

trong đó: f(x, y) có thể biểu diễn được thành hàm của tỷ số hai biến số $\left(f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

Ví dụ: Phương trình $(xy-y^2)dx - (x^2-2xy)dy = 0$ là phương trình đẳng cấp cấp 1 vì với $x \neq 0$ ta có thể viết

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy-y^2}{x^2-2xy} \quad \text{hay} \quad y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}\,.$$

4.2. Cách giải

Phương trình đẳng cấp cấp 1 (4.1.7) viết được dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.1.8}$$

Đặt $\frac{y}{x} = u$ hay $y = ux$, trong đó u là một hàm mới của x. Khi đó ta có:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Thay vào (4.1.8) ta được:

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \text{ hay } x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u. \qquad (4.1.9)$$

– Nếu $\varphi(u) - u \neq 0$ thì từ (4.1.9) ta có:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$$

là phương trình có biến phân ly. Lấy tích phân hai vế phương trình, ta được:

$$\ln|x| = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C = \phi(u) + \ln|C|,$$

trong đó: $\phi(u)$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\varphi(u) - u}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (4.1.8) là $x = Ce^{\phi(y/x)}$.

– Nếu $\varphi(u) - u \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi(u) \equiv u$, (4.1.8) trở thành:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Ta thấy y = 0 là nghiệm của phương trình.

Với $y \neq 0$ có:
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Leftrightarrow y = Cx.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là y = Cx.

– Nếu $\varphi(u) - u = 0$ tại $u = u_0$, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy hàm $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho (4.1.8).

Ví dụ: Giải phương trình $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$.

Giải: Nhận thấy x = 0 là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x \neq 0$ thì $y = \frac{x}{2}$ không phải là nghiệm, nên có phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

Đặt $\frac{y}{x} = u$ với điều kiện $x \neq 0$, ta có:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u - u^2}{1 - 2u} \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - 2u}.$$

– Nếu $u \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - 2u}{u^2}du \qquad \Rightarrow \qquad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{u^2} - \int\frac{2u}{u^2}du + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln|x| = -\frac{1}{u} - \ln u^2 + C \Rightarrow |x| = \frac{C}{e^{\frac{1}{u}} u^2} \Rightarrow \quad y^2 e^{\frac{x}{y}} = Cx.$$

– Nếu $u = 0 \Leftrightarrow y = 0$, thế trực tiếp vào phương trình ta thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình.

Đặt biệt $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ Cx = y^2 e^{\frac{x}{y}} \text{ với C tuỳ ý} \end{array}\right.$$

Chú ý: Phương trình dạng: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, trong đó $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là hai hàm số thuần nhất cùng bậc, cũng là phương trình đẳng cấp, vì tỷ số $\frac{P}{Q}$ có thể biểu diễn dưới dạng $f\left(\frac{y}{x}\right)$. Chẳng hạn, các phương trình:

$$(3xy - 7y^2)dx + (5y^2 - 2xy)dy = 0;$$

$$y(x^2 - 3y^2)dx - (x^3 + 6x^2y)dy = 0$$

là những phương trình vi phân cấp 1 thuần nhất.

5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

5.2. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.1.10}$$

trong đó: $p(x)$, $q(x)$ là các hàm liên tục của x.

Nói cách khác, đó là một phương trình bậc nhất đối với hàm phải tìm và đạo hàm của nó. Nếu $q(x) \equiv 0$ thì (4.1.10) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất*. Nếu $q(x) \not\equiv 0$ thì (4.1.10) được gọi là *phương trình tuyến tính không thuần nhất.*

Ví dụ: $y' + \frac{5x}{x^2+1}y = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

$y' + 4xy = (x^2+1)3^{2x}$ là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

5.2. Cách giải

Trước tiên ta xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng của (5.1.10)

$$y' + p(x)y = 0. \qquad (4.1.11)$$

Với $y \neq 0$ từ (4.1.11) ta có thể viết:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (4.1.12)$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình (4.1.11). Ngoài ra, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất (4.1.11) và là một nghiệm riêng ứng với $C = 0$.

Bây giờ xem C không phải là hằng số mà là một hàm của x, hãy tìm C(x) để cho (4.1.12) trở thành nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (4.1.11). Muốn vậy, lấy đạo hàm hai vế của (4.1.12) ta được:

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (4.1.13)$$

Thay (4.1.12) và (4.1.13) vào (4.1.10) ta được:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay $dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Do đó: $$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$$

trong đó: K là một hằng số tuỳ ý.

Vậy: $$y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (4.1.14)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (4.1.10).

Phương pháp giải trên gọi là phương pháp *biến thiên hằng số*. Ta nhận xét rằng, số hạng thứ hai trong vế phải của (4.1.14) là một nghiệm riêng của phương trình (4.1.10) ứng với K = 0; còn số hạng thứ nhất là nghiệm tổng quát của (4.1.11). Người ta có thể chứng minh một cách tổng quát rằng: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x$$

và một nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y\big|_{x=1} = 1$.

Giải: Trước hết giải phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

Ta thấy y = 0 là một nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất.

Với $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \quad \text{hay} \quad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất là $y = \dfrac{C}{x}$ (*).

Bây giờ coi $C = C(x)$ và lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dC}{dx} - \frac{C}{x^2}$$

Thay vào phương trình ban đầu, ta được:

$$\frac{1}{x}\frac{dC}{dx} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = 3x \;\Rightarrow\; dC = 3x^2dx \Rightarrow\; C = x^3 + K$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = x^2 + \frac{K}{x}.$$

Với điều kiện $y\big|_{x=1} = 1$ ta có $K = 0$, do đó nghiệm riêng của phương trình thoả mãn điều kiện đã cho là $y = x^2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$e^{y}dx + (xe^{y} - 1)dy = 0.$$

Giải: Nếu xem y là hàm số phải tìm của biến số x và viết phương trình dưới dạng $(xe^{y} - 1)y' + e^{y} = 0$ thì phương trình ấy không thuộc những dạng đã xét. Nếu xem x là hàm số phải tìm của y, ta được phương trình

$$x' + x = \frac{1}{e^{y}},$$

trong đó: $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với hàm số x(y).

Giải phương trình thuần nhất tương ứng ta được

$$\frac{dx}{dy} + x = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{x} = -dy$$

do đó $\quad x = Ce^{-y}.$

Cho hằng số C biến thiên để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất, ta có

$$x' = C'(y)e^{-y} - C(y)e^{-y}.$$

Thay vào phương trình ban đầu:

$$C'(y)e^{-y} - C(y)e^{-y} + C(y)e^{-y} = e^{-y} \Rightarrow \frac{dC}{dy} = 1$$

$$\Rightarrow \quad C = y + K.$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$x = (y + K)e^{-y} \quad \text{hay} \quad x = Ke^{-y} + ye^{-y}.$$

6. PHƯƠNG TRÌNH BECNULI

6.1. Định nghĩa

Phương trình Becnuli là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{4.1.15}$$

trong đó: p(x), q(x) là những hàm số liên tục, α là một số thực.

6.2. Cách giải

Phương trình (4.1.15) trở thành phương trình vi phân tuyến tính khi $\alpha = 0$ hay $\alpha = 1$. Vì vậy, giả thiết $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$. Với $y \neq 0$, chia hai vế của (4.1.15) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x),$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với z.

Ví dụ: Giải phương trình

$$y' + \frac{1}{x+2}y + (x+2)^3y^2 = 0.$$

Giải: Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x+2}y^{-1} + (x+2)^3 = 0.$$

Đặt $z = y^{-1}$, ta có $z' = -y^{-2}y'$, phương trình trên trở thành

$$z' - \frac{1}{x+2}z = (x+2)^3,$$

là một phương trình vi phân tuyến tính, với $p(x) = -\frac{1}{x+2}$, $q(x) = (x+2)^3$.

Nghiệm của phương trình là:

$$z = Ke^{\int\frac{dx}{x+2}} + e^{\int\frac{dx}{x+2}}\int(x+2)^3e^{-\int\frac{dx}{x+2}}dx = Ke^{\ln|x+2|} + e^{\ln|x+2|}\int(x+2)^3e^{-\ln|x+2|}dx$$

$$= K|x+2| + |x+2|\int\frac{(x+2)^3}{|x+2|}dx$$

$$= K(x+2) + (x+2)\int(x+2)^2dx = \frac{K(x+2)+(x+2)^4}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{K(x+2)+(x+2)^4}.$$

Khi y = 0, nó cũng là một nghiệm của phương trình, đó là nghiệm kỳ dị.

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Giải phương trình vi phân: $y' = \dfrac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$.

Kết quả:

A. $x\ln x = y\ln y + C$ B. $x + \ln x = y + \ln y + C$

C. $x\ln x + x = y\ln y + y + C$ D. Kết quả khác.

2. Giải phương trình vi phân: $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$.

Kết quả:

A. $\left[\begin{array}{ll} y = 0, & x \text{ tuỳ ý} \\ x(x^2 + y^2) - C^2y = 0 & \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{ll} y = 0, & x \text{ tuỳ ý} \\ y(y^2 + x^4) = Cx & \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{ll} y = 0, & x \text{ tuỳ ý} \\ (x^2 + y^2)^2 = C^2xy & \end{array}\right.$ D. Kết quả khác.

3. Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{2y}{x+1} = 0;\ y\big|_{x=0} = 2$.

Kết quả:

A. $y = 2(x + 1)2$ B. $y = 2\sqrt{(x+1)}$

C. $y = 2\ (x+1)$ D. Kết quả khác.

4. Giải phương trình vi phân: $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Kết quả:

A. $y = (x + 1)^2\left[C + \dfrac{x^2}{2} + x\right]$ B. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}\left[C + \dfrac{(x+1)^6}{6}\right]$

C. $y = (x + 1)^2\left[C + \dfrac{(x+1)^6}{6}\right]$ D. Kết quả khác.

5. Giải phương trình vi phân: $2ydx + (y - x)dy = 0$.

Kết quả:

A. $x = Ky + y\ln|y|$ với $y \neq 0$ và $\begin{cases} y = 0 \\ x \text{ tuỳ ý} \end{cases}$ là nghiệm của phương trình

B. $x = \frac{K}{y} + \frac{y}{2}$ với $y \neq 0$ và $\begin{cases} y = 0 \\ x \text{ tuỳ ý} \end{cases}$ là nghiệm của phương trình

C. $x = Ky + \frac{y}{\ln|y|}$ với $y \neq 0$ và $\begin{cases} y = 0 \\ x \text{ tuỳ ý} \end{cases}$ là nghiệm của phương trình

D. Kết quả khác.

Bài 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được định nghĩa, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân cấp 2.

2. Trình bày được định nghĩa ba phương trình vi phân cấp 2 thường gặp: phương trình tuyến tính thuần nhất, phương trình tuyến tính không thuần nhất, phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

3. Giải được ba dạng phương trình vi phân cấp 2 nêu trên.

1. TỔNG QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (4.2.1)$$

trong đó: F là hàm của các biến x, y, y', y''.

Nếu giải được phương trình (4.2.1) đối với y'', nó có dạng

$$y'' = f(x, y, y')$$

trong đó: f là hàm của các biến x, y, y'.

Ví dụ: $y''-y'y+xy=0$, $y''-2xy=xe^x$ là những phương trình vi phân cấp 2.

1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình: $y''=f(x,y,y')$. (4.2.2)

Nếu $f(x,y,y')$ *liên tục trong một miền D nào đó trong* $\mathbb{R}^3$ *và nếu* (x_0, y_0, y'_0) *là một điểm thuộc D, thì trong một lân cận nào đó của điểm* $x = x_0$ *tồn tại ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình (4.2.2) thoả mãn các điều kiện*

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \quad , \quad y'\big|_{x=x_0}=y'_0 \tag{4.2.3}$$

Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')$ *cũng liên tục thì nghiệm ấy là duy nhất.*

Ta thừa nhận định lý này.

1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

Người ta gọi *nghiệm tổng quát* của phương trình (4.2.2) là hàm số $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, trong đó C_1,C_2 là những hằng số tuỳ ý, thoả mãn phương trình.

Với mọi (x_0,y_0,y'_0) ở đó các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm được thoả mãn, có thể tìm được các giá trị xác định $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$ sao cho hàm số $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ thoả mãn điều kiện $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$.

Người ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình (4.2.2) là hàm số $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ mà ta có được bằng cách cho C_1,C_2 trong nghiệm tổng quát các giá trị C_1^0, C_2^0 thoả mãn điều kiện (4.2.3).

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.2) dưới dạng tường minh $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ mà tìm được một hệ thức có dạng $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$ thoả mãn phương trình đã cho.

Hệ thức $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.2) dưới dạng ẩn được gọi là *tích phân tổng quát* của nó.

Khi đó, $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$ xác định nghiệm riêng của phương trình và hệ thức đó được gọi là *tích phân riêng*, trong đó C_1^0 và C_2^0 thoả mãn điều kiện ban đầu $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2

2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình vi phân có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{4.2.4}$$

trong đó: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là những hàm số liên tục.

Phương trình được gọi là *thuần nhất* nếu $f(x) \equiv 0$, là *không thuần nhất* nếu $f(x) \neq 0$.

Ví dụ 1: $y'' + (2x+1)y' + (x^2+1)y = x - 5$.

Ví dụ 2: $y'' + (2x+1)y' + (x^2+1)y = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng của phương trình trên.

2.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.2.5}$$

2.2.1. Định lý 1

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (4.2.5) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1 và C_2 là hai hằng số, cũng là nghiệm của phương trình đó.

Chứng minh: Vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (4.2.5) nên

$$y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1 = 0$$
$$y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2 = 0$$

Nhân phương trình trên với C_1, nhân phương trình dưới với C_2 rồi cộng lại ta được

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

Vậy: $C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (4.2.5).

2.2.2. Định nghĩa

Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trên đoạn $[a,b]$ nếu tỷ số $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ khác hằng số trên đoạn đó. Trong trường hợp trái lại, hai hàm số ấy được gọi là *phụ thuộc tuyến tính*.

Ví dụ: Hai hàm số sinx và cosx độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$ vì:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg}x \text{ khác hằng số trên } \mathbb{R}.$$

Hai hàm số $2e^x$ và $7e^x$ phụ thuộc tuyến tính vì: $\dfrac{2e^x}{7e^x} = \dfrac{2}{7}$.

2.2.3. Định lý 2

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (4.2.5) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý, là nghiệm tổng quát của phương trình ấy.

Ta không chứng minh định lý này.

Ví dụ: Phương trình $y'' + y = 0$ có hai nghiệm riêng $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính, vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

với C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Chú ý: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính của phương trình (4.2.5), ta có $y_1(x) = Ky_2(x)$, với K là một hằng số nào đó. Do đó biểu thức $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, C_1 và C_2 là hai hằng số tuỳ ý, có thể viết $y = (C_1K + C_2)y_2(x)$, nó thực sự chỉ phụ thuộc một hằng số tuỳ ý, nên không là nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.5).

Định lý sau đây cho ta cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên nếu biết một nghiệm riêng khác không của nó.

2.2.4. Định lý 3

Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (4.2.5), ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$, có dạng $y_2(x) = y_1(x).u(x)$.

Chứng minh: Đặt $y = y_1(x).u(x)$. Ta cần tìm u(x) sao cho y thoả mãn phương trình (4.2.5). Ta có:

$$y' = y'_1 u + y_1 u';$$
$$y'' = y''_1 u + 2y'_1 u' + y_1 u''.$$

Thế vào phương trình (4.2.5), ta được

$$y_1 u'' + (2y'_1 + py_1)u' + (y''_1 + py'_1 + qy_1)u = 0.$$

Nhưng $y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0$, vì y_1 là một nghiệm của (4.2.5).

Vậy ta được phương trình cấp 2 đối với u, khuyết u:

$$y_1 u'' + (2y'_1 + py_1)u' = 0.$$

Đặt $u' = v$, ta được phương trình cấp 1 đối với v

$$y_1 v' + (2y'_1 + py_1)v = 0$$

$$\text{hay} \quad \frac{dv}{v} = -\left(\frac{2y'_1}{y_1} + p\right)dx.$$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx = -2\ln|y_1| + \varphi(x) + \ln|C_1|$$

$$\Rightarrow v = C_1 \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} = C_1 g(x), \quad \text{với} \quad g(x) = \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2}.$$

Do đó : $$u = C_1 \int g(x)dx = C_1 G(x) + C_2$$

trong đó: G(x) là một nguyên hàm của g(x).

Vậy: $$y = [C_1 G(x) + C_2]y_1 = C_1 y_1 G(x) + C_2 y_1.$$

Chọn $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, ta được $y_2 = y_1 G(x)$, đó là một nghiệm của (4.2.5), độc lập tuyến tính với y_1, vì

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = G'(x) = g(x) = \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} \neq 0.$$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Giải: Dễ thấy rằng, $y_1 = x$ là một nghiệm riêng. Ta tìm một nghiệm riêng khác, có dạng $y_2 = x.u(x)$. Ta có:

$$y'_2 = u + xu';$$

$$y''_2 = 2u' + xu''.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được:

$$(1 - x^2)(2u' + xu'') + 2x(u + xu') - 2xu = 0 \quad \text{hay} \quad u''x(1 - x^2) + 2u' = 0.$$

Đặt $u' = v$, ta có:

$$v'x(1-x^2)+2v=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x(1-x^2)}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln|v|=-2\ln|x|+\ln\left|1-x^2\right|+\ln|K_1| \Rightarrow v=K_1\frac{1-x^2}{x^2}=K_1\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$$

trong đó: K_1 là hằng số tuỳ ý.

Chọn $K_1=-1$ ta được $v=1-\frac{1}{x^2}$, do đó:

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow u=x+\frac{1}{x}+K_2.$$

Chọn $K_2=0$, ta được $u=x+\frac{1}{x}$, vậy $y_2=xu=x^2+1$.

Hai nghiệm $y_1=x$, $y_2=x^2+1$ là độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=C_1x+C_2(x^2+1)$$

trong đó: C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất có dạng

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{4.2.6}$$

2.3.1. Định lý 1

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (4.2.6) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (4.2.6) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Chứng minh: Thật vậy, gọi $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.5), Y là một nghiệm riêng nào đó của phương trình (4.2.6).

Đặt $y=\bar{y}+Y$. Ta có $y'=\bar{y}'+Y'$, $y''=\bar{y}''+Y''$. Thế vào phương trình (4.2.6) ta được:

$$\begin{aligned}y''+p(x)y'+q(x)y&=\bar{y}''+Y''+p(x)(\bar{y}'+Y')+q(x)(\bar{y}+Y)\\&=\left[\bar{y}''+p(x)\bar{y}'+q(x)\bar{y}\right]+\left[Y''+p(x)Y'+q(x)Y\right]\end{aligned}$$

Theo giả thiết:

$$\overline{y}''+p(x)\overline{y}'+q(x)\overline{y}=0;$$
$$Y''+p(x)Y'+q(x)Y=f(x)$$

do đó: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$.

Vậy $y=\overline{y}+Y$ cũng là nghiệm của phương trình (4.2.6). Vì $\overline{y}$ phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý nên $y=\overline{y}+Y$ cũng phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý, do đó nó là nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.6).

***2.3.2. Định lý 2** (Nguyên lý chồng chất nghiệm)*

Cho phương trình: $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$. Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$; $y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ thì $y=y_1(x)+y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Chứng minh: Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} y''+p(x)y'+q(x)y &= (y_1+y_2)''+p(x)(y_1+y_2)'+q(x)(y_1+y_2) \\ &= \left[y''_1+p(x)y'_1+q(x)y_1\right]+\left[y''_2+p(x)y'_2+q(x)y_2\right] \\ &= f_1(x)+f_2(x). \end{aligned}$$

Vậy $y=y_1(x)+y_2(x)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2 CÓ HỆ SỐ KHÔNG ĐỔI

3.1. Phương trình thuần nhất

3.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi thuần nhất là phương trình có dạng:

$$y''+py'+qy=0 \tag{4.2.7}$$

trong đó: p, q là hai hệ số hằng số.

3.1.2. Cách giải

Ta biết rằng, muốn tìm nghiệm tổng quát của nó chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng

$$y=e^{kx} \tag{4.2.8}$$

trong đó k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm.

Ta có: $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, thế vào phương trình (4.2.7) được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$, ta có $k^2 + pk + q = 0$. (4.2.9)

Vậy, nếu k thoả mãn phương trình (4.2.9) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm riêng của phương trình (4.2.7). Phương trình (4.2.9) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (4.2.7).

Xét hai trường hợp sau:

– *Trường hợp 1*: Phương trình đặc trưng (4.2.9) có hai nghiệm thực phân biệt k_1 và k_2, khi ấy phương trình (4.2.7) có hai nghiệm

$$y_1 = e^{k_1x}, \quad y_2 = e^{k_2x}.$$

Hai nghiệm này độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x}$ khác hằng số. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (4.2.7) là $y = C_1e^{K_1x} + C_2e^{K_2x}$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $y'' + 2y' - 3y = 0$ thoả mãn các điều kiện

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 + 2k - 3 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $k_1 = 1, k_2 = -3$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x}.$$

Do đó $y' = C_1e^x - 3C_2e^{-3x}$.

Từ các điều kiện ban đầu, ta có: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 3C_2 = 1 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $C_1 = \dfrac{1}{4}$, $C_2 = -\dfrac{1}{4}$, vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

– *Trường hợp 2*: Phương trình đặc trưng (3.2.9) có hai nghiệm thực trùng nhau $k_1 = k_2$. Ta đã có một nghiệm riêng của phương trình (4.2.7) là $y_1 = e^{k_1x}$.

Ta sẽ tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng

$$y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}.$$

Ta có:

$$y'_2 = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x};$$
$$y''_2 = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}.$$

Thế vào phương trình (4.2.7), ta được

$$e^{k_1x}\left[u''+(2k_1+p)u'+(k_1^2+pk_1+q)u\right] = 0.$$

Vì k_1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, nên ta có

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0\ ,\ k_1 = \frac{-p}{2}\ \text{ hay }\ 2k_1 + p = 0.$$

Do đó $e^{k_1x}u'' = 0$ hay $u'' = 0$. Suy ra u = Ax + B, trong đó A, B là những hằng số tuỳ ý. Chọn A = 1, B = 0 ta được u = x, vậy $y_2(x) = xe^{k_1x}$.

Như vậy, hai nghiệm độc lập tuyến tính của (4.2.7) là

$$y_1(x) = e^{k_1x},\quad y_2(x) = xe^{k_1x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (4.2.7) là: $y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$.

Ví dụ: Giải phương trình: $y''+2y'+4y = 0$.

Giải: Phương trình đặc trưng của nó là $k^2 + 2k + 4 = 0$, có nghiệm kép k = –2, vậy nghiệm tổng quát là: $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$; C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

3.2. Phương trình không thuần nhất

3.2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi không thuần nhất là phương trình có dạng: $y''+py'+qy = f(x)$ (4.2.10)

trong đó: p, q là những hệ số hằng số.

3.2.2. Cách giải

Nghiệm tổng quát của (4.2.10) bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (4.2.7) cộng với nghiệm riêng của (4.2.10).

Trong phần này ta chỉ nghiên cứu cách tìm nghiệm riêng của phương trình (4.2.10) trong trường hợp:

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) \qquad (4.2.11)$$

trong đó: $P_n(x)$ là một đa thức bậc n của x và α là một hằng số.

Tìm một nghiệm riêng của (4.2.10) dưới dạng:

$$y = e^{\alpha x}Q_n(x) \qquad (4.2.12)$$

trong đó: $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_n(x)$ và có (n + 1) hệ số chưa biết.

Xác định các hệ số đó như sau:

Lấy đạo hàm hai vế của (4.2.12) ta có:

$$y' = \alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + Q'_n(x)e^{\alpha x};$$
$$y'' = \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q'_n(x)e^{\alpha x} + Q''_n(x)e^{\alpha x}.$$

Thế y, y', y'' vào (4.2.10) và rút gọn lại ta được

$$\alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q'_n(x)e^{\alpha x} + Q''_n(x)e^{\alpha x} + p\alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + pQ'_n(x)e^{\alpha x} + qe^{\alpha x}Q_n(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$$

$$\Rightarrow\ e^{\alpha x}\left[Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)\right] = e^{\alpha x}P_n(x)$$

$$\Rightarrow\ Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x). \qquad (4.2.13)$$

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (bao gồm cả trường hợp phương trình đặc trưng vô nghiệm) thì $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, do đó vế trái của (4.2.13) cũng là một đa thức bậc n cùng với đa thức ở vế phải.

Đồng nhất các hệ số của luỹ thừa cùng bậc của x ở hai vế của (4.2.13) ta tìm được các hệ số của đa thức $Q_n(x)$ ((n + 1) hệ số từ (n + 1) phương trình).

Phương pháp xác định hệ số của $Q_n(x)$ như trên được gọi là *phương pháp hệ số bất định.*

– Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \text{ và } 2\alpha + p \neq 0.$$

Trong trường hợp này đa thức ở vế trái không còn là bậc n nữa mà là bậc (n – 1).

– Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \text{ và } 2\alpha + p = 0.$$

Trong trường hợp này đa thức ở vế trái không còn là bậc n nữa mà là bậc (n – 2).

Muốn cho hàm ở dạng (4.2.12) nghiệm đúng phương trình (4.2.10) thì ta phải nâng bậc của đa thức $Q_n(x)$ lên một hay hai bậc tuỳ theo α là nghiệm đơn hay nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

+ *Trường hợp 1:* Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng phải tìm của (4.2.10) có dạng:

$$y = xe^{\alpha x}Q_n(x).$$

+ *Trường hợp 2:* Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của (4.2.10) có dạng:

$$y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n mà các hệ số của nó ta có thể tìm bằng phương pháp hệ số bất định ở trên.

Ví dụ 1: Hãy tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 2y' + y = 1 + 2x.$$

Giải: Phương trình đặc trưng có dạng: $k^2 - 2k + 1 = 0$.

Trong trường hợp này $\alpha = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$y = e^{\alpha x}(Ax + B) = Ax + B.$$

Thế y, y', y" vào phương trình đã cho, ta được:

$$Ax + B - 2A = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B - 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y = 2x + 5$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - 3y' + 2y = e^x(4 + 3x)$.

Giải: Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng: $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Giải phương trình đặc trưng ta được $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Mặt khác, $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$$

$$\Rightarrow y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B)$$

$$\Rightarrow y'' = e^x(Ax^2 + Bx) + 2e^x(2Ax + B) + e^x 2A.$$

Thế vào phương trình đã cho và rút gọn ta được:

$$e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+2(B+A)\right]-3e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right]+2e^x(Ax^2+Bx)=e^x(4+3x)$$

$$\Rightarrow Ax^2+(B+4A)x+2(B+A)-3Ax^2-3(B+2A)x-3B+2(Ax^2+Bx)=4+3x$$

$$\Rightarrow (Ax^2+2Ax^2-3Ax^2)+(B+4A-3B-6A+2B)x+2B+2A-3B=4+3X$$

$$\Rightarrow -2Ax+(2A-B)=4+3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2A=3\\2A-B=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{3}{2}\\B=-7\end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là: $y=e^x\left(-\dfrac{3}{2}x^2-7x\right)$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{3}{2}x^2+7x\right)e^x.$$

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Giải phương trình: $y''-2y'-3y=0$.

Kết quả:

A. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ B. $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$

C. $y=e^{-x}(C_1+C_2e^{3x})$ D. Kết quả khác.

2. Giải phương trình: $y''-8y'+16y=0$.

Kết quả:

A. $y=e^{4x}(C_1+C_2x)$ B. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$

C. $y=e^{4x}C_1+C_2x$ D. Kết quả khác.

3. Giải phương trình: $y''+2y'+y=e^x(1+3x)$.

Kết quả:

A. $y=\dfrac{e^x}{4}(3x-2)$ B. $y=\dfrac{e^x}{4}(3x+2)$

C. $y=e^x(3x-2)$ D. Kết quả khác.

4. Giải phương trình: $y'' + y' - 6y = e^{2x}(1 + x)$.

Kết quả:

A. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{5}xe^{2x}$ B. $y = C_1(e^{2x} + e^{-3x}) + \frac{1}{5}xe^{2x}$

C. $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{5}xe^{2x}$ D. Kết quả khác.

5. Giải phương trình: $y'' + 2y' + y = e^x + 3x$.

Kết quả:

A. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + 3x - 6$

B. $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{4}e^x + 3x - 6$

C. $y = C_1 e^x + C_2xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x + 3x - 6$

D. Kết quả khác.

Bài 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

MỤC TIÊU

Học xong bài này sinh viên có khả năng:

1. Trình bày được bốn dạng phương trình vi phân ứng dụng thường gặp trong y sinh học: phương trình phát triển tế bào, phương trình phát triển dịch, phương trình phát triển dân số của quần thể biệt lập hoặc không biệt lập.

2. Tìm được nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của bốn dạng phương trình nêu trên.

3. Biện luận và dự báo được số phần tử mắc dịch, dân số của quần thể nghiên cứu.

1. PHƯƠNG TRÌNH PHÁT TRIỂN VI KHUẨN (HOẶC TẾ BÀO)

1.1. Xây dựng phương trình

Gọi: x là sinh khối của vi khuẩn (đơn vị: nghìn, triệu vi khuẩn), xem $x = x(t)$ là hàm liên tục;

t là thời gian (đơn vị: giờ, ngày);

k là hệ số phát triển của vi khuẩn ($k > 0$).

Khi nuôi vi khuẩn người ta nhận thấy: tại thời điểm t tốc độ phát triển vi khuẩn tỷ lệ với hệ số, với sinh khối của vi khuẩn, dẫn đến phương trình:

$$x'_t = kx \qquad (4.3.1)$$

1.2. Giải phương trình

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = k\,dt \quad \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int k\,dt \quad \Rightarrow \ln|x| = kt + C$$

$\Rightarrow x = Ce^{kt}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.3.1).

Vì x là sinh khối của vi khuẩn nên $x > 0$, $C > 0$.

Giả sử lúc bắt đầu nghiên cứu ta có sinh khối của vi khuẩn là x_0, khi đó coi $t = 0$ ta có: $x_0 = Ce^{k*0} = C$.

Vậy nghiệm riêng của phương trình (4.3.1) ứng với điều kiện đã cho là $x = x_0e^{kt}$.

Tóm lại: $x' = kx$; $x|_{t=0} = x_0$, $k > 0 \Rightarrow x = x_0\, e^{kt}$ (phương trình phát triển vi khuẩn).

1.3. Khảo sát nghiệm

Xét hàm: $x = x_0e^{kt}$ $(k > 0)$.

– Tập xác định: $\forall t \in \mathbb{R}$.

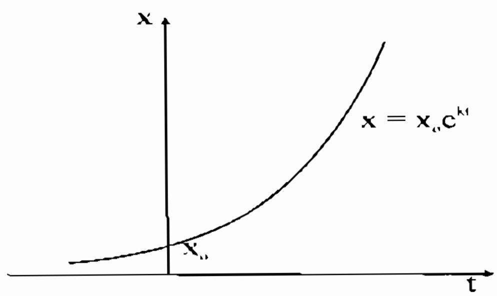
– $x' = x_0ke^{kt}$, ta có: $x' > 0$.

– Tiệm cận ngang $x = 0$ vì $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

– Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	∞
x'	+		+
x	0	x_0	$+\infty$

– Đồ thị



Nhận xét: Sinh khối của vi khuẩn tăng theo quy luật hàm số mũ tương ứng với thời gian và k là hệ số phát triển.

2. PHƯƠNG TRÌNH PHÁT TRIỂN DỊCH

Điều kiện bài toán:

– Dịch không chữa được, quần thể cần cách ly với xung quanh.

– Bệnh dịch truyền từ người mắc bệnh sang người chưa mắc bệnh.

– Thời gian mắc bệnh dài hơn thời gian truyền bệnh.

2.1. Xây dựng phương trình

Gọi: t là thời gian (đơn vị: ngày)

x là số phần tử bị nhiễm dịch (đơn vị: 1, trăm, nghìn...), xem x = x(t) là hàm liên tục.

y là số phần tử chưa bị nhiễm dịch (đơn vị: 1, trăm, nghìn...), xem y = y(t) là hàm liên tục.

Giả sử lúc phát hiện dịch (khi t = 0) có số bị nhiễm dịch x = a và số chưa bị nhiễm dịch là y = b.

Quần thể bị dịch sẽ được cô lập (cách ly với môi trường xung quanh) khi đó ta luôn có:

$$x + y = a + b.$$

Tại thời điểm t tốc độ phát triển dịch tỷ lệ với hệ số phát triển của dịch, tỷ lệ với sự tiếp xúc giữa phần tử bị nhiễm dịch và phần tử chưa bị nhiễm dịch, dẫn đến phương trình sau:

$$x_t' = \alpha xy = \alpha x(a + b - x) \tag{4.3.2}$$

với α là hệ số phát triển dịch ($\alpha > 0$).

Tại thời điểm t phương trình giảm số phần tử chưa bị dịch tỷ lệ với hệ số giảm của số phần tử chưa bị dịch, tỷ lệ với sự tiếp xúc giữa phần tử bị dịch và phần tử chưa bị dịch, dẫn đến phương trình sau:

$$y_t' = -\beta xy = -\beta y(a + b - y) \tag{4.3.3}$$

với β là hệ số giảm số chưa bị dịch ($\beta > 0$).

2.2. Giải phương trình

Trước hết xét phương trình (4.3.2):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(a+b-x);\ x\big|_{t=0} = a$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x(a+b-x)} = \alpha dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x(a+b-x)} = \int \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \int \frac{a+b-x+x}{x(a+b-x)} dx = \alpha \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{a+b-x} \right) = \alpha \int dt$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln|a+b-x| = \alpha(a+b)t + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x}{a+b-x}\right| = \alpha(a+b)t + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{a+b-x}\right| = Ce^{\alpha(a+b)t}.$$

Vì x là số phần từ bị dịch $(x > 0)$, $y = a + b - x$ là số phần tử chưa bị dịch $(y > 0)$. Nên ta có:

$$\frac{x}{a+b-x} = Ce^{\alpha(a+b)t}$$

$$\Rightarrow x = (a+b-x)Ce^{\alpha(a+b)t} \Rightarrow x\left(1 + Ce^{\alpha(a+b)t}\right) = (a+b)Ce^{\alpha(a+b)t}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(a+b)Ce^{\alpha(a+b)t}}{1 + Ce^{\alpha(a+b)t}} \quad \text{hay} \quad x = \frac{a+b}{1 + C_1 e^{-\alpha(a+b)t}}$$

gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (4.3.2).

Khi $t = 0$ ta có: $x = a$; $y = b$ và $C = \frac{a}{b}$ hay $C_1 = \frac{b}{a}$.

Vậy nghiệm riêng của phương trình (4.3.2) thoả mãn điều kiện $x\big|_{t=0} = a$ là

$$x = \frac{a+b}{1 + \frac{b}{a} e^{-\alpha(a+b)t}} \text{ (dạng hàm } \varphi(t)\text{)}.$$

2.3. Khảo sát nghiệm

– Xét hàm: $x = \dfrac{a+b}{1 + \frac{b}{a} e^{-\alpha(a+b)t}}$.

– Tập xác định: $\forall t \in \mathbb{R}$.

– $$x' = \frac{\alpha(a+b)^2 \frac{b}{a} e^{-\alpha(a+b)t}}{\left(1 + \frac{b}{a} e^{-\alpha(a+b)t}\right)^2} > 0 \text{ với } \forall t \Rightarrow \text{hàm số luôn đồng biến.}$$

$$x'' = \frac{\alpha^2(a+b)^3\left(\frac{b}{a}e^{-\alpha(a+b)t}-1\right)\frac{b}{a}e^{-\alpha(a+b)t}}{\left(1+\frac{b}{a}e^{-\alpha(a+b)t}\right)^3}.$$

Khi $x'' = 0 \Rightarrow \frac{b}{a}e^{-\alpha(a+b)t} = 1$

$$\Rightarrow e^{-\alpha(a+b)t} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \quad -\alpha(a+b)t = \ln\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\alpha(a+b)}\ln\frac{b}{a} = t_u \ ; \ x = \frac{a+b}{2} = x_u$$

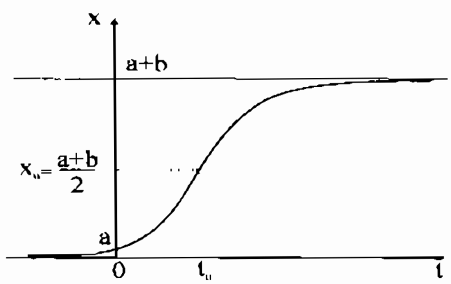
– Tiệm cận ngang: $x = 0$ vì $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t) = 0$;

$$x = a + b \text{ vì } \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = a + b.$$

– Bảng biến thiên

t	$-\infty$		t_u		$+\infty$
x'(t)		+		+	
x"(t)		+	0	–	
x(t)	0	↗			a + b

– Đồ thị



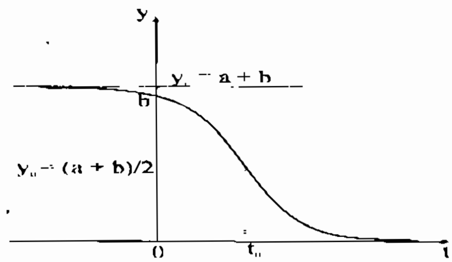
Nhận xét: Khi thời gian tăng, số bị dịch cũng tăng (hàm luôn đồng biến). Từ lúc công bố có dịch đến thời điểm $t = t_u$ dịch phát triển mỗi ngày tăng một nhanh hơn, sau thời gian đó dịch phát triển mỗi ngày một chậm dần. Thời điểm $t = t_u$ là thời điểm dịch phát triển nhanh nhất (đó là điểm uốn của đồ thị).

Tương tự phương trình (4.3.2), giải phương trình (4.3.3) ta có nghiệm:

$$y = \frac{a+b}{1 + \frac{a}{b} e^{\beta(a+b)t}}$$

Bạn đọc tự khảo sát nghiệm của hàm trên.

– Đồ thị:



3. PHƯƠNG TRÌNH PHÁT TRIỂN DÂN SỐ CỦA QUẦN THỂ BIỆT LẬP

Theo dõi số dân, số sinh, số chết của một quần thể trong 5 năm liền, người ta thu được kết quả sau:

Năm	*Số dân*	*Số sinh*	*Số chết*
1996	171447	4220	903
1997	177363	3970	841
1998	179376	3325	843
1999	182011	3084	827
2000	189621	3264	849

Tỷ lệ sinh thô (tỷ suất sinh thô) là tỷ lệ giữa số trẻ sinh ra sống và dân số trung bình trong năm, gọi tắt là TLS.

Tỷ lệ chết thô (tỷ suất chết thô) là tỷ lệ giữa số người chết và dân số trung bình trong năm, gọi tắt là TLC.

Bằng bài toán phương pháp bình phương bé nhất (Bài 4, chương II) ta có thể tìm được phương trình tuyến tính giữa số dân (x) với TLS (s); số dân (x) với TLC (c).

3.1. Xây dựng phương trình

Gọi: x là số dân (đơn vị: 1, trăm, nghìn...), xem x = x(t) là hàm liên tục;
t là thời gian (đơn vị: năm).

Với quần thể biệt lập, trong khoảng thời gian Δt (từ thời điểm t_0 đến $t_0 + \Delta t$) với Δt đủ bé, số dân tăng Δx phụ thuộc vào số cá thể mới sinh Δx_1 và số cá thể chết Δx_2.

Tức là: $$\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2 = (s - c)x\Delta t \tag{4.3.4}$$

trong đó: s là tỷ lệ sinh (đơn vị: 1, %, $^0/_{00}$)

c là tỷ lệ chết (đơn vị: 1, %, $^0/_{00}$)

Biết rằng tỷ lệ sinh và tỷ lệ chết luôn phụ thuộc vào số dân theo hàm tương quan tuyến tính bậc nhất.

Trường hợp 1:	$s = s_0 - s_1x$	TLS tương quan nghịch biến
	$c = c_0 - c_1x$	TLC tương quan nghịch biến
Trường hợp 2:	$s = s_0 - s_1x$	TLS tương quan nghịch biến
	$c = c_0 + c_1x$	TLC tương quan đồng biến
Trường hợp 3:	$s = s_0 + s_1x$	TLS tương quan đồng biến
	$c = c_0 - c_1x$	TLC tương quan nghịch biến
Trường hợp 4:	$s = s_0 + s_1x$	TLS tương quan đồng biến
	$c = c_0 + c_1x$	TLC tương quan đồng biến

Ở đây: $s_0, s_1, c_0, c_1 > 0$.

Quy luật thông thường dân số của nước ta hiện tại đang phát triển theo trường hợp 1:

Vì vậy thay s, c vào (4.3.4) ta dẫn đến phương trình:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = (s - c)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = (s - c)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = ((s_0 - s_1x) - (c_0 - c_1x))x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = (s_0 - c_0)x - (s_1 - c_1)x^2$$

Đặt: $\varepsilon = s_0 - c_0$;

$h = s_1 - c_1$, trong đó $\varepsilon, h > 0$.

Ta có phương trình:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - hx^2 \text{ (phương trình Verhunt).} \tag{4.3.5}$$

3.2. Giải phương trình

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - hx^2, \text{ điều kiện } x\big|_{t=0} = x_0.,$$

Ta có:

$$\frac{dx}{x\left(\frac{\varepsilon}{h} - x\right)} = h\,dt \qquad \Rightarrow \frac{h}{\varepsilon}\int \frac{\frac{\varepsilon}{h} - x + x}{x\left(\frac{\varepsilon}{h} - x\right)}dx = \int h\,dt$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{\frac{\varepsilon}{h} - x} = \varepsilon\int dt \qquad \Rightarrow \ln|x| - \ln\left|\frac{\varepsilon}{h} - x\right| = \varepsilon t + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x}{\frac{\varepsilon}{h} - x}\right| = \varepsilon t + C \qquad \Rightarrow \left|\frac{x}{\frac{\varepsilon}{h} - x}\right| = Ce^{\varepsilon t}.$$

– Nếu $0 < x < \frac{\varepsilon}{h}$:

$$\frac{x}{\frac{\varepsilon}{h} - x} = Ce^{\varepsilon t} \qquad \Rightarrow \qquad x = \left(\frac{\varepsilon}{h} - x\right)Ce^{\varepsilon t}$$

$$\Rightarrow x\left(1 + Ce^{\varepsilon t}\right) = \frac{\varepsilon}{h}Ce^{\varepsilon t} \qquad \Rightarrow x = \frac{\frac{\varepsilon}{h}Ce^{\varepsilon t}}{1 + Ce^{\varepsilon t}} = \frac{\frac{\varepsilon}{h}}{1 + \frac{1}{C}e^{-\varepsilon t}} \quad (*)$$

Đặt $x_c = \frac{\varepsilon}{h}$.

Khi $t = 0$ ta có $C = \frac{x_0}{x_c - x_0}$ thay vào (*) ta có

$$x = \frac{x_c}{1 + \frac{x_c - x_0}{x_0}e^{-\varepsilon t}} \quad \text{dạng hàm } \varphi(t).$$

– Nếu $x > \frac{\varepsilon}{h}$: $\quad \frac{x}{x - \frac{\varepsilon}{h}} = Ce^{\varepsilon t} \Rightarrow x = \left(x - \frac{\varepsilon}{h}\right)Ce^{\varepsilon t}$

$$\Rightarrow x\left(Ce^{\varepsilon t} - 1\right) = \frac{\varepsilon}{h}Ce^{\varepsilon t} \Rightarrow x = \frac{\frac{\varepsilon}{h}Ce^{\varepsilon t}}{Ce^{\varepsilon t} - 1} = \frac{\frac{\varepsilon}{h}}{1 - \frac{1}{C}e^{-\varepsilon t}}.$$

Đặt $x_c = \frac{\varepsilon}{h}$:

Khi t = 0 ta có $C = \frac{x_0}{x_0 - x_c}$ thay vào (*) ta có

$$x = \frac{x_c}{1 - \frac{x_0 - x_c}{x_0} e^{-\varepsilon t}} \text{ dạng hàm } \psi(t).$$

3.3. Khảo sát nghiệm

3.3.1. Khảo sát nghiệm $x = \frac{x_c}{1 + \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}}$ dạng hàm $\varphi(t)$

– Tập xác định: $\forall t \in \mathbb{R}$.

– $$\varphi'(t) = \frac{\varepsilon x_c \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}}{\left(1 + \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}\right)^2} > 0 \text{ với } \forall t \Rightarrow \text{Hàm số luôn đồng biến.}$$

$$\varphi''(t) = \frac{\varepsilon^2 x_c \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}\left(\frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t} - 1\right)}{\left(1 + \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}\right)^3}$$

$$\varphi'' = 0 \Rightarrow \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t} = 1 \Rightarrow e^{-\varepsilon t} = \frac{x_0}{x_c - x_0} \Rightarrow t = \frac{1}{\varepsilon} \ln\left|\frac{x_c - x_0}{x_0}\right| = t_u$$

Tại $t = t_u$, φ'' đổi dấu từ (+) sang (–) nên t_u là hoành độ điểm uốn.

– Tiệm cận:

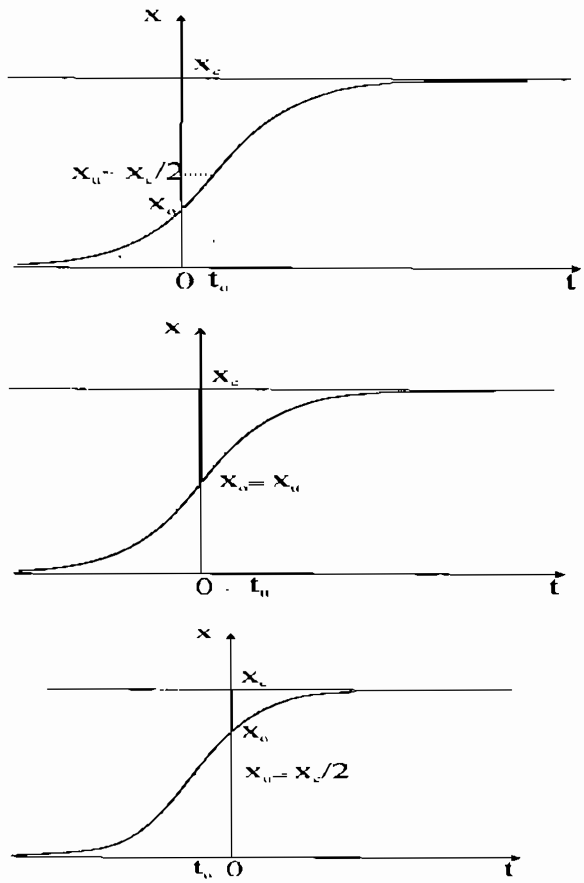
$\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = 0 \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận ngang;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = x_c \Rightarrow x = x_c$ là tiệm cận ngang.

– Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		t_u		$+\infty$
x'(t)		+		+	
x''(t)		+	0	–	
x (t)	0	↗		↗	x_c

– Đồ thị:



Nhận xét: Khi thời gian tăng, số dân của quần thể cũng tăng (hàm luôn đồng biến). Thời điểm $t = t_u$ là thời điểm dân số của quần thể phát triển nhanh nhất. x_c là dân số tối đa mà quần thể đạt tới, hay còn gọi là dân số của quần thể khi cân bằng ổn định.

3.3.2. Khảo sát nghiệm $x = \dfrac{x_c}{1 - \dfrac{x_0 - x_c}{x_0} e^{-\varepsilon t}}$ dạng hàm $\psi(t)$

– Tập xác định: $\forall t > \dfrac{1}{\varepsilon} \ln \dfrac{x_0 - x_c}{x_0}$ (vì $x > 0$).

– $$\psi'(t) = \frac{-\varepsilon x_c \dfrac{x_0 - x_c}{x_0} e^{-\varepsilon t}}{\left(1 - \dfrac{x_0 - x_c}{x_0} e^{-\varepsilon t}\right)^2} < 0$$

Hàm số luôn nghịch biến với $\forall t > \dfrac{1}{\varepsilon} \ln \dfrac{x_0 - x_c}{x_0}$.

$\psi''(t) > 0$.

– Tiệm cận:

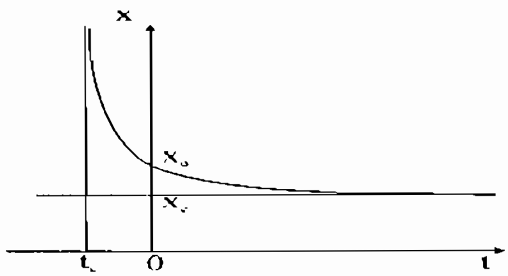
$\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \infty \Rightarrow t = t_0$ là tiệm cận đứng, ở đây $t_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} \ln \dfrac{x_0 - x_c}{x_0} < 0$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = x_c \Rightarrow x = x_c$ là tiệm cận ngang.

– Bảng biến thiên:

t	t_0	$+\infty$
$\psi'(t)$	$\Vert$ –	
$\psi(t)$	$+\infty \searrow$	x_c

– Đồ thị:



Nhận xét: $x_c = \dfrac{\varepsilon}{h}$ là dân số lúc cân bằng ổn định. Nếu có những tác động ngẫu nhiên làm cho $x(t)$ chệch khỏi x_c thì sau một thời gian nó lại trở về cân bằng ổn định.

Ta có: $x = \varphi(t) = \dfrac{x_c}{1 + \dfrac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}} = \dfrac{x_c x_0}{x_0 + (x_c - x_0) e^{-\varepsilon t}}$

$$= \frac{x_0}{\dfrac{x_0}{x_c} + \left(\dfrac{x_c - x_0}{x_c}\right) e^{-\varepsilon t}} = \frac{x_0}{\dfrac{x_0}{x_c} + \left(1 - \dfrac{x_0}{x_c}\right) e^{-\varepsilon t}}.$$

Thời kỳ đầu dân số mới bắt đầu phát triển x_0 rất bé $\Rightarrow \dfrac{x_0}{x_c} \approx 0$, khi đó

$$x = \varphi(t) = \frac{x_0}{e^{-\varepsilon t}} = x_0 e^{\varepsilon t}.$$

Ta nhận thấy dân số phát triển theo quy luật hàm mũ. Người ta gọi là *quy luật Mantuyt.*

4. PHƯƠNG TRÌNH PHÁT TRIỂN DÂN SỐ CỦA QUẦN THỂ KHÔNG BIỆT LẬP

4.1. Xây dựng phương trình

Gọi: x là số dân (đơn vị: 1, trăm, nghìn...), xem $x = x(t)$ là hàm liên tục;
t là thời gian (đơn vị: năm).

Với quần thể không biệt lập phương trình phát triển dân số có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - hx^2 + D_e - D_i \qquad (4.3.6)$$

trong đó: D_e là số dân đến quần thể, D_i là số dân đi khỏi quần thể.

Nhờ thống kê người ta thường thấy $D_e - D_i$ là hàm bậc hai của x:

$$D_e - D_i = \eta_0 + \eta_1 x + \eta_2 x^2$$

Thay vào phương trình (4.3.6) ta có:

$$\frac{dx}{dt} = \eta_0 + (\eta_1 + \varepsilon)x - (h - \eta_2)x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -ax^2 + bx + c \qquad (4.3.7)$$

với: $a = h - \eta_2$; $b = \eta_1 + \varepsilon$; $c = \eta_0 \neq 0$.

Nếu $\eta_0 = 0$, $a > 0$, $b > 0$ ta có phương trình dạng (4.3.5) như ở trường hợp quần thể biệt lập đã biết.

Sau đây xét phương trình: $\frac{dx}{dt} = -ax^2 + bx + c$ với $a > 0$, phương trình bậc 2 ở vế phải luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và ít nhất một nghiệm dương.

4.2. Giải phương trình

$$\frac{dx}{dt} = -ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \; x\big|_{t=0} = x_0. \qquad (4.3.8)$$

4.2.1. Trường hợp cả hai nghiệm dương ($0 < x_1 < x_2$)

$$\frac{dx}{dt} = -a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)(x_2 - x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x-x_1)(x_2-x)} = \int a\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-x_1} \int \frac{x-x_1+x_2-x}{(x-x_1)(x_2-x)} dx = a\int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-x_1}\left(\int \frac{dx}{x-x_1} + \int \frac{dx}{x_2-x}\right) = a\int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-x_1}\left(\ln|x-x_1| - \ln|x_2-x|\right) = at + C;\ C \text{ tùy ý}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-x_1} \ln\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right| = at + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right| = (x_2-x_1)at + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right| = Ce^{(x_2-x_1)at}; C>0.$$

– Nếu $0 < x < x_1 < x_2$:

$$\frac{x_1-x}{x_2-x} = Ce^{(x_2-x_1)at}$$

$$\Rightarrow\ x_1 - x = (x_2-x)Ce^{(x_2-x_1)at}$$

$$\Rightarrow x\left(Ce^{(x_2-x_1)at} - 1\right) = x_2Ce^{(x_2-x_1)at} - x_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_2Ce^{(x_2-x_1)at} - x_1}{Ce^{(x_2-x_1)at} - 1}$$

$$\Rightarrow x = x_1 + \frac{(x_2-x_1)Ce^{(x_2-x_1)at}}{Ce^{(x_2-x_1)at} - 1} = x_1 + \frac{x_2-x_1}{1 - \frac{1}{C}e^{-(x_2-x_1)at}} \quad (*)$$

Khi $t = 0$ ta có $C = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$.

Thay vào (**) ta có:

$$x = x_1 + \frac{x_2-x_1}{1 - \frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}e^{-(x_2-x_1)at}} \text{ dạng } x_1 + \psi_1(t).$$

– Nếu $x_1 < x < x_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = Ce^{(x_2-x_1)at}$$

$$\Rightarrow \quad x - x_1 = (x_2 - x)Ce^{(x_2 - x_1)at}$$

$$\Rightarrow x\left(Ce^{(x_2-x_1)at} + 1\right) = x_2 Ce^{(x_2-x_1)at} + x_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_2 Ce^{(x_2-x_1)at} + x_1}{Ce^{(x_2-x_1)at} + 1}$$

$$\Rightarrow x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)Ce^{(x_2-x_1)at}}{Ce^{(x_2-x_1)at} + 1} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 + \frac{1}{C}e^{-(x_2-x_1)at}} \quad (**)$$

Khi $t = 0$ ta có $C = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}$.

Thay vào (**) ta có:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 + \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}e^{-(x_2-x_1)at}} \text{ dạng } x_1 + \varphi(t).$$

– Nếu $x_1 < x_2 < x$:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = Ce^{(x_2-x_1)at}$$

$$\Rightarrow \quad x - x_1 = (x - x_2)Ce^{(x_2-x_1)at}$$

$$\Rightarrow x\left(Ce^{(x_2-x_1)at} - 1\right) = x_2 Ce^{(x_2-x_1)at} - x_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_2 Ce^{(x_2-x_1)at} - x_1}{Ce^{(x_2-x_1)at} - 1}$$

$$\Rightarrow x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)Ce^{(x_2-x_1)at}}{Ce^{(x_2-x_1)at} - 1} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 - \frac{1}{C}e^{-(x_2-x_1)at}} \quad (***)$$

Khi $t = 0$ ta có:

$$C = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}.$$

Thay vào (***) ta có:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 - \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}e^{-(x_2-x_1)at}} \text{ dạng } x_1 + \psi_2(t).$$

4.2.2. Trường hợp có một nghiệm âm và một nghiệm dương ($x_1 < 0 < x_2$)

Giải tương tự như trên:

– Nếu $x_1 < 0 < x < x_2$ thì nghiệm là:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 + \dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2 - x_1)at}} \quad \text{dạng } x_1 + \varphi(t)$$

– Nếu $x_1 < 0 < x_2 < x$ thì nghiệm là:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 - \dfrac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} e^{-(x_2 - x_1)at}} \quad \text{dạng } x_1 + \psi(t)$$

4.3. Khảo sát nghiệm của trường hợp cả hai nghiệm dương $0 < x_1 < x_2$

4.3.1. Khảo sát nghiệm $x = x_1 + \psi_1(t)$

– Tập xác định: $\forall t < t_0$; $t_0 = \dfrac{1}{a(x_2 - x_1)} \ln \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$.

– $$x' = \frac{-(x_2 - x_1)^2 \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} a e^{-(x_2 - x_1)at}}{\left(1 - \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} e^{-(x_2 - x_1)at}\right)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến với mọi t thuộc tập xác định.

– Tiệm cận:

$\lim\limits_{t \to t_0} (x_1 + \psi_1(t)) = -\infty \Rightarrow t = t_0$ là tiệm cận đứng

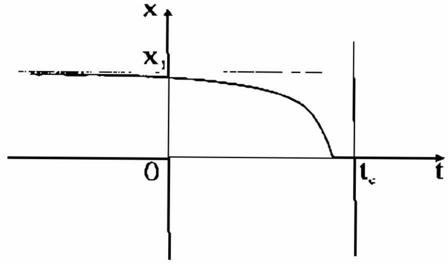
ở đây: $t_0 = \dfrac{1}{a(x_2 - x_1)} \ln \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} (x_1 + \psi_1(t)) = x_1 \Rightarrow x = x_1$ là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	t_0
x'(t)	–	‖
x(t)	x_1	$-\infty$

– Đồ thị hàm số



4.3.3. Khảo sát nghiệm $x = x_1 + \varphi(t)$

– Tập xác định: $\forall t \in \mathbb{R}$.

–
$$x' = \frac{(x_2 - x_1)^2 \dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} a e^{-(x_2-x_1)at}}{\left(1 + \dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2-x_1)at}\right)^2} > 0$$

$$x'' = \frac{(x_2 - x_1)^3 a^2 \dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2-x_1)at}\left(\dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2-x_1)at} - 1\right)}{\left(1 + \dfrac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2-x_1)at}\right)^3}$$

$$x'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} e^{-(x_2-x_1)at} = 1 \;\Leftrightarrow t = \frac{1}{a(x_2 - x_1)} \ln \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} = t_u.$$

Qua $t = t_u$ hàm x" đổi dấu từ (+) sang (–) nên tại $t = t_u$ hàm số có điểm uốn $x_u = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$.

– Tiệm cận:

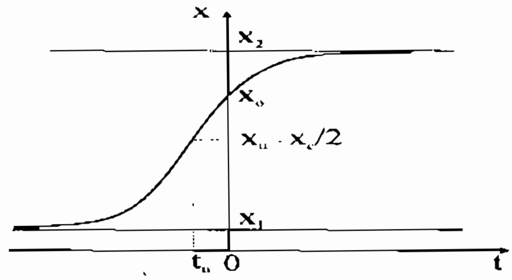
$\lim\limits_{t\to-\infty} (x_1 + \varphi(t)) = x_1 \Rightarrow x = x_1$ là tiệm cận ngang;

$\lim\limits_{t\to+\infty} (x_1 + \varphi(t)) = x_2 \Rightarrow x = x_2$ là tiệm cận ngang.

– Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
x'(t)		+		+	
x"(t)		+	0	–	
x(t)	x_1		$\nearrow$		x_2

– Đồ thị



4.3.3. Khảo sát nghiệm $x = x_1 + \psi_2(t)$

– Tập xác định: $\forall t > \dfrac{1}{a(x_2 - x_1)} \ln \dfrac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}$.

– $$x' = \frac{-(x_2 - x_1)^2 \dfrac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} a\, e^{-(x_2 - x_1)at}}{\left(1 - \dfrac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} e^{-(x_2 - x_1)at}\right)^2} < 0 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến.}$$

– Tiệm cận:

$\lim\limits_{t \to t_0^+} (x_1 + \psi_2(t)) = \infty \Rightarrow t = t_0$ là tiệm cận đứng,

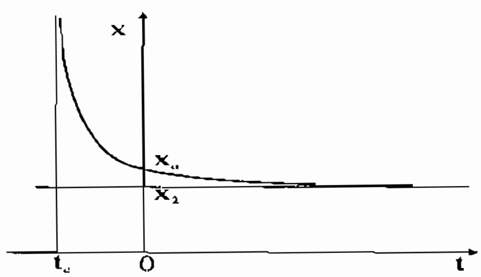
ở đây: $t_0 = \dfrac{1}{a(x_2 - x_1)} \ln \dfrac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} < 0$.

$\lim\limits_{t \to \infty} (x_1 + \psi_2(t)) = x_2 \Rightarrow x = x_2$ là tiệm cận ngang.

– Bảng biến thiên

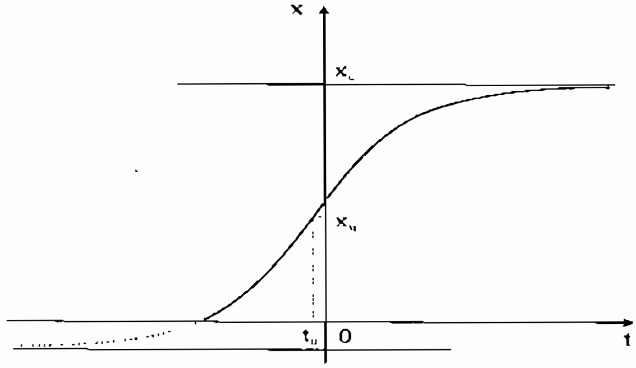
t	t_0	$+\infty$
x'(t)	$\|$ –	
x(t)	$+\infty$ ↘	x_2

– Đồ thị

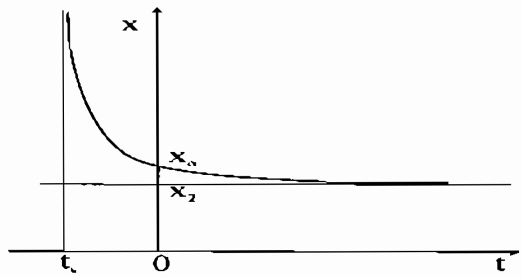


Tương tự, bạn đọc hãy khảo sát nghiệm của trường hợp có một nghiệm âm và một nghiệm dương ($x_1 < 0 < x_2$).

Đồ thị hàm số $x = x_1 + \varphi(t)$



Đồ thị hàm số $x = x_1 + \Psi(t)$



5. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Ở một quần thể sinh vật gồm 5 nghìn phần tử phát sinh một bệnh dịch. Khi phát hiện ra dịch thì đã có 200 phần tử bị nhiễm. Vì bệnh dịch chưa biết, nên người ta tiến hành cô lập quần thể đó lại. Sau 5 ngày theo dõi có thêm 50 phần tử bị nhiễm. Hãy dự báo số phần tử bị nhiễm sau 15 ngày.

Giải:

Gọi: n là số phần tử của quần thể (đơn vị: nghìn);

x là số phần tử bị nhiễm dịch (đơn vị: nghìn);

y là số phần tử chưa bị nhiễm (đơn vị: nghìn);

t là thời gian (đơn vị: ngày).

Khi đó do quần thể bị cô lập nên ta có:

$$x + y = n = 5 \text{ và } x_{(t=0)} = 0{,}2;\ y_{(t=0)} = 4{,}8.$$

Tốc độ phát triển dịch theo thời gian tuân theo phương trình vi phân sau:

$$x'_t = kxy = kx(5 - x) \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) ta được nghiệm là:

$$x = \frac{5}{1 + Ce^{-5kt}},$$

trong đó: $C = \frac{5 - 0,2}{0,2} = 24$.

Mặt khác: $x_{(t=5)} = 0,25$

nên ta có: $0,25 = \frac{5}{1 + 24e^{-5k*5}} \Rightarrow e^{-25k} = 0,791667.$

Khi đó: $x_{(t=15)} = \frac{5}{1 + 24e^{-5k\times15}} = \frac{5}{1 + 24(e^{-25k})^3} = 0,387.$ (đơn vị: nghìn),

tức là có 387 phần tử bị nhiễm dịch.

Ví dụ 2: Sự phát triển dân số của một nước (quần thể biệt lập) có tỷ lệ sinh (s) và tỷ lệ chết (c) tuân theo quy luật :

$s = 49,095970 - 0,0003446x$

$c = 9,310417 - 0,0000397x$

trong đó: x là số dân (đơn vị: nghìn);

s, c (đơn vị: $^0/_{00}$).

Hãy dự báo dân số năm 2000. Cho biết dân số khi cân bằng ổn định. Biết rằng năm 1990 dân số là 65,215 triệu người.

Giải: Xét hiệu $s - c = 39,785553 - 0,0003049x$.

Phương trình dân số của quần thể biệt lập là:

$$\frac{dx}{dt} = (s - c)x = \varepsilon x - hx^2 \qquad (2)$$

với: $\varepsilon = 39,785553$; $h = 0,0003049$.

Khi đó: $x_c = \frac{\varepsilon}{h} = 130487,2$ (đơn vị: nghìn) là dân số lúc cân bằng ổn định.

Chọn năm 1990 ứng với t = 0, do đó $x_0 = 65,215$ (đơn vị: triệu).

$\Rightarrow x_0 = 65215$ (đơn vị: nghìn).

Do $x_c > x_0 > 0$ nên phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $x_{(t=0)} = x_0$, hàm phát triển dân số có dạng

$$x = \frac{x_c}{1 + \frac{x_c - x_0}{x_0} e^{-\varepsilon t}} = \frac{130487,2}{1 + 1,0009\, e^{-0,039785553\, t}} \text{ dạng } \varphi(t)$$

ở đây: $\varepsilon = 0,039785553$ vì ε đã được đổi về đơn vị 1.

Dự báo năm 2000 ứng với t = 10:

$$x_{(t=10)} = \frac{130487,2}{1 + 1,0009e^{-0,039785553 \times 10}} = 78025,6 \text{ (đơn vị: nghìn).}$$

Ví dụ 3: Nghiên cứu sự biến đổi dân số ở một địa phương người ta thấy sự phát triển của dân số biểu diễn bởi phương trình:

$$x'(t) = 323,7 \times 10^{-6}(-x^2 + 123,885x + 124,885)$$

trong đó: x là số dân (đơn vị: trăm nghìn);

t là thời gian (đơn vị: năm).

Giải phương trình tìm hàm số $x = \varphi(t)$ quan hệ giữa số dân và thời gian, biết rằng năm 1990 số dân là 6380000 người.

Giải: Đặt $k = 323,7 \times 10^{-6}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = k(x+1)(124,885 - x)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{k(x+1)(124,885 - x)} = dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{125,885} \ln\left|\frac{x+1}{124,885 - x}\right| = kt + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+1}{124,885 - x}\right| = Ce^{k \times 125,885t}$$

Chọn năm 1990 ứng với t = 0, do đó x_0 = 6380000 người ⇒ x_0 = 63,8 (đơn vị: trăm nghìn).

Do $x_0 < x_2 = 124,885$ nên hàm phát triển dân số có dạng:

$$x = -1 + \frac{125,885}{1 + Ce^{-k \times 125,885\, t}} \text{ dạng } x = -1 + \varphi(t)$$

$$\text{với } C = \frac{124,885 - 63,8}{63,8 + 1} = 0,94267.$$

Dự báo năm 2000 tương ứng với t = 10:

$$x_{(t=10)} = -1 + \frac{125,885}{1 + Ce^{-323,7 \times 10^{-6} \times 125,885 \times 10}}$$

$$= 76,36411 \text{ (đơn vị: trăm nghìn).}$$

Ví dụ 4: Theo dõi dân số của một quần thể trong 5 năm người ta thu được kết quả sau:

Năm	*Số dân (nghìn)*	*TLGT (%)*
1995	72557	1,679
1996	73770	1,636
1997	74970	1,593
1998	76158	1,550
1999	77331	1,508

Tỷ lệ gia tăng dân số = tỷ lệ sinh – tỷ lệ chết.

Hãy cho biết dân số của quần thể khi cân bằng ổn định. Dự báo dân số của quần thể năm 2005. Cho rằng quần thể là biệt lập.

Giải:

Gọi: x là số dân (đơn vị: nghìn);

y là tỷ lệ gia tăng (đơn vị: %).

Phương trình tương quan tuyến tính bậc nhất là:

$$y = 4,280965 - 0,035857.10^{-3}x$$

Phương trình vi phân diễn tả sự phát triển dân số của quần thể theo thời gian t là:

$$x'_t = 4,280965x - 0,035857.10^{-3}x^2$$

Dân số của quần thể khi cân bằng ổn định là: 119389,938 (đơn vị: nghìn).

Dự báo dân số năm 2005: $x_{(t = 6)} = 84037,273$ (đơn vị: nghìn).

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁ

Hãy chọn kết quả đúng:

1. Theo dõi sự phát triển tế bào người ta thấy sự phát triển đó tuân theo phương trình sau:

$$x'_t = kx$$

trong đó: x là số lượng tế bào (đơn vị: mười nghìn);

t là thời gian (đơn vị: giờ).

Dự báo số lượng tế bào sau 5 giờ, biết rằng lúc bắt đầu theo dõi có 52 nghìn phần tử, sau 1 giờ theo dõi có thêm 5 nghìn phần tử.

Kết quả:

A. 8,22926 (đơn vị: mười nghìn) B. 82,2926 (đơn vị: mười nghìn)

C. 5,44426 (đơn vị: mười nghìn) D. Kết quả khác.

2. Theo dõi sự phát triển dân số và tỷ lệ gia tăng dân số của một quần thể biệt lập trong 5 năm, người ta thu được kết quả:

x (đơn vị: nghìn)	171	177	179	182	189
(s – c) (đơn vị: %)	1,95	1,84	1,65	1,58	1,38

Cho biết dân số của quần thể khi cân bằng ổn định.

Kết quả:

A. $x_c = 230{,}529$ (đơn vị: nghìn) B. $x_c = 228{,}298$ (đơn vị: nghìn)

C. $x_c = 230529$ (đơn vị: nghìn) D. Kết quả khác.

3. Theo dõi sự phát triển dịch của một quần thể được cách ly với xung quanh thấy tuân theo phương trình sau:

$$x'_t = 0{,}00052x(8{,}5 - x)$$

trong đó: x là số dân mắc dịch (đơn vị: nghìn);

t là thời gian (đơn vị: ngày).

Hãy giải phương trình trên biết rằng khi công bố dịch thì đã có 550 phần tử bị dịch.

Kết quả:

A. $x'_t = \dfrac{8{,}5}{1 + 14{,}45e^{-0{,}00442t}}$ B. $x'_t = \dfrac{8{,}5}{1 + 0{,}0692e^{-0{,}00442t}}$

C. $x'_t = \dfrac{8{,}5}{1 + 14{,}45e^{-0{,}00052t}}$ D. Kết quả khác.

4. Sự phát triển dân số của quần thể biệt lập tuân theo phương trình sau:

$$x'_t = 0{,}0352x - 0{,}000315x^2$$

trong đó: x là số dân (đơn vị: nghìn);

t là thời gian (đơn vị: năm).

Hãy cho biết dân số của quần thể sau 5 năm biết rằng tại thời điểm nghiên cứu dân số của quần thể là 82500 người.

Kết quả:

A. $x_{(t=5)} = 86138$ (người) B. $x_{(t=5)} = 86000$ (người)

C. $x_{(t=5)} = 88558$ (người) D. Kết quả khác.

5. Theo dõi sự phát triển dân số, tỷ lệ gia tăng dân số và tỷ lệ đến – đi của một quần thể không biệt lập trong 5 năm người ta thu được kết quả:

$$s - c = 0{,}076035 - 0{,}3299.10^{-3}x$$

$$Đ_e - Đ_i = 6{,}259 - 0{,}0704x + 0{,}1980.10^{-3}x^2$$

Hãy xây dựng phương trình phát triển dân số của quần thể đó. Biết rằng x là số dân (đơn vị: nghìn).

Kết quả:

A. $x_t' = 6{,}259 + 75{,}9646x - 0{,}329702x^2$

B. $x_t' = 6{,}259 - 0{,}005635x - 0{,}1319x^2$

C. $x_t' = -6{,}259 + 0{,}146435x - 0{,}5279x^2$

D. Kết quả khác.

BÀI TẬP

Chương I. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. MA TRẬN

1.1. Cho $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm $AB + (AB)^t$.

1.2. Tính

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ 2) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$

2. ĐỊNH THỨC

1.3. Giải các phương trình:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$

1.4. Chứng minh:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

1.5. Tính định thức:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ bằng cách khai triển nó theo các phần tử của hàng 3.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$ bằng cách khai triển nó theo các phần tử của cột bốn.

1.6. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

1.7. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

b) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a-b)^2[(a+b)^2 - 4x^2]$

1.8. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$

1.9. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$

1.10. Dãy Fibonacci là dãy số 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., trong đó mỗi số hạng là tổng của hai số hạng đứng liền trước và hai số đầu tiên là 1, 2.

Chứng tỏ rằng số hạng thứ n của dãy Fibonacci bằng định thức cấp n sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.11. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

1.12. Áp dụng định lý Cramer giải các hệ sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

1.13. Áp dụng phương pháp Gauss giải hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad = 3 \end{cases}$$

1.14. a) Với các giá trị nào của a thì hệ sau đây không có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$$

b) Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

1.15. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 15 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 25x_4 = 17 \\ 2x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 19x_4 = 30 \\ 5x_1 + 19x_2 - 7x_3 - 32x_4 = 61 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$

Chương II. HÀM SỐ, ĐẠO HÀM, VI PHÂN – ỨNG DỤNG

1. HÀM SỐ

2.1. Tìm hàm ngược của các hàm số sau:

a) $y = \begin{cases} x & \text{với } x \le 0 \\ x^2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$

c) $y = 4\arcsin\sqrt{1 - x^2}$ d) $y = 1 + 2\sin\dfrac{x - 1}{x + 1}$

2.2. Chứng minh các công thức:

a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ b) $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arccotg}x = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ d) $\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x} = \operatorname{arctg}x$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.3. Tính đạo hàm cấp 2 các hàm số sau:

a) $y = x.e^{x^2}$ b) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg}x$

c) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$ d) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

e) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ g) $y = e^{\sqrt{x}}$

h) $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$ i) $y = \sqrt{1-x^2}.\arcsin x$

2.4. Tính đạo hàm cấp cao của các hàm sau:

a) $y = \dfrac{e^x}{x}$, tính $y^{(10)}$ b) $y = ax^{-m}$, tính $y^{(10)}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$, tính $y^{(10)}$ d) $y = x^2e^{2x}$, tính $y^{(20)}$

e) $y = x\operatorname{sh}x$, tính $y^{(100)}$

2.5. Tính đạo hàm cấp n các hàm số sau:

a) $y = e^{ax}$ b) $y = \sin ax + \cos bx$

c) $y = \sin^2 x$ d) $y = x.e^x$

e) $y = x.\ln x$ g) $y = \ln(ax + b)$

h) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ i) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

k) $y = \sin^3 x$ l) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM KHẢ VI

2.6. Khai triển Maclaurin đến bậc n các hàm số sau:

a) $y = e^x$ b) $y = \cos x$

c) $y = \sin x$ d) $y = \ln(1 + x)$

e) $y = (1 + x)^\alpha$ g) $y = \operatorname{arctg}x$

2.7. Khai triển Maclaurin các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ đến số hạng x^2

b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ đến số hạng x^5

c) $f(x) = \ln\cos x$ đến số hạng x^6.

2.8. Khai triển Taylor bậc 3 các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \arcsin x$ tại $x_0 = 0$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại $x_0 = 1$

d) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ theo $(x + 1)$

e) $y = x^4 + 4x^2 - x + 3$ tại $x_0 = 1$.

2.9. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng phương pháp L/Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} x^2.e^{\frac{1}{x^2}}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\dfrac{a}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

2.10. Khảo sát các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ trong đó: μ và σ là tham số; $\sigma > 0$.

b) $x = \dfrac{x_c}{1 + A\,e^{-\varepsilon t}}$ dạng $\varphi(t)$ với x_c, A, ε các tham số dương đã biết.

c) $x = \dfrac{x_c}{1 - A\,e^{-\varepsilon t}}$ dạng $\Psi(t)$ với x_c, A, ε các tham số dương đã biết.

d) $y = \dfrac{y_c}{1 + Ae^{Bt}}$ với y_c, A, B các tham số dương đã biết.

2.11. Khảo sát các hàm số sau:

a) $x = \dfrac{117.049,5}{1 + 0,91148e^{-0,043940384t}}$

b) $x = \dfrac{126,885 + 1,138283e^{-0,040749t}}{1 + 1,138283e^{-0,040749t}}$

c) $x = \dfrac{124,885 - 1,068e^{-0,040749t}}{1 + 1,068e^{-0,040749t}}$, với $x > 0$.

4. HÀM HAI BIẾN VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

2.12. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $Z = (x - 1)^2 + 2y^2$

b) $Z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

c) $Z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

d) $Z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

e) $Z = x^2y^3(6 - y - x)$

2.13. Lập phương trình thực nghiệm:

a) Tính hệ số tương quan và lập phương trình $y = ax + b$ từ các số liệu sau:

x_i	4670	4860	5050	5170	5470
y_i	0,0411	0,0397	0,0352	0,0375	0,0336

b) Lập phương trình $y = ax^2 + b$ từ số liệu sau:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,1	3	8,1	14,9	23,9

c) Lập phương trình $y = ax^2 + bx + c$ từ số liệu sau:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,9	8,9	19,13	33,2	50,8

Chương III. TÍCH PHÂN

1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1. Tính các tích phân của hàm hữu tỷ:

a) $\int \frac{dx}{x^3+8}$

b) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

c) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

d) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} dx$

e) $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2} dx$.

3.2. Không sử dụng phương pháp hệ số bất định tính:

a) $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$

b) $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$

c) $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9} dx$

d) $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$

e) $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

3.3. Tính tích phân các hàm lượng giác:

a) $\int \sin^3 x\, dx$

b) $\int \cos^7 x\, dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

d) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$

e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 12\cos^2 x}$.

3.4. Tính tích phân các hàm vô tỷ sau:

a) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$

b) $\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})} dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^5}} dx$

e) $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\, dx$.

2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.5. Bằng phương pháp đổi biến tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$ b) $\displaystyle\int_0^{sht} \sqrt{x^2+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ g) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

h) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$ i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^7(2x)\,dx$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,dx$, trong đó $a^2 \neq 0$; $b^2 \neq 0$.

3.6. Tính các tích phân sau theo phương pháp tích phân từng phần:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^{\pi/4} e^{3x}\sin 4x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x\,dx$.

3.7. a) Chứng minh rằng: $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx = -\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. Tính I_4.

b) Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, với p, q nguyên dương.

3.8. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp Simpson với 2n = 8:

a) $\displaystyle\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$ b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

3.9. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ với } n = 10.$$

3.10. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang chính xác đến 10^{-4}.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$

3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

3.11. Tính tích phân suy rộng:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$

3.12. Cho $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Tính:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax\cos bx}{x}\,dx$ $(a > b > 0)$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$ $(\sigma > 0)$

3.13. Chứng minh rằng:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu$ $(\sigma > 0)$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2$ $(\sigma > 0)$

Chương IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

4.1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

a) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

b) $xyy'=1-x^2$

c) $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$

d) $y'\mathrm{tg}x-y=a$

e) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$

g) $y'=10^{x+y}$

4.2. Giải các phương trình sau:

a) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

b) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$

c) $y^2+x^2y'=xyy'$

d) $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}$

e) $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$

g) $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$

h) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $y\big|_{x=1}=-1$

i) $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0$, $y\big|_{x=0}=\sqrt{5}$

4.3. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $y'+2xy=xe^{-x^2}$

b) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

c) $2ydx+(y^2-6x)dy=0$

d) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$

e) $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$

g) $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$

h) $xy'-\dfrac{y}{1+x}=x$; $y\big|_{x=1}=0$

i) $t(1+t^2)dx=(x+xt^2-t^2)dt$; $x\big|_{t=1}=-\dfrac{\pi}{4}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

4.4. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi

a) $y''-2y'-y=0$

b) $4y''-20y'+25y=0$

c) $y''-4y'=-12x^2-6x-4$

d) $y''-4y'+3y=e^{5x}$; $y|_{x=0}=3$, $y'|_{x=0}=9$

e) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$

g) $y''+6y'+9y=xe^{\alpha x}$; α là hằng số.

4.5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 sau:

a) $y''-(m+1)y'+my=e^x(x+1)$; m là hằng số

b) $y''-y'=e^{2x}(3x+5)$

c) $y''-5y'+6y=e^{3x}(2x-1)$

d) $y''-2y'+y=e^x(x^3-1)$; $y|_{x=0}=-1$, $y'|_{x=0}=2$

e) $y''+3y'+2y=2x^2-4x-17$

g) $y''-7y'+10y=x^2$

h) $y''-y'=e^{2x}+x+1$

i) $y''+2y'+y=3e^{-x}(x+1)+(2x+3)$

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ỨNG DỤNG

4.6. Theo dõi dân số một quận, thu được số liệu sau:

Năm	Số dân (người)	Tỷ lệ sinh (đơn vị: 1)	Tỷ lệ chết (đơn vị: 1)
1983	171.000	0,0240	0,00512
1984	175.300	0,0217	0,00499
1985	179.600	0,0194	0,00486
1986	183.900	0,0171	0,00473
1987	188.200	0,0148	0,00460

Hãy dự báo dân số năm 1990, năm 2005.

4.7. Theo dõi dân số một xã, thu được số liệu sau:

Năm	Số dân (người)	Tỷ lệ sinh (đơn vị: 1)	Tỷ lệ chết (đơn vị: 1)
1980	4.670	0,0411	0,0099
1981	4.860	0,0397	0,0074
1982	5.050	0,0352	0,0099
1983	5.170	0,0375	0,0064
1984	5.470	0,0336	0,0059

Hãy dự báo dân số năm 1985, năm 2005.

4.8. Theo dõi dân số một nước, thu được số liệu sau:

Năm	Số dân (nghìn người)	Tỷ lệ sinh ($^0/_{00}$)	Tỷ lệ chết ($^0/_{00}$)
1981	54.927	30,02	6,98
1982	56.713	29,80	7,10
1983	57.442	29,30	7,08
1984	58.669	28,40	7,03
1985	59.872	28,44	6,94

Hãy dự báo dân số năm 1989, 1999, 2004.

4.9. Nghiên cứu sự phát triển dân số ở một nước, người ta thấy sự phát triển đó được biểu diễn bởi phương trình vi phân:

$$x'(t) = 323,7 \times 10^{-6}(-x^2 + 127,885x - 126,885),$$

trong đó: x là số dân (đơn vị: triệu), t là thời gian (đơn vị: năm).

a) Giải phương trình tìm hàm số x = f(t) quan hệ giữa số dân và thời gian, với điều kiện:

a_1) Khi bắt đầu nghiên cứu, số dân lúc đó là 59,872 triệu người.

a_2) Khi bắt đầu nghiên cứu, số dân lúc đó là 0,5 triệu người.

Cho biết năm mà dân số không còn.

a_3) Khi bắt đầu nghiên cứu, số dân lúc đó là 150 triệu người.

b) Vẽ dạng đồ thị của quá trình phát triển dân số trong ba trường hợp trên.

c) Giả sử năm 1985 là năm bắt đầu nghiên cứu, hãy dự báo dân số năm 2004 tương ứng với ba trường hợp trên. Qua đó cho nhận xét.

4.10. Ở một quần thể sinh vật có số phần tử là 100000 bị nhiễm một bệnh dịch. Khi phát hiện ra dịch đã có 5000 phần tử bị nhiễm bệnh. Vì chưa có thuốc chữa, người ta thực hiện việc cách ly quần thể đó với môi trường xung quanh.

a) Hãy lập và giải phương trình phát triển của dịch đó để xác định quan hệ giữa số phần tử mắc bệnh (đơn vị: năm nghìn) với thời gian t (đơn vị: ngày). Vẽ dạng đồ thị của nghiệm.

b) Hãy lập và giải phương trình phát triển của dịch đó để xác định quan hệ giữa số phần tử chưa mắc bệnh (đơn vị: năm nghìn) với thời gian t (đơn vị: ngày). Vẽ dạng đồ thị của nghiệm.

4.11. Nghiên cứu sự biến đổi dân số ở một địa phương, người ta thấy sự phát triển của dân số được biểu diễn bởi phương trình:

$$x'(t) = 323{,}7 \times 10^{-6}(-x^2 + 123{,}885x + 124{,}885),$$

trong đó: x là số dân (đơn vị: trăm nghìn), t là thời gian (đơn vị: năm).

a) Giải phương trình tìm hàm số x = f(t) quan hệ giữa số dân và thời gian, với điều kiện:

a_1) Số dân năm 1985 là 5.987.200 người.

a_2) Số dân năm 1985 là 15.000.000 người.

b) Tính số dân năm 2004 và vẽ dạng đồ thị của nghiệm tương ứng hai trường hợp trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đỗ Như Cương, *Giáo trình Toán cao cấp*, Trường Đại học Y Hà Nội, 1977.
2. Đặng Đức Hậu, *Lý thuyết xác suất và thống kê ứng dụng*, Trường Đại học Y Hà Nội, 2003.
3. Nguyễn Đình Trí và cộng sự, *Toán cao cấp – Tập I, II, III,* Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
4. Vũ Tuấn – Phan Đức Thành – Ngô Xuân Sơn, *Giải tích toán học – Tập I, II,* Nhà xuất bản Giáo dục, 1977.
4. Hoàng Xuân Sính, *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1985.
5. Đào Hữu Hồ, *Xác suất thống kê*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 1998.
6. L.Z. Rumsixki, *Phương pháp toán học xử lý các kết quả thực nghiệm*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 1972.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung:
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập nội dung và sửa bản in:
ĐỖ HỮU PHÚ

Thiết kế mỹ thuật và trình bày bìa:
ĐINH XUÂN DŨNG

Thiết kế sách và chế bản:
THÁI SƠN

TOÁN CAO CẤP (Dùng cho đào tạo bác sĩ đa khoa)

Mã số: 7K783Y8 – DAI

In 1.000 bản (QĐ : 38), khổ 19 x 27 cm. In tại Công ty Cổ phần in Phúc Yên.

Địa chỉ : Đường Trần Phú, thị xã Phúc Yên.

Số ĐKKH xuất bản : 412 – 2008/CXB/11 – 869/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2008.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO Y HỌC
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1.	**Sinh học phân tử**	*GS. TS. Nguyễn Văn Thanh (Chủ biên)*
2.	**Bào chế và sinh dược học – Tập 2**	*PGS. TS. Lê Quan Nghiệm – TS. Huỳnh Văn Hoá (Đồng chủ biên)*
3.	**Thực vật dược**	*TS. Trương Thị Đẹp (Chủ biên)*
4.	**Ký sinh trùng**	*PGS. TS. Phạm Văn Thân (Chủ biên)*
5.	**Hoá đại cương**	*PGS. TSKH. Phan An (Chủ biên)*
6.	**Điều dưỡng cơ bản 1**	*PGS. TS. Phạm Văn Linh – TS. Lê Văn An (Đồng Chủ biên)*
7.	**Điều dưỡng cơ bản 2**	*PGS. TS. Hoàng Ngọc Chương BSCKII Trần Đức Thái (Đồng Chủ biên)*
8.	**Kiểm nghiệm thuốc**	*Trần Tích (Chủ biên)*
9.	**Nhãn khoa**	*PGS TS. Hoàng Thị Phúc (Chủ biên)*
10.	**Sinh lý học**	*GS. TS. Phạm Thị Minh Đức (Chủ biên)*
11.	**Phẫu thuật miệng – Tập 1**	*TS. BS Lê Đức Lánh (Chủ biên)*
12.	**Hoá phân tích – Tập 1**	*PGS TS Võ Thị Bạch Huệ (Chủ biên)*
13.	**Công nghệ bào chế dược phẩm**	*PGS. TS. Hoàng Minh Châu (Chủ biên)*
14.	**Dược lý học – Tập 1**	*GS TS. Đào Văn Phan (Chủ biên)*
15.	**Vệ sinh phòng bệnh**	*PGS. TS. Trần Văn Dần (Chủ biên)*
16.	**Dinh dưỡng**	*TS. Phạm Thị Thuý Hoa (Chủ biên)*
17.	**Sức khoẻ sinh sản**	*TS. Bùi Thị Thu Hà (Chủ biên)*
18.	**Lý thuyết thiết bị hình ảnh y tế – Tập 1**	*KS. Trần Văn Sơn (Chủ biên)*
19.	**Lý thuyết thiết bị hình ảnh y tế – Tập 2**	*KS Lê Tiến Khoan (Chủ biên)*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;
Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;
Tại Thành phố Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B – 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ;
240 Trần Bình Trọng – Quận 5.
Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4 ;
Website : www.nxbgd.com.vn

8934980827864

Giá: 52.000 đ